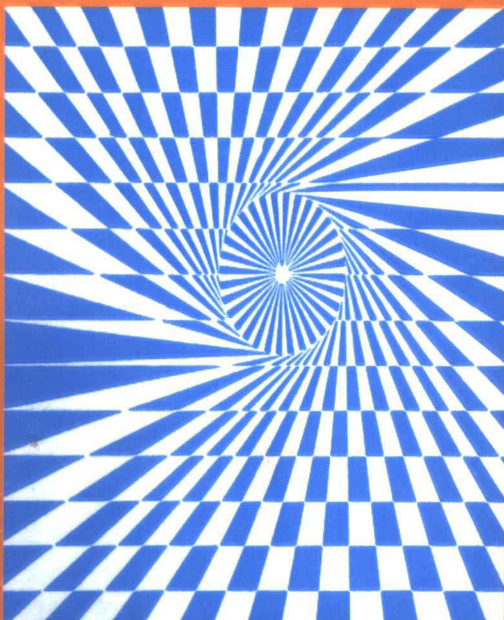
北京大学数学丛书

代数学

下册

莫宗坚　蓝以中　赵春来　著



北京大学出版社

北京大学数学丛书

代　　数　　学

下　册

莫宗坚　蓝以中　赵春来　著

北京大学出版社

内 容 提 要

本书为《代数学》下册，主要讲述交换代数的基本知识，内容包括环论、赋值论、Dedekind整环及同调代数。这些都是交换代数的精华内容，是学习代数几何、代数数论等现代数学必备的基础。

本书内容丰富，直观性强，推理自然，解释详尽。本书的独到之处是特别注重对于交换代数的背景以及与其他学科的联系的介绍。书中精选了大量的例题与习题。

本书可作为高等学校数学专业研究生教材，也可供数学工作者参考。

书　　名：代数学（下册）
著作责任者：莫宗坚　等著
责 任 编 辑：邱淑清
标 准 书 号：ISBN 7-301-01372-8/O・223
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：北京大学印刷厂
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　9.375 印张　236 千字
1986 年 12 月第一版　1999 年 7 月第二次印刷
定　　价：12.80 元

符 号 说 明

$\mathbf{A}^n$	n 维仿射空间
$\mathbf{P}^n$	n 维射影空间
B_i	i 阶边缘
B^i	i 阶上边缘
$C(S)$	环 S 的因子类群
(C, d)	边缘算子为 d 的复合形 C
$\dim R$	环 R 的维数
D.V.R.	(一秩)离散赋值环
$\mathscr{D}_{T/R}$	T 对 R 的表差式
$e(w/v)$(简记 e)	赋值 w 对 v 的缩分歧指数
emb-dim S	诺德局部环 S 的嵌入维数
$f(w/v)$(简记 f)	赋值 w 对 v 的相对次数(剩余次数)
g	亏格
gl dim R	环 R 的整体维数
$G_I(R)$	环 R 的与理想 I 相伴的分次环
$G_I(M)$	模 M 的与理想 I 相伴的分次模
G_Z	分解群
G_T	惯性群
$\mathrm{ht}(I)$	理想 I 的高度
$H_i(C)$	复合形 C 的 i 阶同调模
$H^i(C)$	复合形 C 的 i 阶上同调模
inj.dim M	模 M 的内射维数
$\sqrt{I}$	理想 I 的根理想
$\mathscr{I}(B)$	$\mathbf{A}^n$ 的子集 B 的理想，或 Spec S 的闭集 B 中所有素理想的交

$K[[x_1,x_2,\cdots]]$	域K上的形式幂级数环
$K((x_1,x_2,\cdots))$	$K[[x_1,x_2,\cdots]]$的比域
$K\{\{x_1,x_2,\cdots\}\}$	赋值域K上的收敛幂级数环
length(M)	模M的长度
m_v	赋值v的极大理想
mspec S	环S的极大谱集
$M\otimes_R N$	R模M和N的张量积
nil rad(S)	环S的幂零根理想
proj.dim M	模M的投射维数
$P(M,t)$	模M的Poincaré 级数
rad(S)	环S的Jacobson 根理想
rank v	赋值v的秩
res-dim$_k$ v	k赋值v对k的剩余维数
R_v	赋值v的赋值环
$R[[x_1,x_2,\cdots]]$	环R上的形式幂级数环
Spec S	环S的素谱集
S_D	环S对分母系D的局部化环
$S_{\mathfrak{p}}$	环S对素理想$\mathfrak{p}$的局部化环
v	赋值
v_p	p-adic 赋值
Z_i	i阶闭链
Z^i	i阶上闭链
$\delta_{T/R}$	T对R的判别式

