刘 林 曹艳平
王 婷 李娟飞 编著

应用模糊数学

YINGYONG MOHU SHUXUE

（第二版）

陕西科学技术出版社

应用模糊数学

（第二版）

刘　林　曹艳平
王　婷　李娟飞　编著

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用模糊数学/刘林等编著．—修订本．—西安：
陕西科学技术出版社，2008.2
ISBN 978-7-5369-2552-6
I.应… II.刘… III.模糊数学 IV.0159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 015343 号

出 版 者	陕西科学技术出版社
	西安北大街 131 号　邮编 710003
	电话(029)87211894　传真(029)87218236
	http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社
	电话(029)87212206　87260001
印　　刷	西安建筑科技大学印刷厂
开　　本	880mm×1230mm　1/32 开本
印　　张	7.75
字　　数	220 千字
版　　次	2008 年 3 月第 2 版
	2008 年 3 月第 1 次印刷
定　　价	18.00 元

前　言

自从 1965 年美国自动控制专家 L. A. Zadeh 提出用“Fuzzy Sets”(模糊集合)来描述模糊事物以来，近三十年，模糊数学显示了强大的生命力和广阔的发展前景，在自然科学和许多社会科学领域得到广泛应用。

模糊数学是用精确化的手段研究客观实际中带有模糊性的现象和活动。所谓模糊性，它不同于普遍性，普遍性是指一种可用来表达整个明确定义的现象和活动的特性。它也与随机性不同，随机性研究的活动与观察的对象是明确的，但由于条件的不充分，这些活动与现象在出现与否上是不明确的。而模糊性所表达的活动和现象本身就是不明确的。

模糊数学产生的最直接动力与系统科学的发展有着密切的关系。在多变量、非线性、时变的大系统中，复杂性与精确性形成了尖锐的矛盾。正如 Zadeh 指出的，当系统日益复杂时，人们对它的精确而有意义的描述的能力将相应地降低，以致于精确性与有意义成为了两个几乎互相排斥的特征。要想完全精确地描述复杂现象和系统，事实上是不可能的。我们必须在精确与简明之间取得平衡。模糊理论的提出正是为了用全新的比较简洁的方法对于复杂系统做出合乎实际的处理。固此模糊理论在自动控制、系统分析、知识描述、语言加工、图像识别、信息复制、人工智能、医学诊断、经济管理、生物工程，环境保护及心理学、哲学等不确定性科学领域有着广泛的实际应用价值。

模糊数学理论与电子计算机的发展有着“血缘”关系。现代计算机的计算速度与存贮能力几乎达到了无以伦比的程度。它不仅帮助工程师控制宇宙飞船，还可以帮助数学家解决一些长期悬而未决的问题——如四色问题。但计算机仍很难模拟人脑的思维。其原因，正如控制论创始人 Vechler 所说：“人具有运用模糊概念的能

力”。人脑善于判别和处理不精确的，非定量的模糊现象，并从中得出具有一定精度的结论。田此，我们必须研究具有模糊性事物的数学模型。应用这种模糊数学模型设计新型的具有模糊逻辑的计算机，或者编制出更深入、更广泛地模拟人的思维的程序。使计算机具有更高的智能，能处理更为复杂多变的情况提出的问题，更好地为人类服务。

本书是作者根据多年为研究生和计算机及自动控制专业本科生上课的教学实践，并按照目前的工科研究生课程教学要求在第一版的基础上，经多次修改和补充后写成的，同时也注意吸收当前同类教材的一些优点及本学科的前沿成果。本书力求从工程技术角度出发，突出基本理论、基本概念及它们在应用中常见的一些重要方法。考虑到工程技术人员和工科学生的特点，本书力求作到概念深入浅出，内容简明精练，特别注重实用的模糊数学方法，而不大追求理论形式的完美无缺。

刘林教授主持了本书的编写，全书的结构、章节的安排、内容的取舍，均出自于他多年教授模糊数学的讲稿。本书第1章、第2章和第3章由王婷编写，第4章、第5章和第6章由李娟飞编写，第7章、第8章和第9章由曹艳平编写，最后由曹艳平统稿。刘林教授又仔细阅读了全书，提出不少建设性的意见，并进一步作了文字的润色。

本书出版得到西安建筑科技大学研究生院和理学院的热情支持和帮助，作者在此向他们表示诚挚的谢意！

限于作者学识水平，书中错误和不妥之处敬请读者和同行专家，学者批评指正。

作　者

2008年1月于西安建筑科技大学

目　录

第 1 章　集合论基础

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学方法，模糊数学的最基本概念之一是模糊集合. 模糊集合概念是普通集合概念的推广. 因此，本章首先介绍学习模糊数学所必需的集合论基础知识.

