高等学校试用教材

多元微积分

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

人民教育出版社

北京大学数学力学系高等数学教材编写组所编这套高等数学试用教材共分三册:《一元微积分》、《常微分方程与无穷级数》、《多元微积分》。在内容上三册是彼此衔接的。本书是第三册,主要内容为空间解析几何、多元函数微分学、二重积分和三重积分、曲线积分和曲面积分、场论。

本书可作为物理类专业高等数学试用教材。

高等学校试用教材

多元微积分

北京大学数学力学系

高等数学教材编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖北省新华印刷厂印装

*

787×1092 1/32 印张 8 10/16 字数 208,000

1978年11月第1版 1979年5月第1次印刷

印数 1—240,000

书号 13012·0204 定价 0.63 元

目　　录

第一章 空间解析几何

引 言

空间解析几何与平面解析几何相仿，也是用代数的方法来研究几何图形。平面解析几何，是通过建立平面坐标系，把平面上的几何图形与数或解析表达式联系起来。具体地说，就是用平面坐标的方法对平面的几何图形作定量的刻划，将形转化为数；或者反过来，将变量之间的依赖关系通过坐标法用几何图形表示出来，将数转化为形。空间解析几何完全类似，是通过建立空间坐标系，把空间的几何图形与数或解析表达式联系起来，在空间使数与形相结合，研究数与形的对立统一。

第一节 空间直角坐标系

空间直角坐标系 我们知道，表示直线上一个点的位置，只需要一个数，就是用数轴上点的坐标。而表示平面上一个点的位置，就需要两个数，也就是用平面上点的坐标。很自然也就联想到，要表示空间中一个点的位置，就需要三个数了。实际情况也确实是这样。例如，要确定飞机在某一时刻的位置，不但要知道飞机到达地面某一处(地面上这一处的位置要用两个数来表示)的上空，还要知道飞机离地面的高度。这样，就要用三个数，才能确定空间一个点的位置。由此我们可以引出空间直角坐标系的概念。

类似于平面直角坐标系的建立方法，我们来建立空间直角坐标系。首先选取一定点 O，过 O 点引三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，这样就构成了空间直角坐标系 $Oxyz$，O称为坐标原点，Ox、Oy、

Oz 称为坐标轴，每两个坐标轴决定的平面称为坐标平面，分别简称为 xy、yz、zx 平面。

空间直角坐标系的决定，与坐标轴 Ox、Oy、Oz 的方向的选取有关。我们作如下规定：将右手沿 Ox 轴到 Oy 轴方向握住 Oz 轴，如果姆指伸开正对 Oz 轴正向，则称这个坐标系为右手直角坐标系（图 1-1）。反之称为左手直角坐标系。今后我们通常都使用右手坐标系。

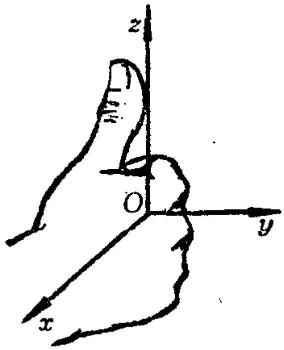


图 1-1

空间直角坐标系的一个直观模型是：取房子的一个墙角为坐标原点 O，从它出发的三条棱分别取为 Ox、Oy、Oz 轴。这时地板和两片墙面就是坐标平面（想象它们无限地伸展出去）。

点的坐标 建立了空间直角坐标系，空间的一点就可以用它的三个坐标表示出来。设 A 为空间任一点，过 A 作垂直于三坐标轴的平面，与三坐标轴分别交于 P、Q、R 三点（见图 1-2）。若这三点在三个坐标轴上的坐标分别是 a、b、c，则称这三个数 a、b、c 为 A 点的 x、y、z 坐标，记为 $A(a,b,c)$。反过来，任意给定三个有序的数 (a,b,c)，在三个坐标轴上分别找出坐标为 a,b,c 的点，这三点不妨仍用 P,Q,R 来表示（图 1-2），然后过 P,Q,R 分别作垂直于坐标轴的平面，这三个平面是互相垂直的，在空间中就可以唯一地确定一个点，这个点以 (a,b,c) 为坐标。这样，空间的点和有序数组 (a,b,c) 之间就建立了一一对应的关系。