下 册 目 录

第六章 环 论

§1 环的局部化

本书所说的环都是有幺元的交换环。读者请参考第三章§ 2关于“比域”的讨论，特别是定义 3.7 中提出了“局部化环”的概念。在那里，我们假定了S是一整环，在本节中，我们将讨论一般环的情形。

定义6.1 设S为一环。S的一个非空子集D如果适合下列条件：

1) $0 \overline{\in} D$；

2) $d_1, d_2 \in D \Longrightarrow d_1 \cdot d_2 \in D$，

则称之为一**分母系**。

讨论 类似于定义 3.7，我们想要定义s/d，这里$s \in S$，$d \in D$。自然的，就像从整数环$\boldsymbol{Z}$引出有理数域$\boldsymbol{Q}$的情形一样，我们要求

$$\frac{s_1}{d_1}+\frac{s_2}{d_2}=\frac{s_1 d_2+s_2 d_1}{d_1 d_2}, \quad \frac{s_1}{d_1} \cdot \frac{s_2}{d_2}=\frac{s_1 s_2}{d_1 d_2}.$$

麻烦的问题是$d \in D$可能是一个零因子，即有$s \in S$，$s \neq 0$，但$sd=0$。则我们不免得出下面的自相矛盾的算式：

$$s=s \cdot 1=s \cdot\left(d \cdot \frac{1}{d}\right)=(s \cdot d) \frac{1}{d}=0 \cdot \frac{1}{d}=0.$$

解决之道，是通过商环的步骤，消除这个难点。请见下定理。

定理6.1 令D为环S的一个分母系。又令

$$I=\{s: s \in S, \text{存在一个} d \in D, \text{使} sd=0\}.$$

则有

1) I是S的一个理想；

2) 令 σ: $S \to S/I$ 为典型映射，则 $\sigma(D)$是S/I的一个分母系，而且，如果 $\sigma(s)\sigma(d)=0$，必有 $\sigma(s)=0$，此处 $d\in D$。

证明 1) 如果 $s_1, s_2 \in I$，则有 $d_1, d_2 \in D$，使

$$s_1 d_1 = 0, \quad s_2 d_2 = 0.$$

显然立得

$$(s_1 \pm s_2) d_1 d_2 = 0,$$

$$(s\, s_1) d_1 = s(s_1 d_1) = s \cdot 0 = 0, \quad \forall s \in S.$$

于是 I 是理想。

2) 显然，$\sigma(d_1)\sigma(d_2)=\sigma(d_1 d_2)\in\sigma(D)$。又如果 $0=\sigma(d)\in\sigma(D)$，立得 $d\in I$，即存在 $d_1\in D$，使 $0=dd_1\in D$。这与D的性质不合，所以 $0 \overline{\in} \sigma(D)$。因此 $\sigma(D)$ 是一个分母系。

现设 $\sigma(s)\sigma(d)=0$，则 $\sigma(sd)=0$，即 $sd\in I$。故必存在$d_1\in D$，使 $s(dd_1)=(sd)d_1=0$。立得 $s\in I$，即 $\sigma(s)=0$。 ▎

讨论 从上面的定理，我们知道：给定一个分母系D以后，我们从环S转移到环S/I来考虑，则$\sigma(D)$中没有零因子。因此，零因子所产生的难点也即消失。

定义6.2 设S是环，D是分母系。令I,σ如定理6.1所设。又令 $S'=S/I$，$D'=\sigma(D)$。则我们定义S对D的**局部化环** S_D为下面的集合

$$S_D = S'_{D'} = \left\{ \frac{s'}{d'} : s' \in S',\ d' \in D' \right\},$$

及其运算规则

$$\frac{s'_1}{d'_1} + \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 d'_2 + s'_2 d'_1}{d'_1 d'_2},$$

$$\frac{s'_1}{d'_1} \cdot \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 s'_2}{d'_1 d'_2}, \qquad \frac{s'_1 d'_2}{d'_1 d'_2} = \frac{s'_1}{d'_1}.$$