本章的内容包括集合的概念和运算、关系和映射.

§1.1　集　合

集合是现代数学中一个最基本的概念. 人们是在实践中认识集合的. 例如，我们常遇到"某班全体同学的集合"，"所有自然数的集合"，"平面上所有四边形的集合"，"某线性方程组全部解的集合". 尽管我们没有严格定义什么是集合，但上述说法的意思大家都是明白的. 这表明集合是一个原始的概念，我们不能用一个更简单的概念来定义它. 对集合仅能给出一种描述.

所谓集合是指"具有某种特定性质的、确定的、可以区分的对象的总和". 构成集合的对象称为集合的元素或元. 通常我们用大写英文字母 A、B、…… 表示一个集合. 而用小写英文字母 a 、b 、…… 表示集合的元素. a 是集合 A 的元素时，记为 $a \in A$，称元素 a 属于集合 A；反之，元素 a 不属于集合 A 时，记为 $a \notin A$.

关于集合的概念很重要的一点是：对于任意给出的一个对象，应能够判定它是否是某个集合的元素. 元素 a 与集合 A 的从属关系只有两种可能，要么 $a \in A$，要么 $a \notin A$. 即集合具有"非此即彼"的性质. 例如："某校 95 级计算机专业的全体学生"是一个集合，而"该专业高个子的学生"则不是一个集合.

为了以后叙述的简洁，引用下列一些符号"$\forall x \in A$"表示"集合 A

中的所有元素 x”,“ $\exists x \in A$” 表示“集合 A 中存在一个元素 x”.

集合中所含元素的个数称为集合的基数,记为 $|A|$. 当集合 A 只含有限个元素时,称 A 为有限集. 否则称 A 为无限集. 特别地, A 是无限集,且 A 的元素可以与自然数集建立 $1-1$ 对应关系时,说 A 是可数集. 无限集的另一类型是不可数集. 例如,全体偶数的集合是可数集,而全体实数的集合是不可数集.

通常用下列两种方法来表示一个集合:

1　列举法

将一个集合的元素列举出来. 例如,小于 6 的全体正整数的集合可记为:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

当有限集的基数较大时,我们通常列举出集合的部分元素,并指明它们的特性. 例如,不大于 100 的全体正整数的集合可记为:

$$N = \{1,2,3,\cdots,99,100\}$$

这种办法可以推广到可数的无限集. 例如,自然数集可记为:

$$N = \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

2　描述法

用集合中元素的共性来描述一个集合. 通常的记法是:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

表示具有性质 P 的全部元素所组成的集合. 例如,平面上建立直角坐标系后,记

$$M = \{(x,y) \mid 2x + y = 4\}$$

是坐标满足方程 $2x + y = 4$ 的所有点的集合,它们位于这个平面的一条直线上.

世界万物之中研究的对象浩如烟海,千头万绪. 在考虑一个具体问题时,总是把研究的对象限制于某个范围之内. 这就产生了“论域”的概念. 论域是指所讨论范围内的全部对象的集合. 论域通常记为 U. 有时也称为全集. 例如,我们研究复系数代数方程的解时,论域是全体复数的集合. 我们研究平面多边形的面积时,论域是平面上全体多边形的集合.

下面讨论两个集合之间的关系.

定义 1.1　设 A,B 为集合,如果 B 中的每一个元素都是 A 中的元素,则称 B 为 A 的子集合,简称子集. 这时也说 A 包含 B,记为 $B\subseteq A$.

由定义直接得到 $B\subseteq A$ 的充分必要条件是:$\forall x\in B$ 可得 $\forall x\in A$,对任意集合 S 显然都有 $S\subseteq S$. 今后我们所讨论的集合都看为是某个论域的子集.

定义 1.2　设 A,B 为集合,如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

由以上定义可以知道,两个集合相等的充分必要条件是它们具有相同的元素.

定义 1.3　设 A,B 为集合,如果 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$,则称 B 是 A 的真子集,记作 $B\subset A$.

由定义可知,$B\subset A$ 的充要条件是 $\forall x\in B$ 有 $x\in A$,且至少 $\exists x_0\in A$ 有 $x_0\notin B$.

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$. 空集是客观存在的,例如,方程 $x^2+1=0$ 的实数解集就是空集 $\varnothing$. 因为该方程没有实数的解.

