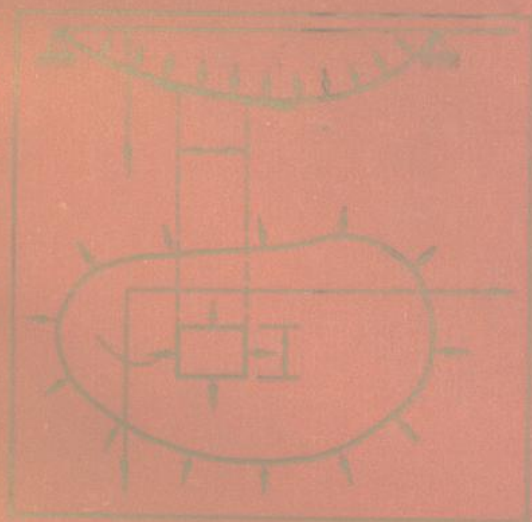


弹性力学

(新一版)

吴家龙 编著 同济大学出版社

THEORY OF ELASTICITY



THEORY OF ELASTICITY

弹性力学

(新一版)

吴家龙 编著

国家教委高等工业学校工程
力学专业教材委员会推荐教材

同济大学出版社

(沪)新登字 204 号

内 容 提 要

本书共分十三章,另外还附有两个补充材料,比较全面地阐述了弹性力学的基本理论以及平面问题、柱形杆的扭转和弯曲、弹性薄板的弯曲、一般的空间问题、热应力、弹性波的传播等专题;介绍了弹性力学的复变函数方法和变分方法。在这次修订中,增加了结合工程实际的计算实例,对部分章节的思考题和习题也作了适当的调整。

本书经国家教育委员会高等工业学校工程力学专业教材委员会 1987 年会议审定,推荐为工程力学专业教学用书,宜作工程力学专业本科生和有关专业研究生的教材,也可供工科本科生和工程技术人员参考。

责任编辑 郁 峰

封面设计 李志云

弹 性 力 学

(新一版)

吴家龙 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

浙江大学印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

1987 年 8 月第 1 版 1987 年 8 月第 1 次印刷

1993 年 9 月第 2 版 1993 年 9 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:17.125 字数:500 千字

印数 1—4500 定价:9.80 元

ISBN7-5608-1245-7/TK·6

第二版前言

本书自1987年出版以来,承蒙多所兄弟院校用作工程力学专业本科生或有关专业硕士生的教材,并先后提出了不少宝贵的意见和建议。这次再版,作者根据这些意见、建议和国家教委高等工业学校工程力学专业教材委员会的审定意见,对原有书稿进行了认真的修改,凡择要说明如下。

原书中“平面问题的有限单元法”一章,有鉴于各校的工程力学专业都设置了“弹性力学的有限单元法”这门课程,感到书中安排这部分内容不仅无济于事,而且在内容上也显得重复;原书中“非线性弹性力学基础”一章内容偏于陈旧,而且,由于推导过于复杂,学生也确实难以接受。因此,在第二版中删去了这两章内容。

按照国家教委高等工业学校工程力学专业教材委员会的意见,在各校固体力学、计算力学和结构力学等专业的硕士生弹性力学入学考试中,都包括了薄板弯曲这部分内容,因此,为适应非力学专业毕业考生的需要,第二版中增加了“弹性薄板的弯曲”一章,使这部分考生能通过短期的自学,对弹性薄板弯曲的小挠度理论及其解题方法有一个初步的了解。

第二版中,在“应力和应变的关系”一章中,适当增加了热力学知识和横观各向同性的概念,而且,在内容次序的安排上也作了适当的变动。在柱形杆的扭转这部分内容中,第一版中重点介绍了按位移求解,而第二版中则着重于介绍按应力求解,而且,还适当增加了一些计算实例。在“弹性力学方程的通解及其应用”一章中,增加了Maxwell应力函数和Morera应力函数的内容,而且,在内容次序上也作了重新安排,归纳为“弹性力学的位移通解”和“弹性力学的应力通解”,克服了第一版内容安排零乱的缺点。在“弹性力学问题的变分法”一章中,增加了弹性体的虚功原理及功的互等定理等内容,并由虚功原理推导出最小势能原理和最小余能原理;这一

章还增加了平面问题和薄板弯曲的计算实例。第二版还对“平面问题的极坐标解答”、“平面问题的复变函数解答”、“热应力”和“弹性力学基本方程的曲线坐标形式”等章的部分内容作了增删,或在文字上作了较大的修改。

作者衷心感谢夏志皋教授、同济大学出版社郁峰先生和张蕙瑛女士的大力帮助!