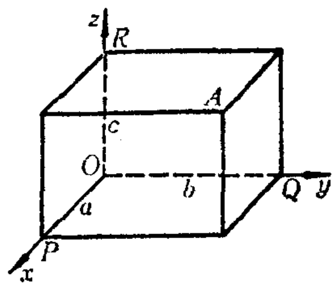


图 1-2

显然，原点的坐标为 $(0,0,0)$；在 x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；在 xy、yz、zx 坐标平面上点的

坐标分别是$(x, y, 0)$、$(0, y, z)$、$(x, 0, z)$。

在自然界中，有空间直角坐标系的许多生动模型。例如食盐的结晶体，其中四个氯原子和四个钠原子相间地分布在一个立方体的八个顶点上（图 1-3(a)），这些顶点称为结点。整个食盐结晶体就是由这样的小单位连结起来的（参阅图 1-3(b)），结晶体的这种结构称为空间点阵。如果任取一个结点为坐标原点 O，从 O 出发到相邻的三个结点引三根数轴，即得一个空间直角坐标系 $Oxyz$(图 1-3(a))。设小立方体边长为 a，则在此直角坐标系下各个结点的坐标为(ma, na, pa)，其中 m、n、p 是整数。

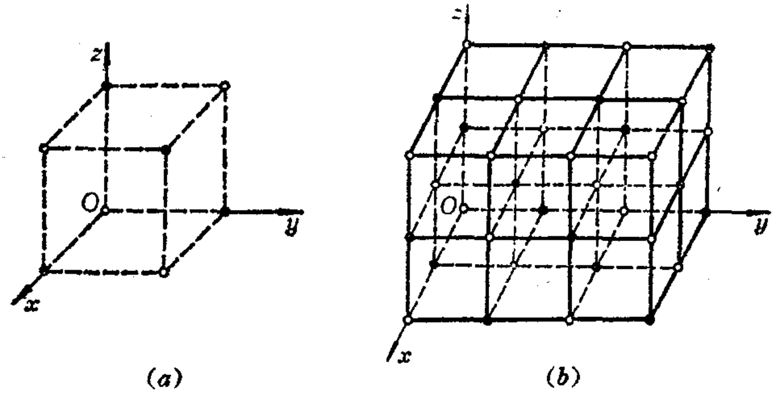


图 1-3

在建立空间直角坐标系后，整个空间就被 xy、yz、zx 三个坐标平面划分为八块，每一块称为一个卦限，共有八个卦限（图 1-4），

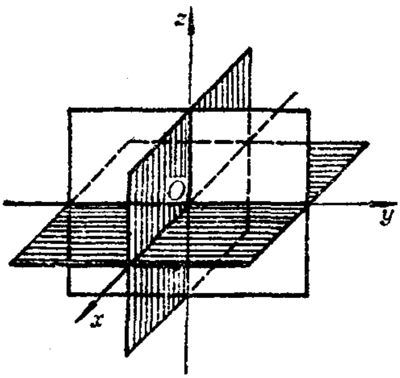


图 1-4

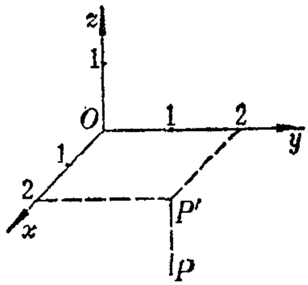


图 1-5

其顺序是先数上半空间($z>0$)，从 x、y、z 三个坐标都为正的卦限开始数起，按逆时针方向旋转分别为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限，下半空间($z<0$)与Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限依次对应的是Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ四个卦限。在每个卦限中的点，其各坐标的符号列表如下：

卦限 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

空间直角坐标系在纸上画出来时，我们让 Oy 轴与 Oz 轴垂直，而让 Ox 轴与 Oy 轴夹 $120°$ 角。(要注意，在空间中，Ox 轴与 Oy 轴实际上是垂直的。)画出空间直角坐标系后，就可以作出空间中坐标为(a, b, c)的点来。图 1-5 作出了坐标为$(2, 2, -1)$的点 P，其办法是：先作 xy 平面上的点 $P'(2, 2, 0)$，然后过 P' 作平行于 Oz 轴的直线，在与 Oz 轴反方向上截取一个单位长，即得 P 点。