对任意集合 A 都有 $\varnothing\subseteq A\subseteq U$,这里 U 是某个论域. $\varnothing\subseteq A$ 可以这样证明:若 $\varnothing\subseteq A$ 不成立,则就应该 $\exists x\in\varnothing$,且 $x\notin A$,这与空集的定义矛盾.

一个集合的元素本身也可以是集合.

定义 1.4　设 A 为集合,由集合 A 的所有子集为元素所构成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$. 即

$$P(A)=\{S\mid S\subseteq A\}$$

例 1.1　设 $A=\{a,b,c\}$,则 A 的幂集是

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

上例中 $P(A)$ 含有 8 个元素. 一般地有,若 A 是含有 n 个元素的有限集,则 A 的幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个元素,即$\{P(A)\}=2^{|A|}$. 换而言之,含 n 个元素的集合 A 恰含有 2^n 个子集. 这里 $\varnothing$ 和 A 本身也是 A 的子集. 我们把结论的证明留给读者.

§1.2 集合的运算

给定集合 A,B 可以通过给定的运算产生新的集合. 这里 A,B 都是某个论域的子集,运算的结果仍是这个论域的子集,这就是所谓运算的封闭性.

定义 1.5 设 A,B 是论域 U 的两个子集,我们定义:

1 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$$

2 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$$

3 A 的补集,记作 $\overline{A}$,

$$\overline{A}=\{x\mid x\in U,\text{且 } x\notin A\}$$

由定义可得,A 与 B 的并集是由 A 与 B 的所有元素构成的集合. A 与 B 的交集是由 A 和 B 的公共元素构成的集合. 而 A 的补集是由论域 U 中不属于 A 的元素构成的集合.

例 1.2 设 $U=\{1,2,\cdots,9\},A=\{2,4,6,8\},B=\{6,7,8,9\}$. 则有

$$A\cup B=\{2,4,6,7,8,9\}$$
$$A\cap B=\{6,8\}$$
$$\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}$$

集合之间的相互关系和有关运算可以用文氏图(John Venn,1834—1883 年,英国数学家)形象地表示出来. 文氏图的做法是,用一个矩形表示论域 U,用矩形内的圆形区域表示 U 的子集. 用阴影部分显示集合或集合的运算. 图 1.1 就是一些文氏图的实例. 图中的阴影区域表示的是图下所标出的集合.

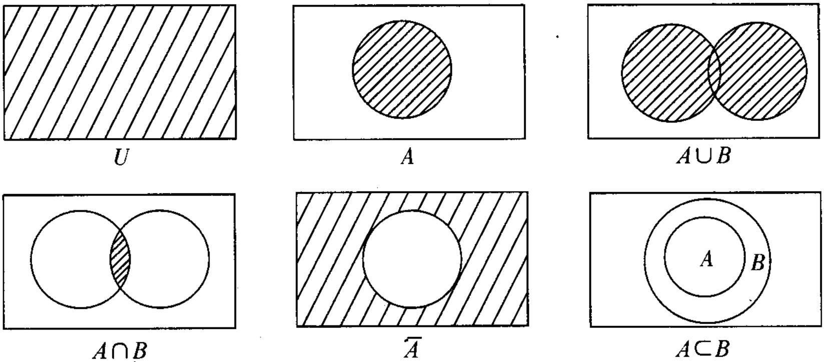

图 1.1

对于集合的并、交、补运算有如下基本运算法则.

1. 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.
2. 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. 幂等律　$A\cup A=A, A\cap A=A$.
4. 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.
5. 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
6. 互补律　$A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\varnothing$,
　　$A\cup U=U, A\cap U=A$.
7. 复原律　$(\overline{\overline{A}})=A$.
8. 0—1 律　$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.
9. 对偶律 (De Morgen 律)　$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$,
　　$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这里 A,B,C 是论域 U 的任意子集.

不难直接用定义直接证明这些法则的正确性. 因为方法雷同，这里只证两条.

证明　(1) 吸收律之一　$A\cup(A\cap B)=A$.

设 $x\in A\cup(A\cap B)\Rightarrow x\in A$，或 $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$，或($x\in A$，且 $x\in B$)$\Rightarrow x\in A$.

故 $A\cup(A\cap B)\subseteq A$.

反之,设 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup(A\cap B)$ 故 $A\subseteq A\cup(A\cap B)$.

因此得,$A\cup(A\cap B)=A$.

(2) 对偶律之二 $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$.

因为 $x\in(\overline{A\cap B})\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in\overline{A}$,或 $x\in\overline{B}\Leftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$,

故有
$$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

读者可以参照上面的方法给出其余运算法则的证明.

