微积分

经济管理
数学基础

1

刘正根 丁京禹 刘丽 朱南 编著

西南财经大学出版社

出 版 前 言

作为高等数学的入门科学—微积分，是一门基础理论科学。它来自实践，以客观世界中的空间形式和数量关系为研究对象。一般说来，那里有变量间的关系那里就有数学。每一门科学只有当它成功地运用了数学的时候，才能真正地达到完善的地步。因而，数学在各门经济学科中理应而且必须占有重要的地位。

本书是受四川省高等教育自学考试委员会的委托编写的经济管理类专业成人高等教育自考教材，是在原内部试用教材的基础上听取各方面的意见后重新编写的。全书共分九章，内容包括：函数，极限，连续，一元、多元函数微积分，无穷级数和常微分方程等。新编教材较原内部教材有很大的不同。书中部分概念的提法更为精炼而严谨，并增添了经济领域中的应用例题和习题。各章还增加了部分概念题，便于读者复习思考，加深理解和方法的掌握。教材中带有“*”号的内容可作一般了解。同时我们还编写了习题详解作为本教材的配套书另册发行。

本书为四川省高等教育经济管理专业类成人自学考试必读教材，亦可作为财经院校本科、专科、电大、函大、职大及经济类管理干部培训班的教材或参考书。

参加本书编写的有刘正根、丁京禹、刘丽、朱南等同志，由刘正根同志担任总纂和审定工作。

我们对给原内部教材提出宝贵意见和建议的热心读者、同仁以及为本书做了一定工作的史代敏同志表示感谢。

限于我们的水平和经验，错误在所难免，敬请读者批评指正，谨此致谢。

编　　者

1987年7月于光华园

目　　录

第一章　函数　极限　连续

第二章　一元函数微分法

第三章 中值定理与导数的应用

第四章 不定积分

第五章　定积分

第六章　无穷级数

第七章　多元函数的微分法及其应用

第八章　重积分及其应用

第九章　微分方程简介

第一章 函数 极限 连续

函数、极限、连续是高等数学中几个最重要、最基本的概念。函数是微积分研究的对象；极限则是揭示变量之间的变化趋势的工具，而且又是建立其它基本概念的基础；与极限概念密切相关的就是函数的连续性，它反映了函数的重要性态。

这一章，我们将分12节介绍上述内容：§1.1—§1.4（函数），§1.5—§1.10（极限），§1.11—§1.12（连续）。

§1.1 函数概念

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象.在经济领域中涉及的大量数量关系从理论上讲，都可以用函数关系来表达. 因此，作为经济工作者熟悉和掌握这个概念是很重要的. 我们将从本节开始到§1.4在初等数学的基础上进一步讨论函数的概念及其性质，并结合经济问题举一些函数关系的实例.

1. 实数的绝对值

设a为一实数，a的绝对值就是指：当a为正数时，a的绝对值就是它本身；当a为负数时，a的绝对值就是与它相反的正数—a；零的绝对值就是零. a的绝对值用记号

$|a|$ 表示，即

$$|a|=\begin{cases} a, & 当a\geqslant 0\ ; \\ -a, & 当a<0\ . \end{cases}$$

很明显，对任意实数a有关系式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

事实上，如果$a\geqslant 0$，显然有$-|a|\leqslant a=|a|$；如果$a<0$，则有$-|a|=a<|a|$，所以无论a是怎样的实数都有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

由此，可得不等式$|a|\leqslant k$（$k\geqslant 0$）与不等式$-k\leqslant a\leqslant k$等价。

关于绝对值有如下基本性质：

1° 和的绝对值不大于各项绝对值的和，即

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

因为$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$

把两不等式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

这个不等式是与不等式$|a+b|\leqslant |a|+|b|$等价的。

一般对任意有限项和的绝对值有如下不等式成立

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k|\leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|$$

（k为正整数）

2° 差的绝对值不小于绝对值的差，即

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|.$$

因为 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$

移项得 $|a-b|\geqslant |a|-|b|.$

3° 乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积，即

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

一般有$|a_1a_2\cdots a_k| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_k|$

4° 商的绝对值等于绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0).$$

2．区间 邻域

我们研究函数时，常常是限制在一部分实数范围内去考虑，这部分实数往往是介于两个实数之间的一切实数．为此，我们引入区间的概念。

区间 介于某两个实数a与b(a<b)之间的全体实数称为区间。而把实数a与b叫做区间的端点。

称满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数x的全体为开区间，记为(a, b)；满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的一切实数x的全体为闭区间，记为〔a, b〕；满足不等式

$$a \leqslant x < b \text{或} a < x \leqslant b$$

的一切实数x的全体为半开区间，记为〔a, b)或(a, b〕。

在数轴上，区间表示介于两点之间的线段上的点的全体，而这两点为区间的端点，两点间线段的长度b—a称为区间的长度。

除了有限区间外，还有无穷区间。

$(-\infty, -\infty)$表示全体实数，或记为$-\infty<x<+\infty$.

