国家科学技术学术著作出版基金

地球黏性流体力学

Diqiu nianxing liuti lixue

孙荀英 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

地球黏性流体力学

孙荀英　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

地球黏性流体力学/孙荀英编著. —北京:北京大学出版社,2013.3
ISBN 978-7-301-21881-5

Ⅰ.①地… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①黏性流体-流体力学-应用-地球科学-高等学校-教材
Ⅳ.①O357 ②P

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 002467 号

书 名:地球黏性流体力学
著作责任者:孙荀英 编著
责 任 编 辑:王剑飞 尹照原
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-21881-5/P·0084
出 版 发 行:北京大学出版社
地 址:北京市海淀区成府路 205 号 100871
网 址:http://www.pup.cn
新 浪 微 博:@北京大学出版社
电 子 信 箱:zpup@pup.cn
电 话:邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765014
出版部 62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×1092mm 16 开本 18 印张 383 千字
2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
定 价:48.00 元

目　录

第 1 章　黏性流体力学的基本概念

§1.1　黏性流体的基本性质和假定

流体(包括液体和气体)与固体相比在性质上有许多不同,因此首先要认识流体的基本性质,以下是根据这些性质作出的一些假定,这将有助于我们对流体基本性质的了解.

一、流体的连续性性质

1. 密度是连续的,即从宏观上看流体介质连续地充满它所占据的空间.

2. 位移速度是连续的.

3. 变形速度是连续的.

二、流体的易流动性

1. 不论多么小的剪应力作用在流体上,都会使流体产生流动.

2. 外力不去除,流动就不止.

3. 流体变形无限制,但对变形速度有限制.而固体则不然,在剪应力作用下只有微小的变形,变形到一定程度后虽有外力亦不再变形.

三、流体的可压缩性

1. 流体只可承受压力,不能承受拉力.

2. 在同一压力作用下不同的流体体积改变的情况不一样,即可压缩性不同.

3. 不可压缩流体假定:当压力变化很大时体积不变化的流体叫做不可压缩流体.压缩性较小的流体可以当做不可压缩流体处理.不可压缩流体假定是相对的:当流体作低速流动时可以把此流体看做不可压缩的;但当该流体快速流动时却可以把它当做可压缩流体对待,比如固体炸药在爆炸时,甚至岩石在爆炸时都可以作为可压缩流体对待.

四、液体的黏性

黏性是反映流体与流体之间、流体与器壁之间摩擦力大小的物理量,前者为内摩擦,后者为外摩擦,两者均为湿摩擦.无黏性流体称为理想流体.

1. 黏性与运动状态有关:静止的流体只有静水压力(正压力),无黏性力.只有流动着的流体才有黏性力.

2. 湿摩擦与干摩擦的区别:湿摩擦是反映流体与流体之间或流体与固体之间摩擦的

物理量，它依赖于相对速度的大小，截面上总的湿摩擦力与截面积成正比. 干摩擦是固体与固体接触时在接触面上产生的摩擦力.

3. 黏性是与正压力有关的量.

4. 黏性是与温度有关的量，温度愈高黏度愈小. 一般来说，随着从地表向地心距离的加大，地球介质的黏性会有所变化：地壳岩石层的黏度最大，上地幔的黏度稍小些，下地幔黏度更小些，地心的黏度最小.

5. 由于无法直接获得地球深部的物质，因而无法准确测定地球深部介质间的摩擦力准确值；同样由于无法到达地球深部，也无法测定深部的温度值. 在研究地球动力学的时候只能根据地震波与温度、压力的关系，推测地球深部的温度、压力值. 在对地学问题的处理中，要根据不同问题作不同的处理. 在局部地壳中，可以根据问题研究的范围把岩石层看做连续的或分块连续的，如研究不带断裂的小构造时可以把研究范围内的岩石层当做完整的岩石层，进而当做密度连续的流体对待，又如在考虑有较大的断层时把局部地壳中的岩石层作为有间断的流体分块处理. 有些简单的构造问题可以用解析的方法进行求解，多数问题没有解析解，只能用数值方法进行求解.