在作图中要注意，在空间中互相平行的直线，在作出的图形中仍然应当是平行的，这是在平面上画空间图形时应遵循的一条基本原则。

习 题 一

1. 指出下列各点位置的特殊性质：

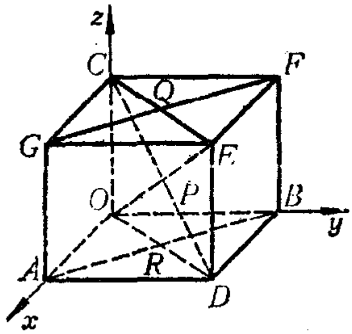
   1) $(4, 0, 0)$　　　　2) $(0, -7, 0)$

   3) $(0, -7, 2)$　　　　4) $(-5, 0, 3)$

2. 设空间任意一点 P 的坐标为(x, y, z)，求由 P 点引至各坐标平面的垂足的坐标，和由 P 点引至各坐标轴的垂足的坐标。

3. 一个长方体如图所示。已知 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$，取 O 为坐标原点，OA、OB、OC 为 Ox、Oy、Oz 轴。写出此长方体各顶点的坐标，并求 OE 与

CD 交点 P、CE 与 GF 交点 Q、OD 与 AB 交点 R 的坐标。



(第 3 题图)

4. 给定空间直角坐标系 $Oxyz$，试在图上标出下列各点的位置：

$$(3,-1,0),\quad(-1,2,1),\quad(0,-2,3)$$

5. 已知一个四面体的四个顶点坐标为：

$$(1,-2,1),\quad(3,4,-2),\quad(-1,5,1),\quad(1,2,5)$$

作出这个四面体的图形来。

第二节　向量代数

向量及其表示

最简单的量在取定单位以后完全可以用一个实数来表示，例如时间、温度、距离、质量等等。这种只有大小的量叫做数量，也叫做标量。

另外还有一些比较复杂的量，它们不但有大小，而且还有方向。例如一个质点的位移。设质点位移前位置在 A，位移后位置在 B，能代表这个位置变化的有两个主要因素：一是位移的距离，即线段 AB 的长度；二是位移的方向。抓住这两个要点加以抽象，我们用自 A 出发指向 B 的一条有向线段来表示这个位移（图 1-6，在终点 B 处加上箭头以示方向），称为从 A 到 B 的位移向量，用记号 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

象位移这样的量是很多的，例如力、速度、加速度、力矩等等。它们虽然具有不同的物理意义，但都是既有大小又有方向的量。这种量在生产实践和科学实验中是常见的。我们把这种既有大小又有方向的量叫做向量。抓住大小和方向这两个特征，我们可以用有向线段来表示一个向量，叫做向量的图形表示，如图 1-6 所示。AB 线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向。A点叫起点，B点叫终点。这个向量通常用记号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，有时也简单地记为 $\boldsymbol{a}$。

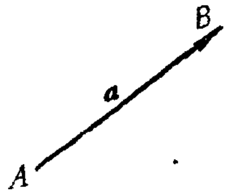


图 1-6

考察一个刚体的平行移动。当刚体从一个位置平行移动到另一个位置时，刚体上各质点在同一时间内有相同的位移，各点所画出的位移向量有相同的大小和方向，它们每一个都反映了刚体位移的情况，因此刚体的平移运动可用这些位移向量中的任一个来表示。基于这样的原因，凡是两个向量大小相等、方向相同，我们就说这两个向量是相等的。因此，一个向量在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移。今后如有必要，可以将几个向量平移到同一出发点。这种保持长度和方向不变而可以自由平移的向量叫做自由向量。

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度也叫做它的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$。与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相等长度而方向相反的那个向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$。模为 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 。零向量就是起点与终点重合的向量，它所表示的位移就是原地不动。零向量没有确定的方向，也可以说它的方向是任意的。