又如果 $s'=\sigma(s)$，$d'=\sigma(d)$，则定义

$$\frac{s}{d} = \frac{s'}{d'}.$$

讨论 1) 如果S为整环，则定义6.2与定义3.7相同。

2) 对于分母系的规定，我们也可以取消$0 \overline{\in} D$的限制。自然，如果$0 \in D$时，$S_D = 0$。

例1 令$S = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$，$D = \{(n, 0): n \neq 0\}$。则显然$D$是一个分母系。此时，不难看出

$$I = \{(0, m): m \in \boldsymbol{Z}\},$$

$$S/I \approx \boldsymbol{Z}, \quad \sigma(D) = \{n: n \neq 0\}.$$

于是，我们得出$S_D \approx \boldsymbol{Q}$。 ▎

我们任取$s \in S$，一般可以考虑

$$s \mapsto \sigma(s) \mapsto \frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}.$$

这样把S的元素s，认同为S_D的元素$\dfrac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}$。例如，在例1中，把元素$(n, m)$认同为$n/1 = n$。显然，这个认同映射不是单射。

在下面的讨论中，我们将证明，环的局部化法与取商环法，是可以交换的。

定理6.2 设S是环，D是分母系，J是S的理想，$D \cap J = \varnothing$。令$\tau: S \to S_D$是认同映射。再令$J' = \tau(J) \cdot S_D$，即J'是J的元素在认同映射下的象所生成的理想。又令$\pi: S \to S/J$是典型映射。则恒有

$$\pi(S)_{\pi(D)} \approx S_D/J'.$$

证明 我们先要说明上面的式子是有意义的。换句话说，$\pi(D)$是$\pi(S)$的分母系。事实上，因为$D \cap J = \varnothing$，自然$0 \overline{\in} \pi(D)$。又有$\pi(d_1)\pi(d_2) = \pi(d_1 d_2) \in \pi(D)$ ($\forall d_1, d_2 \in D$)，所以$\pi(D)$是一个分母系。

我们定义一个映射α如下：

$$\alpha: \pi(S)_{\pi(D)} \to S_D/J',$$

$$\alpha\left(\frac{\pi(s)}{\pi(d)}\right) = \frac{s}{d} + J'.$$

请读者自行证明，这确实是个单满映射，故为同构。 ∎

我们常见的局部化环，是取$D=S\backslash\mathfrak{p}$，此处$\mathfrak{p}$是$S$的一个素理想。请注意，按照素理想的定义，我们有

$$ab\in\mathfrak{p}\implies a\in\mathfrak{p}\text{ 或 }b\in\mathfrak{p},$$

也即

$$a\notin\mathfrak{p},\ b\notin\mathfrak{p}\implies ab\notin\mathfrak{p},$$

$$a\in D,\ b\in D\implies ab\in D,$$

因此，$D=S\backslash\mathfrak{p}$确是一个分母系。

符号 设$D=S\backslash\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}$是素理想，则我们用$S_\mathfrak{p}$表示$S_D$。又设$J\subset S$，$\tau:S\to S_\mathfrak{p}$是认同映射，则我们用$JS_\mathfrak{p}$表示$\tau(J)S_\mathfrak{p}$，即由$\tau(J)$生成的理想。

例2 令$S=\mathbf{C}[x,y]$，$\mathfrak{p}=(x-a,y-b)$，则有

$$S_\mathfrak{p}=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}:f,g\in S,\ g(a,b)\neq 0\right\}.$$

不难看出，$S_\mathfrak{p}$即是在点(a,b)有定义的有理函数的集合。

又令$R=\{(f(x),g(y)):f,g\in S,\ f(0)=g(0)\}$，即定义在$x$轴及$y$轴上的多项式组(任何一组中的两个多项式在原点取值相等)的集合。令$\mathfrak{q}=\{(xf(x),yg(y))\}$，则有

$$R_\mathfrak{q}=\left\{\left(\frac{f(x)}{r(x)},\frac{g(x)}{s(x)}\right):r(0)\neq 0,\ s(0)\neq 0,\ \frac{f(0)}{r(0)}=\frac{g(0)}{s(0)}\right\}.$$

不难看出，$R_\mathfrak{q}$即是在原点有定义的x轴及y轴上的有理函数组(每组中的两个有理函数在原点取值相等)的集合。

定义6.3 设环S中只有唯一的极大理想$\mathfrak{m}$，则称S为**局部环**。

讨论 定理3.23中已经证明，在任意环S中必有一极大理想。在局部环的定义中，我们强调只有唯一的极大理想。

定理6.3 1) 环S是局部环$\iff J=\{s\in S:s\text{ 非可逆元}\}$是一个理想。于是$J$是$S$的唯一的极大理想；

2) 设$\mathfrak{p}$是环S的素理想，则$\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$是$S_\mathfrak{p}$的唯一的极大理想。

于是$S_\mathfrak{p}$是局部环。

证明 1) $\Longrightarrow$. 令$\mathfrak{m}$是S的极大理想，则显然$\mathfrak{m}=J$.