在对全球地壳进行研究时，不能不考虑各个洋中脊、海沟及大的断裂带，因此就要把地壳岩石层考虑为分块连续的，即把每个板块考虑为连续的，而把洋中脊、海沟、大的断裂带作为间断面. 此外，压力、温度和黏度也都要随深度而变化.

§1.2　场论符号简介

一、标量、矢量(向量)、张量

1. 标量.

一个完全由实数值确定的物理量，或在更普遍的情况下由一个具有实数值的、空间点的函数值所确定的物理量，称为标量. 若标量与坐标系的选择无关，则称为绝对标量.

2. 矢量(向量).

既具有大小又具有方向的量定义为矢量(向量). 矢量的特点有：

(1) 可以用粗体字 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示不同的矢量(向量).

(2) 矢量(向量)沿着坐标轴的分量是标量，例如 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系下可以表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.2.1}$$

标量 a_x, a_y, a_z 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是坐标轴上的单位矢量(向量).

(3) 矢量(向量)的大小可用矢量(向量)的模表示.

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.2.2}$$

3. 张量.

(1) 一切张量都是由标量组所确定，这些标量称为张量的分量，相比之下标量只有一个

分量.

(2) 张量分量的基本性质用它们从一个坐标系到另一个坐标系的变换规律来表示，这个规律对一切张量都是一样的，而与它们的物理性质无关. 张量分量是非绝对的、可变的标量.

(3) 张量的阶等于变换公式右边各项相对于坐标量的变换系数，又等于其分量的指标之数目. 因此，绝对标量是零阶张量，矢量是一阶张量，在三维空间中 r 阶张量的分量总和等于 N，

$$N = 3^r. \tag{1.2.3}$$

(4) 过一点有无穷多个截面，每个截面上的应力都可以按三个坐标轴方向来分解；所有截面上的应力都可以用三个坐标平面上的应力来描述，而每个坐标平面上的应力又可以按坐标轴的方向分解.

因此所有应力的集合就是张量 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. 同样应变率也是张量 $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. 在均匀各向同性物体中，应力张量在直角坐标系下的写法：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.2.4}$$

还可以写成下面的形式：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{p}_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{p}_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{p}_z\boldsymbol{k}, \tag{1.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_x = \sigma_{xx}\boldsymbol{i} + \tau_{xy}\boldsymbol{j} + \tau_{xz}\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{p}_y = \tau_{yx}\boldsymbol{i} + \sigma_{yy}\boldsymbol{j} + \tau_{yz}\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{p}_z = \tau_{zx}\boldsymbol{i} + \tau_{yz}\boldsymbol{j} + \sigma_{zz}\boldsymbol{k}.$$

在直角坐标系下应变率张量的写法：

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.2.6}$$

还可以写成下面的形式：

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{q}_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{q}_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{q}_z\boldsymbol{k},$$

其中

$$\boldsymbol{q}_x = \dot{\varepsilon}_{xx}\boldsymbol{i} + \dot{\varepsilon}_{yx}\boldsymbol{j} + \dot{\varepsilon}_{zx}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.7a}$$
$$\boldsymbol{q}_y = \dot{\varepsilon}_{yx}\boldsymbol{i} + \dot{\varepsilon}_{yy}\boldsymbol{j} + \dot{\varepsilon}_{zy}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.7b}$$
$$\boldsymbol{q}_z = \dot{\varepsilon}_{zx}\boldsymbol{i} + \dot{\varepsilon}_{zy}\boldsymbol{j} + \dot{\varepsilon}_{zz}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.7c}$$

$\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_z, \boldsymbol{q}_x, \boldsymbol{q}_y, \boldsymbol{q}_z$ 都是矢量.

二、梯度、散度、旋度

1. 梯度.

用 grad 表示，也可以用符号 ∇ 表示，即

$$\mathrm{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{1.2.8}$$

标量的梯度是矢量：如果 A 是一个标量，则 A 的梯度是矢量，

$$\nabla A = \left(\frac{\partial}{\partial x}A,\frac{\partial}{\partial y}A,\frac{\partial}{\partial z}A\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}A\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}A\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.9}$$

矢量的梯度是二阶张量：张量可以看做分量为矢量的量. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个矢量，

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}, \tag{1.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是固定的三个直角坐标标架上的单位矢量，则 $\boldsymbol{A}$ 的梯度是

$$\nabla \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x},\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y},\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.11}$$

其中$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x},\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y},\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}$都是矢量，

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.12a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.12b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{1.2.12c}$$

合起来 $\nabla \boldsymbol{A}$ 也可以写成如下形式：

$$\nabla \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.13}$$

2. 散度.