$[a, +\infty)$表示不小于a的实数的全体，或记为$a\leqslant x<+\infty$。

$(-\infty, b]$表示不大于b的实数的全体，或记为$-\infty<x\leqslant b$.

应该注意，这里引用的符号“$-\infty$”、“$+\infty$”不能看作通常的数。

上面已就区间的概念作了介绍，下面再介绍邻域的概念。

邻域 设a与δ(δ>0)为两个实数，称满足不等式$|x-a|<\delta$的一切实数x的全体为以点a为中心，δ为半径的δ——邻域，记为δ(a)。

由于不等式$|x-a|<\delta$等价于不等式

$$-\delta<x-a<\delta.$$

亦即

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

而满足这个不等式的一切实数x的全体就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$，所以，点a的δ——邻域δ(a)就是以点a为中心，长度为2δ的开区间（图1.1）。

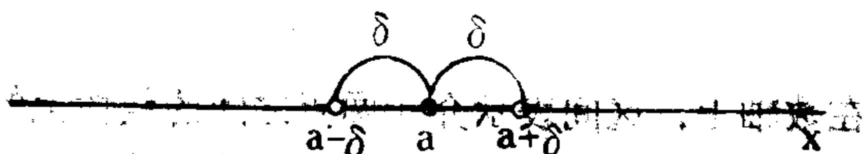

图1.1

3. 常量 变量

在观察自然现象、社会现象或技术过程时，我们常常会遇到各种不同的量，其中有的量在一定过程中始终保持不变的数值，这种量为称常量；有的量在过程进行中可取不同的数值，这种量称为变量。例如，某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的，因此，可以把它看作常量，而其销售量和销售额通常则是变量。

必须指出，常量与变量的概念是相对的，即一个量在这一过程中是常量而在另一过程中可能是变量，这就要求我们对常量和变量的理解不能绝对化，必须把它和具体的过程联系起来加以考虑。

常量通常以字母a，b，c，…表示；变量则以字母x，y，z，…表示。量x的每一个值都可用实数轴上的一个点来代表。如果x是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果x是变量，则用数轴上的动点表示。

4、函数的定义

在自然科学、技术管理或经济管理中，所遇到的实际问题往往有几个变量同时都在变化，这些变量并不是彼此孤立的改变，而是相互联系、相互制约并按一定规律在变化。在这里我们先就两个变量之间的相依关系的简单情形加以讨论（两个变量以上的情形将在第七章讨论）。首先考察几个实例。

例1 设某商品的单位成本为5元，现在企业已售出100件，问企业可获利润多少？

很明显，在这个问题中单位成本是常量，单价与利润是变量，单价高，利润多；单价低，利润少。若设P表单价，L表总利润，则L与P之间有关系

$$L = 100(P-5),$$

上述式子表明了利润L与价格P之间的相依关系及其内在的变化规律，只要价格P确定，利润L就随之确定。

例2　圆的半径r和它的面积S之间有关系

$$S = \pi r^2$$

其中π是常量，r和S是变量。只要r取定为某一正数值，面积S就有一个确定的值与之对应。所以公式表明了变量r和S的相依关系及其内在规律。

例3　工厂中的工资总额、职工人数和工资平均水平之间一般具有关系

$$y = ax$$

式中y表示工资总额，x表示职工人数，a表示工资平均水平。

类似上面的例子在实际中是很多的，它们虽然代表不同的具体问题，但都具有一个共同的特点，那就是它们都反映了两个变量同时变化的相依关系。这种相依关系，实质上给出了两个变量间的一种相互制约的对应规律（或法则），当其中一个变量在某一范围内取定一数值时，按照这种规律，另一个变量就有确定的值与之对应。抽去上面各问题中的具体意义（个性）而只研究它们的共性，这就形成了数学上的函数概念。

定义1　设x与y是两个变量，如果变量x在某一范围内每取一值时，按照一定规则，变量y就有确定的值与之对应，则变量y叫做变量x的(一元)函数，记为

$$y=f(x)$$

其中x叫做自变量，y叫做函数或因变量，字母“f”表示变量之间的对应规律。

我们从函数的定义中可以看到函数包含有两个要素，即：

1° 两个变量之间的对应规律；

2° 自变量的取值范围。

应当注意的是，函数式中的符号f(x)是一个整体，它不表示f乘x，字母“f”应理解为变量x与y之间对应的确定性规律。

自变量x取值范围的全体称为函数的定义域（记为D），也就是说函数的定义域就是使函数y有意义的自变量x的全体。我们只有在定义域范围内来讨论函数才有实际意义。函数的定义域，一般用区间或集合的形式表示。