$\Longleftarrow$. 任取理想$I\neq S$，显然有$I\subset J$. 于是J是S的唯一的极大理想。

2) 令$s/d\in S_\mathfrak{p}$，其中$d\overline{\in}\mathfrak{p}$. 显然

$$\frac{d}{s}\in S_\mathfrak{p} \Longleftrightarrow s\overline{\in}\mathfrak{p}.$$

所以s/d为可逆元当且仅当$s\overline{\in}\mathfrak{p}$，也即$s/d$为非可逆元当且仅当$s\in\mathfrak{p}$. 于是，$\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$是$S_\mathfrak{p}$中的所有非可逆元的集合，它显然是$S_\mathfrak{p}$的一个理想。由1)，即知2)成立。▌

例3 一般言之，任取环S的一个分母系D，则S对D的局部化环S_D不一定是局部环。最简单的例子，令$D=\{1\}$，则$S_D=S$，显然不一定是局部环。

现在我们取一个实例。令$S=\mathbf{C}[x,y]$，$\mathfrak{p}=(y-x^2)$. 请注意$y-x^2=0$定义一条抛物线。我们考虑$S_\mathfrak{p}$，不难看出

$$S_\mathfrak{p}=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}:\ g(x,x^2)\neq 0\right\}.$$

此时，分母$g(x,y)$不在抛物线$y-x^2=0$上恒等于零。然而，在抛物线的个别点上，$g(x,y)$可以是零。例如，y即可以当作分母，而此多项式y在原点$(0,0)$等于零。自然，$(0,0)$是抛物线上的一点。▌

值得我们注意的是S的理想在局部化后的变动情形，即在S_D中生成的理想如何。我们有下面的定理。

定理6.4 1) 设D是环S的分母系，J是S的理想。则

$$JS_D=S_D\Longleftrightarrow J\cap D\neq\varnothing;$$

2) 设$\mathfrak{p}$及J是S的素理想，$J\subset\mathfrak{p}$. 则下面的映射是由S中含于$\mathfrak{p}$的素理想集合到$S_\mathfrak{p}$的素理想集合的单满映射：

$$J\mapsto JS_\mathfrak{p}.$$

证明 1) $\Longrightarrow$。令 $\tau: S \to S_D$ 是认同映射。已知 $JS_D = S_D$，所以有

$$1 = \sum \tau(a_i)\frac{\tau(s_i)}{\tau(d_i)} = \frac{\tau(a)}{\tau(d)}, \qquad s_i \in S,\ a_i, a \in J,\ d_i, d \in D.$$

即 $\qquad \tau(a) = \tau(d), \qquad a - d \in \ker(\tau)$。

于是存在 $d' \in D$，使 $(a-d)d' = 0$。立得 $J \ni ad' = dd' \in D$。

$\Longleftarrow$。显然。

2) 任取 I 为 $S_\mathfrak{p}$ 的素理想。令

$$J = \{a: a \in S,\ aS_\mathfrak{p} \subset I\}.$$

则 J 显然是 S 的一个理想，以及 $JS_\mathfrak{p} \subset I$。又任取 $a/d \in I$，则 $a \in J$，以及 $a/d = a(1/d) \in JS_\mathfrak{p}$。于是 $I = JS_\mathfrak{p}$。又设 $ab \in J$，则 $abS_\mathfrak{p} \subset I$。用 I 是素理想这个条件，立得 $aS_\mathfrak{p} \subset I$ 或 $bS_\mathfrak{p} \subset I$，即 $a \in J$ 或 $b \in J$。所以 J 是 S 的一个素理想。这样，我们证明了映射 $J \mapsto JS_\mathfrak{p}$ 是满射。