散度用 div 表示，也可以用符号 $\nabla\cdot$ 表示，即

$$\mathrm{div} = \nabla\cdot = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.2.14}$$

矢量的散度是标量. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个矢量，则其散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{1.2.15}$$

张量的散度是矢量. 例如应力是张量，它的散度是矢量. $\boldsymbol{p}_x$ 是法向为 x 的坐标平面上之应力，$\boldsymbol{p}_y$，$\boldsymbol{p}_z$ 亦然.

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}\boldsymbol{i} + p_{xy}\boldsymbol{j} + p_{xz}\boldsymbol{k}) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}\boldsymbol{i} + p_{yy}\boldsymbol{j} + p_{yz}\boldsymbol{k}) + \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}\boldsymbol{i} + p_{zy}\boldsymbol{j} + p_{zz}\boldsymbol{k})$$

$$= \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\boldsymbol{k}\right) + \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\boldsymbol{k}\right) + \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.16}$$

3. 旋度.

旋度用 rot 表示,也可以用符号 $\nabla\times$表示,即

$$\mathrm{rot} = \nabla\times = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.17}$$

矢量的旋度仍然是矢量,如 $\boldsymbol{A}$ 是一个矢量,则

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.18}$$

张量的旋度是张量,如 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 是一个张量,$\boldsymbol{p}$ 是一个矢量,$\boldsymbol{p} = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}$,则

$$\nabla\times\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial p_x}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.19}$$

4. 矢量与矢量点乘为标量.如果

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.2.20}$$

5. 矢量与矢量叉乘为矢量,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

上述公式是由 3×3 的行列式得来:第一行三个元素分别是 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,第二行分别是 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量,第三行分别是 $\boldsymbol{b}$ 的三个分量,将行列式展开即是叉乘的乘积.

§1.3　分析流体运动的两种方法

分析流体运动可以用两种方法：一种是拉格朗日方法，另一种是欧拉方法. 欧拉方法还可以用场论的符号来描述.

一、拉格朗日方法

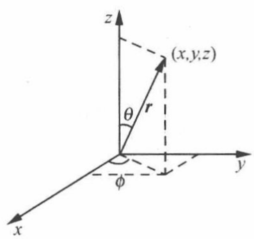

图 1.3.1　拉格朗日法的坐标系

该方法着眼于流体的每个质点，将物体运动看做质点系的运动. 在用直角坐标系（此坐标系是固定的、不随时间变化的）时，假如开始时质点的坐标是(a,b,c)，在运动过程中 t 时刻该质点的位置为(x,y,z)，参见图 1.3.1，此位置可以用下述表达式描述：

$$x = f_1(a,b,c,t), \tag{1.3.1a}$$

$$y = f_2(a,b,c,t), \tag{1.3.1b}$$

$$z = f_3(a,b,c,t). \tag{1.3.1c}$$

若时间为零时质点的坐标为 x_0, y_0, z_0，则

$$x_0 = a = f_1(a,b,c,0), \tag{1.3.2a}$$

$$y_0 = b = f_2(a,b,c,0), \tag{1.3.2b}$$

$$z_0 = c = f_3(a,b,c,0). \tag{1.3.2c}$$

如果用矢量来表示质点的位置：从坐标原点到质点(x,y,z)的矢量为 $\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$，进而可以建立质点的位置矢量与质点的坐标以及时间的关系：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a,b,c,t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = f_1(a,b,c,t)\boldsymbol{i} + f_2(a,b,c,t)\boldsymbol{j} + f_3(a,b,c,t)\boldsymbol{k}. \tag{1.3.3}$$

质点的速度（矢量）

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(a,b,c,t) = v_1(a,b,c,t)\boldsymbol{i} + v_2(a,b,c,t)\boldsymbol{j} + v_3(a,b,c,t)\boldsymbol{k}, \tag{1.3.4}$$