不难把两个集合的并与交运算推广到多个集合上. 与前类似地可定义:

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n=\{x\mid\exists i_0\in I,x\in A_{i0}\}$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n=\{x\mid\forall i\in I,x\in A_i\}$$

这里,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是论域 U 的子集. 指标集 $I=\{1,2,\cdots,n\}$.

多个集合的并与交运算的运算法则也与前面类似,请读者自行讨论.

除了本节所介绍的运算,两个集合还可以定义差、对称差等运算. 由于它们与模糊数学关系不十分密切,这里就不再介绍了.

§1.3 映 射

除了上节讨论的集合之间的运算外,我们还要进一步研究两个集合的元素之间的对应关系.

定义 1.6 给定集合 U,V,若存在一个对应法则 f,使集合 U 中每个元素 u 存在 V 中唯一的元素 v 与之对应,称这个对应法则 f 是从 U 到 V 的映射. 记作 $v=f(u)$,有时也记作 $f:U\to V$.

映射也称"函数"或"变换". 特别当 U 和 V 是通常的数集时,映射 f 就是通常意义的函数. 若 $v=f(u)$ 时,称 v 是映射 f 下元素 u 的象,而 u 称为 v 的原象. 集合 U 称为映射 f 的定义域,而集合 V 的子集

$$V_R=f(U)=\{v\mid v=f(u),u\in U\}$$

称为映射 f 的值域. 它是 U 中所有元素的象的集合. 在映射 f 下,集合

U 的每个元素 u 在 V 中有唯一的象与之对应，但是 V 中的元素 v 在 U 中却不一定都有原象. 也有可能 V 中的某个元素 v 在 V 中有几个不同的原象. 故有，

定义 1.7　若 f 是一个从 U 到 V 的映射，则

1　若 $f(U)=V$　称 f 为满射；

2　若 $f(u_1)=f(u_2)$ 时，则有 $u_1=u_2$，称 f 为单射；

3　若 f 既是满射又是单射，则称 f 为双射.

由定义知，若 f 是满射时，则 V 中每一个元素都有原象. 若 f 是单射时，则 U 中不同的元素有不同的象，即 $u_1 \neq u_2$ 时，有 $f(u_1) \neq f(u_2)$. 双射有时也称为 1－1 对应. 如果 U,V 都是有限集，那么只有当 U 中元素的个数不大于 V 中元素的个数，即 $|U| \leq |V|$ 时，$f:U \to V$ 才有可能是单射；只有当 $|U| \geq |V|$ 时，f 才有可能是满射；只有当 $|U| = |V|$ 时，才有可能是双射.

例 1.3　设 $U=\{a,b,c,d\}$，$V=\{2,3,5\}$　$f:U \to V$ 定义为：

$f(a)=2, f(b)=5, f(c)=3, f(d)=5$，则 f 的值域 $f(U)=\{2,3,5\}$，故 f 是满射. 可用右面的示意图表示映射 f.

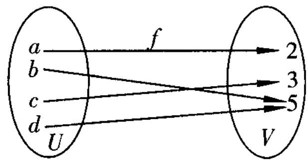

图 1.2

例 1.4　X 是全体整数集，Y 是全体正整数集. 设 $f:X \to Y$ 为：$y=f(x)=|x|+1$. 显然 f 是 X 到 Y 的满射，但 f 不是单射.

在很多问题中需要讨论映射的合成.

定义 1.8　设映射 $f:U \to V$，$g:V \to W$，定义映射 $h:U \to W$ 为 $\forall u \in U$ 有 $h(u)=g[f(u)]$，称 h 为 f 与 g 的合成映射. 记为：$h=g \cdot f$.

例 1.5　设 f 如上例 1.4 定义，集合 $W=\{x,y,z\}$，映射 $g:V \to W$ 定义为：$g(2)=y, g(3)=z, g(5)=x$，g 是双射. 合成映射 $h=g \cdot f$ 不难算出为：$h(a)=y, h(b)=x, h(c)=z, h(d)=x$，$h$ 是满射，可用图 1.3 表示.

映射的合成可以推广到多个映射的情况. 这因为有如下的结合律保证了映射合成的唯一性.

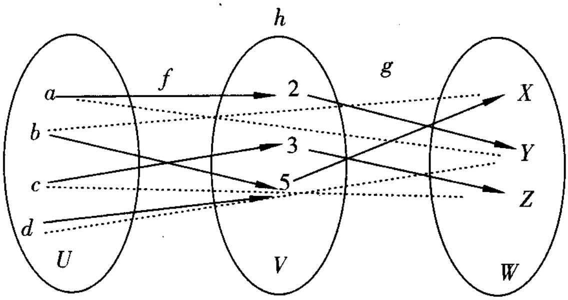

图 1.3

定理 1.1 设映射 $f:U\to V, g:V\to W, h:W\to X$ 则合成映射有:

$$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$$

证明 对任意的 $u\in U$,有

$[h\cdot(g\cdot f)](u)=h[(g\cdot f)(u)]=h(g(f(u)))=h\cdot g(f(u))=[(h\cdot g)\cdot f](u)$. 证毕.