向量的加减法运算

空间中任意两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把它们的起点放在一起时，它们必在同一个平面上，因此总可以把它们看作是某一个平面上的向量，

它们的加法运算可以按照两个平面向量的加法，即平行四边形法则进行(参阅图 1-7)。这种平行四边形法则,是大家所熟悉的,力学中力的合成,速度的合成都是按平行四边形法则进行的。两个向量的加法也可依三角形法则进行。即将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$，就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 1-8)：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 显然三角形法则与平行四边形法则是等价的。

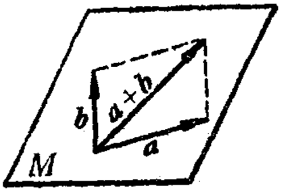


图 1-7

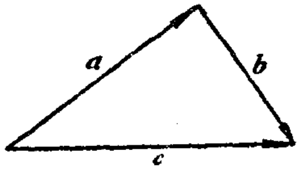


图 1-8

空间中多个向量的加法，可按下例办法来进行：将第一个向量放好，然后依次把下面一个向量的起点放在前一个向量的终点上。最后，从第一个向量的起点到最末一个向量终点的有向线段即为这些向量的和(参见图 1-9)。这个办法称为向量的多边形加法法则。

向量的加法有下列性质：

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)；

3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

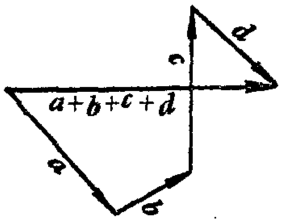


图 1-9

这些就是向量加法的基本规律。它们说明，向量加法可以象实数加法那样去演算。

在作向量运算时,经常要用到加法的逆运算,这就是向量的减法，定义如下：

从向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$ 得到的向量规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量

$(-\boldsymbol{b})$之和:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

简单说，减法就是变号相加。

数乘向量的运算

在应用中常常会遇到向量与数相乘的情况，例如原来的力为$\boldsymbol{F}$，如果它的方向保持不变，而大小增大到原来的三倍，则力变为原来的三倍，我们可以记为$3\boldsymbol{F}$，由此可以引出向量与数相乘(简称数乘)的定义:

对于任一实数λ，$\lambda\boldsymbol{a}$表示这样一个向量：当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$反向。而它的模则为$|\boldsymbol{a}|$的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$。当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$是一个模为零的向量，即零向量。

图 1-10 表示向量数乘的几何意义。

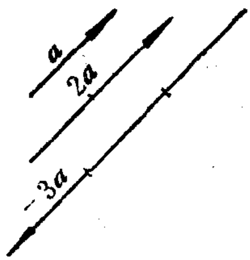


图 1-10

从数乘向量的定义容易推出下面的结论：若两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互相平行，把它们移到同一个起点，则它们是共线的，于是$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中$\lambda$为一数量。反之，若$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$为一数量，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，也叫平行，记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 零向量与任一向量共线。

关于数乘向量运算有下列三个性质:

1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

这里λ和μ是任意实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是任意向量。前两性质从数乘的定义可直接推出。至于性质 3)，可用相似图形来说明。事实上，若$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$有一个共同起点，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$就是以$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的对角线向量。当$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$各乘以$\lambda$时，便得到一个与原来

平行四边形相似的平行四边形（图 1-11），并且 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 就是以 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{b}$ 为两边的这个平行四边形的对角线向量，所以

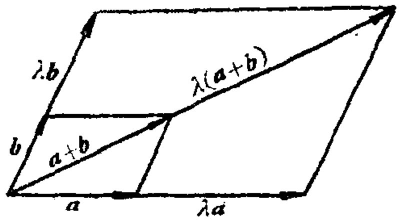


图 1-11

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

若一向量 $\boldsymbol{a}_0$ 的模为1，且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，则称 $\boldsymbol{a}_0$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量。从向量数乘的定义有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}_0$$

所以把一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 用它的长度除一下，就得到一个单位向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，它表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向。方向与单位向量是一一对应的，因此我们常用单位向量来表示方向。