其中分量

$$v_1(a,b,c,t) = \frac{\partial x}{\partial t}, \tag{1.3.5a}$$

$$v_2(a,b,c,t) = \frac{\partial y}{\partial t}, \tag{1.3.5b}$$

$$v_3(a,b,c,t) = \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{1.3.5c}$$

质点的加速度（矢量）

$$\boldsymbol{a} = a_1(a,b,c,t)\boldsymbol{i} + a_2(a,b,c,t)\boldsymbol{j} + a_3(a,b,c,t)\boldsymbol{k}, \tag{1.3.6}$$

其中分量

$$a_1(a,b,c,t)=\frac{\partial v_1(a,b,c,t)}{\partial t},\tag{1.3.7a}$$

$$a_2(a,b,c,t)=\frac{\partial v_2(a,b,c,t)}{\partial t},\tag{1.3.7b}$$

$$a_3(a,b,c,t)=\frac{\partial v_3(a,b,c,t)}{\partial t}.\tag{1.3.7c}$$

二、欧拉方法

该方法着眼于流场中的每一个空间点(x,y,z)，参见图1.3.2，研究流过此点处的流体运动随时间的变化. 流场坐标轴上的单位矢量为$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$，流场空间点的坐标用$(x_1,x_2,x_3,t)$表示，其中$t$表示时间. 速度用$\boldsymbol{v}$表示，速度的分量用$v_1(x_1,x_2,x_3,t)$，$v_2(x_1,x_2,x_3,t)$，$v_3(x_1,x_2,x_3,t)$表示，压力用$p$表示，密度用$\rho$表示.

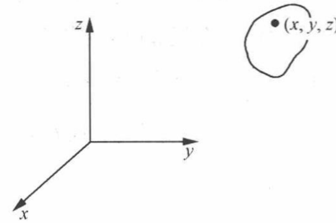

图 1.3.2　欧拉法的坐标

1. 加速度用$\boldsymbol{a}$表示. 加速度分量用$\boldsymbol{a}_1(x_1,x_2,x_3,t)$，$\boldsymbol{a}_2(x_1,x_2,x_3,t)$，$\boldsymbol{a}_3(x_1,x_2,x_3,t)$表示.

2. 速度可以用速度分量表示为

$$\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3,t)=v_1(x_1,x_2,x_3,t)\boldsymbol{i}_1+v_2(x_1,x_2,x_3,t)\boldsymbol{i}_2+v_3(x_1,x_2,x_3,t)\boldsymbol{i}_3.\tag{1.3.8}$$

3. 速度的分量

$$v_1(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\partial x_1}{\partial t},\tag{1.3.9a}$$

$$v_2(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\partial x_2}{\partial t},\tag{1.3.9b}$$

$$v_3(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\partial x_3}{\partial t}.\tag{1.3.9c}$$

4. 引进拉姆参量H_1,H_2,H_3，进而可以把速度写成

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{3}H_k v_k(x_1,x_2,x_3,t)\boldsymbol{i}_k,\quad k=1,2,3.\tag{1.3.10}$$

(1) 对于笛卡儿坐标系(直角坐标系)：

$$H_1=H_2=H_3=1.\tag{1.3.11}$$

(2) 对于圆柱坐标系：

$$H_1=1,\quad H_2=r,\quad H_3=1.\tag{1.3.12}$$

(3) 对于圆球坐标系：

$$H_1=1,\quad H_2=r,\quad H_3=r\sin\theta.\tag{1.3.13}$$

5. 压力

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t). \tag{1.3.14}$$

6. 密度

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t). \tag{1.3.15}$$

7. 在笛卡儿坐标系中加速度

$$\boldsymbol{a} = a_1(x_1, x_2, x_3, t)\boldsymbol{i}_1 + a_2(x_1, x_2, x_3, t)\boldsymbol{i}_2 + a_3(x_1, x_2, x_3, t)\boldsymbol{i}_3. \tag{1.3.16}$$

8. 加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的关系是

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \partial\boldsymbol{v}/\partial t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \tag{1.3.17}$$