现在我们假设 $JS_\mathfrak{p} = J'S_\mathfrak{p}$，$J$ 与 J' 都是含于 $\mathfrak{p}$ 的素理想，求证 $J = J'$。任取 $a \in J$，则有 $a/1 \in JS_\mathfrak{p} = J'S_\mathfrak{p}$。所以有

$$\frac{a}{1} = \sum_i a_i' \frac{s_i}{d_i} = \frac{a'}{d}, \qquad a_i', a' \in J',\ s_i \in S,\ d_i, d \overline{\in} \mathfrak{p}.$$

也即 $\qquad ad - a' \in \ker(\tau)$。

于是，存在 $d' \overline{\in} \mathfrak{p}$，使 $(ad - a')d' = 0 \in J'$。但 $J' \subset \mathfrak{p}$，所以 $d' \overline{\in} J'$，而 J' 为素理想，立得

$$ad - a' \in J', \qquad ad \in J', \qquad a \in J'.$$

因此 $J \subset J'$。同法可证 $J' \subset J$。即得 $J = J'$。故映射 $J \mapsto JS_\mathfrak{p}$ 是单射。▌

例4 对一般分母系 D 而言，$J \mapsto JS_D$ 不一定是单射。例如，取 $S = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$，$D = \{(2n, 0): n \neq 0\}$。则不难看出

$$S_D = \left\{\frac{m}{2n}: m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\},$$

以及$(0)S_D=(\{0\}\oplus \boldsymbol{Z})S_D$，其中$(0)$表示$S$中的零理想。显然$\{0\}\oplus\boldsymbol{Z}$是$S$的一个非零理想。▎

任给一环S及两个非零因子a,b。则显然ab也为非零因子。所以，所有的非零因子的集合是一个分母系D。此时，S_D称为S的**全比环**。不难看出，当S是整环时，S的全比环即是S的比域。

习　题

1．证明局部化环可定义如下：设A是环，S是A的乘法封闭子集。一个环X称为A关于S的局部化环，如果存在一个环映射$f: A\to X$，使得对任一环映射$g: A\to B$，只要$g(s)$在B中可逆($\forall s\in S$)，必存在唯一的环映射$h: X\to B$，使得下面的图表交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ X \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

2．设R是环，S是R的乘法封闭子集。如果对R的每个素理想$\mathfrak{p}$而言，

$$S\cap\mathfrak{p}\neq\varnothing,$$

问零是否一定在S中？

3．求$\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$的全比环，其中$m\in\boldsymbol{Z}$。

4．设R是主理想整环，证明局部化环R_D也是主理想整环。

5．设R是唯一分解环，证明R_D也是唯一分解环。

6．设R是一个局部环，I是R的真理想。证明R/I仍是局部环。

7. 证明$K[[x_1,x_2,\cdots,x_n]]$是一个局部环，这里K是一个域。

8. 证明在零点附近的复解析函数集$C\{\{x\}\}$是一个局部环。

9. 证明$\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$是一个局部环，其中$p$为素数，$n\in\boldsymbol{N}$。

10. 令$R=\boldsymbol{Z}/(60)$，$\mathfrak{p}=2R$。求$R_{\mathfrak{p}}$的基数。

11. 设R是整环。证明$R=\bigcap R_{\mathfrak{m}}$，此式右端的交集是对$R$的所有极大理想$\mathfrak{m}$而言的。

12. 设$\boldsymbol{Z}\subset R\subset\boldsymbol{Q}$，$R$是一个局部环。证明$R=\boldsymbol{Z}_{(p)}$或$\boldsymbol{Q}$，此处$p$是一个素数。

13. 设K是域，$K[x]\subset R\subset K(x)$，$R$是局部环。证明$R=K[x]_{(f(x))}$或$K(x)$，此处$f(x)$是$K[x]$中一个不可约多项式。

§2 整数扩充

我们考虑$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$。任意有理数$a\in\boldsymbol{Q}$，都适合下面形式的整系数方程式

$$nx-m=0,\quad n,m\in\boldsymbol{Z},\ (n,m)=1.$$

而且

$$a\in\boldsymbol{Z}\Longleftrightarrow n=1.$$

又，我们熟悉的$\sqrt{2}\notin\boldsymbol{Q}$的一个古典证法如下：首先，$\sqrt{2}$适合下式：

$$x^2-2=0,$$

然后再应用下面的定理。

定理6.5 设a为有理数。如果a适合下面的整系数首一多项式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\quad a_i\in\boldsymbol{Z},$$