函数y的取值范围称为函数的值域。

在函数的定义中，只讲了变量x每取定一值时，变量y按照对应规律总有确定的值与之对应，但到底有一个还是有几个确定的值与之对应，没有说明。

若当x取一个值时，函数y只有一个值与之对应，我们称函数y为x的单值函数；若当x取一个值时，函数y有两个或两个以上的值与之对应，我们称y为x的多值函数。今后如果不加说明，我们研究的函数都是指单值函数。

同一函数关系式y＝f(x)，其定义域要随y＝f(x)代表具体问题还是不代表具体问题而有所不同。当y＝f(x)代表某一具体问题时，其定义域要根据其实际意义来定；当y＝f(x)只是一般的函数关系时，则其定义域就是使y有意

义的自变量x的全体。

例 4 讨论函数$L=100(P-5)$的定义域。

若公式代表例1中总利润L和单价P之间的关系，这是一个实际问题，因此单价P必须大于5而小于或等于某一正数M，即$5<P\leqslant M$，否则利润无意义。故这时定义域为$D=(5, M]$，或记为$D=\{P \mid 5<P\leqslant M\}$。

若公式只反映变量P与L之间的一般函数关系，则$L=100(P-5)$的定义域是$D=(-\infty, +\infty)$，又记为$D=\{P \mid P取全体实数\}$，或$D=\{P \mid -\infty<P<+\infty\}$。

例 5 求函数$y=x^2$的定义域。

解 由于x可取一切实数，

所以，$y=x^2$的定义域为$D=(-\infty, +\infty)$。

例 9 求函数$y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域。

解 要使y有意义，必须分母不等于零，即

$$x\neq\pm 1,$$

所以 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域为

$$D=(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty).$$

例 7 求函数$y=\sqrt{2x-3}$的定义域。

解 要使y有确定值，必须$2x-3\geqslant 0$，即$x\geqslant\frac{3}{2}$，所以$y=\sqrt{2x-3}$的定义域为$D=[\frac{3}{2}, +\infty)$，又记为$D=\{x \mid \frac{3}{2}\leqslant x<+\infty\}$。

例 8 求函数$y=\lg(x^2-3x+2)$的定义域。

解 因负数、零没有对数，所以只有

$x^2-3x+2>0$时，y才有意义。

由$(x=2)(x-1)>0$

得

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-1>0 \end{cases}\qquad 解得x>2;$$

或

$$\begin{cases} x-2<0 \\ x-1<0 \end{cases}\qquad 解得x<1.$$

因此，函数$y=\lg(x^2-3x+2)$的定义域为：

$$D=(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty).$$

对于自变量x取定值x_0时，函数$y=f(x)$的对应值$f(x_0)$叫做函数$y=f(x)$当$x=x_0$时的函数值。一般求函数$y=f(x)$在$x=x_0$的函数值$f(x_0)$时，只须将x_0代入函数式中计算便得。

例9 设$f(x)=3x^2-2x+1$ 求$f(0),f(2),f(-1)$.

解 当 $x=0$时，$f(0)=1$；

当 $x=2$时，$f(2)=3\cdot2^2-2\cdot2+1=9$；

当 $x=-1$时，$f(-1)=3\cdot(-1)^2-$

$$-2\cdot(-1)+1=6$$

还应该注意，在同一问题中，对于不同的函数关系，应采用不同的函数符号，如f、F、G等。

5．函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图示法和公式法.

1° 表格法 表格法就是将自变量x的一系列的取值与对应的函数值列成表格，如对数表、三角函数表、平方根表

等。它的优点是用起来方便，这在实际工作中是一种常用的函数表示法。然而这种方法有它的局限性，不能完全的反映两个变量之间的规律性。

2° 图示法　一个自变量的函数即一元函数，其图形就是一些点的轨迹，这些点的横坐标为自变量的取值，纵坐标是对应的函数值。通常把这些点联起来形成平面上的一条曲线（如统计学中常用的各种统计曲线）就是函数的图示法，它的优点是直观醒目，缺点是不够准确和完整。

3° 公式法　公式法就是直接用数学式子表示两个变量间的函数关系的方法，它的优点是简明、准确、完整，便于理论分析，微积分学中多采用这种表示函数的方法。

需要指出，有时一个函数关系使用一个公式表示还不够，必须用两个或两个以上的式子来分段给出。

例10

$$y=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2; \\ -x & x<0. \end{cases}$$

在区间〔0，2〕上 $f(x)=x^2$，在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x)=-x$，故该函数的定义域是 $D=\{x \mid -\infty<x\leqslant 2\}$。

例11　公路运输中规定货物的吨公里运价为：在50公里以内（包括50公里）每公里a元，超过50公里，每增加1公里为$\frac{4}{5}$a元，把总运费y和路程x之间的函数关系表出来，就是

$$y=f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x\leqslant 50; \\ 50a+\frac{4}{5}a(x-50) & x>50. \end{cases}$$

如象例10、例11这类分段表示的函数称为分段函数，它可以把一些较复杂的经济活动的全过程（例如企业进行购买、