向量的坐标

现在我们来引进向量的坐标，把向量用数表示出来，把向量的运算用数的运算表示出来。这样就可以用坐标法去讨论向量。

任取一个坐标系 $Oxyz$。它是由经过一个原点 O 的三个排定次序并且互相垂直的轴 Ox, Oy, Oz 组成的。在三条坐标轴上以 O 为起点依次取三个单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，并叫做坐标向量。

设空间直角坐标系中有一向量 $\boldsymbol{a}$，由于向量可以平移，我们把它的起点移到坐标原点，假定它的终点是 A，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$（图 1-12）。这时向量就被终点所决定。反过来，一个点 A 也确定一个向量 $\overrightarrow{OA}$。这就是说，原点 O 建立了点 A 与向量 $\boldsymbol{a}$ 之间的一一对应。点 A 的

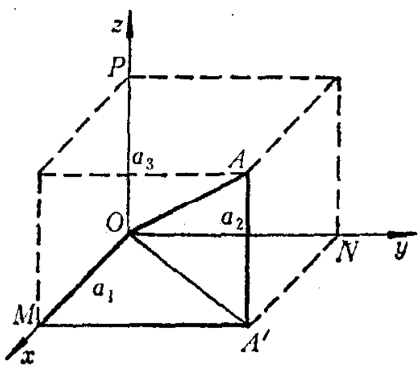


图 1-12

坐标就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，设点 A 的坐标为 (a_1, a_2, a_3)。则向量 $\boldsymbol{a}$ 记作 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$。由图易见

$$OM=a_1, ON=a_2, OP=a_3$$

点 A 的坐标可以用折线 $OMA'A$ 来确定，三个坐标依次表示折线三个边的长度和方向。由向量加法知，

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'A}$$

因 $\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{OP}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\\&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这就是向量用它的坐标表示的公式。

上式说明：空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以分解成三个坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 与实数 a_1、a_2、a_3 的乘积之和，其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的系数 a_1、a_2、a_3 恰为 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标。这样一来，空间中一个向量 $\boldsymbol{a}$ 有了两种表示方法：

$$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

从位移的角度看，后一种分解法意味着，空间中任一位移运动都可以看成是平行于三个坐标轴的三个位移运动的合成。设

$$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}, \boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$$

利用向量加法的交换律和结合律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$$

这就是说，两个向量之和的坐标等于它们对应的坐标之和。

对于数乘向量的运算则有

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\&=\lambda(a_1\boldsymbol{i})+\lambda(a_2\boldsymbol{j})+\lambda(a_3\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$$
$$=\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$$

自然地，对减法则有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}$$

这样，向量的加减运算与数乘运算就化为了它们的相应的坐标的运算，也就是化为了数的运算。

向量的模和方向余弦

向量已由它的坐标——三个有序数表示出来了。向量的主要特征是长度和方向，那么怎样用向量的坐标来表示它的长度和方向呢？任给一个向量，$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，从图 1-12 可以看出它的长度是

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(OM)^2+(ON)^2+(OP)^2}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

它的方向怎样表示呢？

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可以由这向量与三个坐标轴的夹角 α、β、γ 完全确定(图 1-13)。α、β、γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，并且规定

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

因为在图 1-13 所示的六面体的表面上，AP、AQ、AR 所在的三张平面分别垂直于 Ox、Oy、Oz 轴，因此直线 AP、AQ、AR 也分别垂直于 Ox、Oy、Oz 轴，即三角形 AOP、AOQ、AOR 都是直角三角形，于是 α、β、γ 与模 $|\boldsymbol{a}|$ 及向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标 a_1、a_2、a_3 的关系由

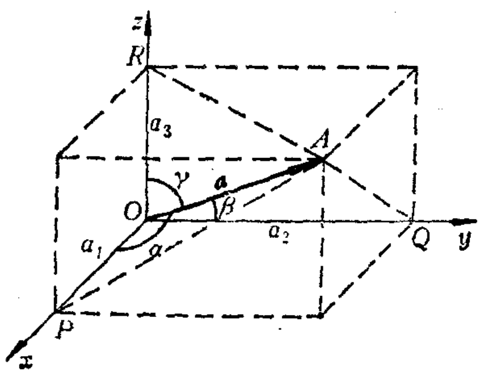


图 1-13