则a必为整数。

证明 令$a=m/d$为既约分数，即$(m,d)=1$。代入上式化简，则得

$$m^n = d(-a_1m^{n-1} - \cdots - a_nd^{n-1}).$$

即有 $d|m^n$，所以 $d = \pm 1$。于是 $a = m/d \in \boldsymbol{Z}$。 ▎

从定理6.5，我们知道，如果$\sqrt{2}$是有理数，则必是整数。显然 $x^2 - 2 = 0$ 没有整数根，因此$\sqrt{2}$必非有理数。

类似于上面对整数的刻划方法，我们给出下面的定义。

定义6.4 给定两环 $S \subset R$。设 $r \in R$，如果 r 适合下面的首一方程式 $f(x) \in S[x]$：

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in S,$$

则称 r 对 S 为**整数相关的**。

与定理6.5完全一样，我们可以证明下面的定理。

定理6.5′ 设 S 是唯一分解整环，K 是 S 的比域。如果 $r \in K$ 对 S 为整数相关的，则 r 必在 S 中。

证明 读者自证之。 ▎

例5 取 $\boldsymbol{C}[x,1/x] \supset \boldsymbol{C}[x]$。则$1/x$不是对 $\boldsymbol{C}[x]$整数相关的。我们可以把 $\boldsymbol{C}[x,1/x]$表示成$\boldsymbol{C}[x,y]/(xy-1)$。从几何观点来看，$xy-1=0$ 当 $x=0$ 时无解，即双曲线 $xy-1=0$ 上不存在任何一点，它向 x 轴的投影为原点。这恰是 $y=1/x$对$\boldsymbol{C}[x]$非整数相关的几何意义。一般来说，如果 y 适合下面的方程式

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

而其中 $a_0(x)$不是常数，则 $a_0(x) = 0$ 所决定的 x 点上，y 的解数将少于 n。因此，y 所适合的方程式是否是首一的，有很大的几何意义。 ▎

我们要仿照域论中对代数相关的研究来处理环论中的整数相关。在域论中，我们应用向量空间的理论，在环论中，我们要采用模论了。

定理6.6 给定两环 $S \subset R$，$r \in R$，则下列条件是等同的：

1） r 对 S 是整数相关的；

2） $S[r]$是有限 S 模；

3） 存在一个有限 S 模 $M \subset R$，使 $1 \in M$，$rM \subset M$。

证明 1)$\Longrightarrow$2)。设 r 适合 $r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0$。则有

$$
\begin{aligned}
r^n &= -a_1r^{n-1}-\cdots-a_n,\\
r^{n+1} &= -a_1r^n-\cdots-a_nr\\
&= -a_1(-a_1r^{n-1}-\cdots-a_n)-a_2r^{n-1}-\cdots-a_nr\\
&= b_1r^{n-1}+\cdots+b_n, \qquad b_1,\cdots,b_n\in S,
\end{aligned}
$$

等等。不难看出，$r^n,r^{n+1},\cdots\in S\cdot 1+S\cdot r+\cdots+S\cdot r^{n-1}$，于是 $\{1,r,\cdots,r^{n-1}\}$是 $S[r]$的有限生成元集，即 $S[r]$是有限 S 模。

2)$\Longrightarrow$3)。令$M=S[r]$即可。

3)$\Longrightarrow$1)。设 $\{m_1,\cdots,m_n\}$ 是M的有限生成元集。按照条件 3)，我们得出

$$
\begin{aligned}
rm_1 &= a_{11}m_1+\cdots+a_{1n}m_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad a_{ij}\in S。\\
rm_n &= a_{n1}m_1+\cdots+a_{nn}m_n,
\end{aligned}
$$

应用初等线性代数的 Cramer 法则，立得

$$
\det\begin{bmatrix} r-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & r-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & r-a_{nn}\end{bmatrix}\cdot m_i=0, \qquad i=1,\cdots,n。
$$

将上式左端的“特征行列式”展开成

$$f(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_i\in S),$$

则有

$$f(r)\cdot m=0, \qquad \forall m\in M。$$

取 $m=1$，即有 $f(r)=0$。所以 r 是对 S 整数相关的。▎

应用上面的定理，我们可以证明：

定理6.7 给定两环 $S\subset R$。则R中所有对 S 为整数相关的元素构成一环 S'。此环 S' 具有如下性质：如果 $r\in R$ 对 S' 为整数相关的，则必有 $r\in S'$。S' 称为 S 在R 中的**整数闭包**。

证明 任取 $r\in R$ 对 S 为整数相关的，再任取 $g(r)\in S[r]$。