故我们可以把 f,g,h 的合成映射,简记为 $h\cdot g\cdot f$,而不会产生歧意性. 特别地如果有 $f:U\to V$,则可以定义映射的幂. 例如:

$$f^3=f\cdot f\cdot f, f^5=f\cdot f\cdot f\cdot f\cdot f=f^2\cdot f^3$$

定理 1.2 设映射 $f:U\to V, g:V\to W$.

1 如果 f 和 g 都是满射,则 $g\cdot f$ 也是满射;

2 如果 f 和 g 都是单射,则 $g\cdot f$ 也是单射;

3 如果 f 和 g 都是双射,则 $g\cdot f$ 也是双射.

证明 1 设任意元素 $\omega\in W$,由于 g 是满射,因此 $\exists v\in V$,有 $g(v)=w$. 又由于 f 也是满射,故 $\exists u\in U$,使得 $f(u)=v$,于是有 $(g\cdot f)(u)=g(f(u))=g(v)=w$,即 w 有原象. 由 w 的任意性,故 $g\cdot f$ 是满射.

2 设 $u_i,u_j\in U$ 且 $u_i\neq u_j$,由于 f 是单射,因此 $f(u_i)\neq f(u_j)$;由于 g 也是单射,故又有 $g(f(u_i))\neq g(f(u_j))$,于是当 $u_i\neq u_j$ 时,得到 $(g\cdot f)(u_i)\neq(g\cdot f)(u_i)$,故 $g\cdot f$ 是单射.

3 由 1 和 2 的证明知 $g\cdot f$ 既是满射又是单射,故 $g\cdot f$ 是双射,证毕.

映射 f 建立了集合 U 与集合 V 的元素之间的对应关系. 推广一

下，还可以用映射 f 建立 U 的子集与 V 的子集之间的对应关系.

定义 1.9　设映射 $f:U\to V$，对于 U 的任意子集 $A\in P(U)$，定义 $f^*(A)=\{f(u)\mid u\in A\}$. 则 $f^*(A)$ 是 V 的子集. 映射 $f^*:P(U)\to P(V)$ 称为由映射 f 诱导出来的集射，或称为映射 f 的扩张. 通常把 f^* 也简记为 f.

定理 1.3　设映射 $f:P(U)\to P(V)$，$A,B\in P(U)$，则有

1　$A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$；

2　$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

3　$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

证明　我们只证 2，其余类似.

$v\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists u\in A\cup B$，且 $f(u)=v\Leftrightarrow u\in A$ 或 $u\in B$，且 $f(u)=v\Leftrightarrow f(u)\in f(A)$ 或 $f(u)\in f(B)$，即 $v\in f(A)$ 或 $v\in f(B)\Leftrightarrow v\in f(A)\cup f(B)$，即 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$，证毕.

再就(3)的包含情况举一个例子.

例 1.6　设 $v=\{1,2,3,4,5\}$，$V=\{a,b,c\}$

设 $A=\{1,2,3\}$；$B=\{3,4,5\}$，定义映射 $f:U\to V$ 为：

$f(1)=f(5)=a$，$f(2)=f(4)=b$，$f(3)=c$. 不难算出，

$f(A\cap B)=\{c\}$，而 $f(A)\cap f(B)=\{a,b,c\}$，由此得

$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

映射的逆也是一个重要概念. 我们有

定义 1.10　若映射 $f:U\to V$ 是一个双射，则可以定义映射 $f^{-1}:V\to U$，对 $\forall v\in V$ 有

$$f^{-1}(v)=u\Leftrightarrow f(u)=v$$

f^{-1} 称为 f 的逆映射. 这时称映射 f 是可逆的.

定理 1.4　设映射 $f:U\to V$ 是一个双射，其逆映射为 $f^{-1}:V\to U$，则

1　f^{-1} 也是双射；

2　$(f^{-1})^{-1}=f$；

3　$f^{-1}\cdot f=I_U$，$f\cdot f^{-1}=I_V$.

这里 I_U，I_V 分别是集合 U，V 上的恒等映射. 即 $I_U:U\to U$，$\forall u\in U$，