其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 代表质点的全加速度，也叫质点的加速度；$\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 代表质点当地（局部）的加速度，它代表流场的不定场性；$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 是质点的迁移（也叫随流）加速度，它代表流场的不均匀性. 在笛卡儿坐标系下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = &\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_3,\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = &\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}_3.\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

写成分量的形式为

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}, \tag{1.3.20a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}, \tag{1.3.20b}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}. \tag{1.3.20c}$$

又可以缩写成

$$\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad k = 1,2,3, \tag{1.3.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}H_i\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\right]\boldsymbol{i}_k. \tag{1.3.22}$$

对于任意量 $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3, t)$ 其全微商等于局部微商加随流微商. 即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}, \tag{1.3.23}$$

其中$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$是局部微商，$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$ 是随流微商. 引进拉姆参量 H_1, H_2, H_3，进而可以把加速度写成

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} H_i \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\right]\boldsymbol{i}_k. \tag{1.3.24}$$

§1.4 流团的应变率张量、涡矢量分析

一、流团的应变率张量

流团的应变率分为平行于坐标轴的伸长应变率与平行于坐标面的剪切应变率.

1. 在笛卡儿坐标系下的应变率.

x 方向的伸长应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.4.1a}$$

y 方向的伸长应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta y}{y_0}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.4.1b}$$

z 方向的伸长应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta z}{z_0}\right) = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.4.1c}$$

流动前后两坐标平面夹角随时间的变化率叫做剪切应变率. 在笛卡儿坐标系下：

xy 夹角的剪切应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{y_0} + \frac{\Delta y}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{1.4.2a}$$

yz 夹角的剪切应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{z_0} + \frac{\Delta z}{y_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{1.4.2b}$$

zx 夹角的剪切应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta z}{x_0} + \frac{\Delta x}{z_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1.4.2c}$$

2. 在正交曲线坐标下的应变率.

(1) 正交曲线坐标为(q_1, q_2, q_3)，坐标线的线元为

$$\delta S_1 = H_1 \delta q_1, \tag{1.4.3a}$$

$$\delta S_2 = H_2 \delta q_2, \tag{1.4.3b}$$

$$\delta S_3 = H_3 \delta q_3, \tag{1.4.3c}$$

其中 H_1, H_2, H_3 是拉姆参量.

(2) 速度矢量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(v_1, v_2, v_3, t)$ 的分量也可以用曲线坐标表示为

$$v_1 = H_1 \mathrm{d}q_1, \tag{1.4.4a}$$

$$v_2 = H_2 \mathrm{d}q_2, \tag{1.4.4b}$$

$$v_3 = H_3 \mathrm{d}q_3. \tag{1.4.4c}$$

3. 应变率张量.

应变率是一个张量,用 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表示,$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是一个 3×3 的对称张量,因此它应有九个分量,当流体是均匀、各向同性的,应变率就由九个分量变成六个分量.

(1) 在正交曲线坐标系下坐标轴线元的平方可以表示为

$$\delta S^2 = \sum_{k=1}^{3} H_k^2 \delta q_k^2. \tag{1.4.5}$$

质点应变率的表达式分别为:

正应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \sum_{j=1}^{3} \frac{v_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} + \frac{\partial \left(\dfrac{v_j}{H_j} \right)}{\partial q_j}, \quad i = 1,2,3. \tag{1.4.6}$$

二倍剪切应变率为

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{H_i}{H_j} \frac{\partial \left(\dfrac{v_i}{H_i} \right)}{\partial q_j} + \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial \left(\dfrac{v_j}{H_j} \right)}{\partial q_i}, \quad i,j = 1,2,3. \tag{1.4.7}$$

(2) 在笛卡儿坐标系中,因为 $H_1=H_2=H_3=1$,坐标轴线元的平方可以表示为

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.4.8}$$

正应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.4.9a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1.4.9b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.4.9c}$$

剪切应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{1.4.10a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tag{1.4.10b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \tag{1.4.10c}$$

(3) 在圆柱坐标系中,坐标用(r, ϕ, z)表示,坐标轴线元的平方可以表示为

$$\delta S^2 = \delta r^2 + r^2\delta\phi^2 + \delta z^2. \tag{1.4.11}$$

质点应变率的表达式分别为

正应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{1.4.12a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}, \tag{1.4.12b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{1.4.12c}$$

二倍剪切应变率为

$$2\dot{\varepsilon}_{r\phi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial(v_\phi/r)}{\partial r}\right), \tag{1.4.13a}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{\phi z} = \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}, \tag{1.4.13b}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}. \tag{1.4.13c}$$

(4) 在圆球坐标系中,坐标用(r,ϕ,θ)表示,坐标轴线元的平方可以表示为

$$\delta S^2 = \delta r^2 + r^2\delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\delta\phi^2. \tag{1.4.14}$$

质点应变率的表达式分别为:

正应变率为

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{1.4.15a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}, \tag{1.4.15b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}. \tag{1.4.15c}$$

二倍剪切应变率为

$$2\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}, \tag{1.4.16a}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{\theta\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi\cot\theta}{r}, \tag{1.4.16b}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{\phi r} = \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}. \tag{1.4.16c}$$

二、涡矢量与流体速度、应变率的关系

1. 流体涡矢量.

流体涡矢量的定义为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v}. \tag{1.4.17}$$

涡矢量在笛卡儿坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}[\omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}], \tag{1.4.18}$$

其中

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{1.4.19a}$$

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{1.4.19b}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.4.19c}$$

涡矢量在圆柱坐标系中的分量可以表示为

$$\omega_r = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial z}\right], \tag{1.4.20a}$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \tag{1.4.20b}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right]. \tag{1.4.20c}$$

涡矢量在圆球坐标系中的分量可以表示为

$$\omega_r = \frac{1}{2r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial (v_\phi r\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial \phi}\right], \tag{1.4.21a}$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2r\sin\theta}\left[\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (v_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right], \tag{1.4.21b}$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]. \tag{1.4.21c}$$

2. 涡矢量与流体速度、应变率的关系.

(1) 在笛卡儿坐标系中任意点、任意时间即(x,y,z,t)处流体速度的各分量可以写成

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) = {} & u(x_0,y_0,z_0,t_0) + \dot{\varepsilon}_{xx}|_{t_0=0}\Delta x + \dot{\varepsilon}_{xy}|_{t_0=0}\Delta y + \dot{\varepsilon}_{xz}|_{t_0=0}\Delta z \\ & + \omega_y|_{t_0=0}\Delta z - \omega_z|_{t_0=0}\Delta y, \end{aligned} \tag{1.4.22a}$$

$$\begin{aligned} v(x,y,z,t) = {} & v(x_0,y_0,z_0,t_0) + \dot{\varepsilon}_{yy}|_{t_0=0}\Delta x + \dot{\varepsilon}_{yx}|_{t_0=0}\Delta y + \dot{\varepsilon}_{yz}|_{t_0=0}\Delta z \\ & + \omega_z|_{t_0=0}\Delta x - \omega_x|_{t_0=0}\Delta z, \end{aligned} \tag{1.4.22b}$$

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) = {} & w(x_0,y_0,z_0,t_0) + \dot{\varepsilon}_{zz}|_{t_0=0}\Delta x + \dot{\varepsilon}_{zx}|_{t_0=0}\Delta y + \dot{\varepsilon}_{zy}|_{t_0=0}\Delta z \\ & + \omega_x|_{t_0=0}\Delta y - \omega_y|_{t_0=0}\Delta x, \end{aligned} \tag{1.4.22c}$$

其中(x_0,y_0,z_0,t_0)是在开始时流体质点的位置；$\dot{\varepsilon}_{xx}|_{t_0=0}$，$\dot{\varepsilon}_{yy}|_{t_0=0}$，$\dot{\varepsilon}_{zz}|_{t_0=0}$，$\dot{\varepsilon}_{xy}|_{t_0=0}$，$\dot{\varepsilon}_{yz}|_{t_0=0}$，$\dot{\varepsilon}_{zx}|_{t_0=0}$是$t_0=0$时，在$(x_0,y_0,z_0)$处的流体质点应变率张量的六个分量；$\omega_x|_{t_0=0}$，$\omega_y|_{t_0=0}$，