由于作者水平所限,书中不当之处仍在所难免,愿望有关专家和读者提出宝贵意见。

吴家龙

1992年11月于上海

第一版前言

本书的编写工作始于1964年,当时完成了前六章,后因故中断。1978年应同济大学工程力学专业本科生和工科专业研究生教学的需要,又继续写了后七章和两个补充材料。经几次教学实践后,从1980年上半年起对本书作了较大的修改和补充,1981年印成铅印本,正式定为同济大学力学专业本科生和工科专业研究生教材。本书在近六年的使用过程中,反映良好,全国其他院校也纷纷来函索取本书。为了满足校内外广大读者的迫切需要,编者在本书原有的基础上,又作了进一步的修改和充实,由同济大学出版社正式出版。

本书的出版,得到了清华大学杜庆华教授和徐秉业教授、同济大学翁智远教授、太原工业大学杨桂通教授和浙江大学谢贻权教授的大力支持,徐秉业教授认真细致地审阅了全书,为本书的修改提出了不少宝贵的意见;同时,在本书的修改过程中,本校的江理平、石晓成、许昌时、何颖强和唐寿高等先生做了大量工作。在此,谨表示衷心的感谢。

本书虽经多次修改和充实,但由于编者水平的限制,不足之处在所难免,恳望有关专家和读者批评指正。

吴家龙

1986年10月于上海

目 录

绪 论

绪-1 弹性力学的任务、内容和研究方法	(1)
绪-2 弹性力学的基本假设	(3)
绪-3 弹性力学的发展简史	(5)

第一章 应力状态理论 (8)

§ 1-1 应力和一点的应力状态	(8)
§ 1-2 与坐标倾斜的微分面上的应力	(12)
§ 1-3 平衡微分方程 静力边界条件	(14)
§ 1-4 转轴时应力分量的变换	(18)
§ 1-5 主应力 应力张量不变量	(22)
§ 1-6 应力二次曲面	(25)
§ 1-7 最大剪应力	(29)
思考题与习题	(33)

第二章 应变状态理论 (36)

§ 2-1 位移分量和应变分量 两者的关系	(36)
§ 2-2 物体内无限邻近两点位置的变化 转动分量	(42)
§ 2-3 转轴时应变分量的变换 应变张量	(46)
§ 2-4 主应变 应变张量不变量	(52)
§ 2-5 应变二次曲面	(55)
§ 2-6 体积应变	(56)
§ 2-7 应变协调方程	(58)
§ 2-8 有限变形的几何浅析	(62)
思考题与习题	(67)

第三章 应力和应变的关系 (69)

§ 3-1 应力和应变最一般的关系 广义 Hooke 定律	(69)
-------------------------------	------

§ 3-2 弹性体变形过程中的功和能	(71)
§ 3-3 各向异性弹性体	(76)
(一) 绝端各向异性弹性体	(76)
(二) 具有一个弹性对称面的各向异性弹性体	(77)
(三) 正交各向异性弹性体	(79)
(四) 横观各向同性弹性体	(80)
§ 3-4 各向同性弹性体	(83)
§ 3-5 弹性常数的测定 各向同性体应变能的表达式	(86)
思考题与习题	(88)

第四章 弹性力学问题的建立

§ 4-1 弹性力学的基本方程及其边值问题	(90)
§ 4-2 位移解法 以位移表示的平衡(或运动)微分方程	(94)
§ 4-3 应力解法 以应力表示的应变协调方程	(95)
*§ 4-4 在体力为常量时一些物理量的特性	(99)
§ 4-5 弹性力学解的唯一性定理 逆解法和半逆解法	(100)
§ 4-6 圆柱体的扭转 局部性原理	(105)
§ 4-7 梁的纯弯曲	(110)
§ 4-8 柱体在自重影响下的变形	(116)
思考题与习题	(120)

第五章 平面问题的直角坐标解答

§ 5-1 平面应变问题	(123)
§ 5-2 平面应力问题	(127)
§ 5-3 应力解法 把平面问题归结为双调和方程的 边值问题	(129)
§ 5-4 用多项式解平面问题	(131)
§ 5-5 悬臂梁一端受集中力作用	(136)
§ 5-6 悬臂梁受均匀分布荷载作用	(142)
§ 5-7 简支梁受均匀分布荷载作用	(145)
§ 5-8 三角形水坝	(150)
§ 5-9 矩形梁弯曲的三角级数解法	(152)
*§ 5-10 用 Fourier 变换求解平面问题	(160)

(一) Fourier 积分和 Fourier 变换的概念	(160)
(二) 无限长板条受均布压力作用	(162)
(三) 弹性半无限平面问题	(165)
*§ 5-11 Airy 应力函数的物理意义	(167)
思考题与习题	(171)
第六章 平面问题的极坐标解答	(175)
§ 6-1 平面问题的极坐标方程	(175)
§ 6-2 轴对称应力和对应的位移	(181)
§ 6-3 圆筒受均匀分布压力作用	(184)
§ 6-4 曲梁的纯弯曲	(186)
§ 6-5 曲梁一端受径向集中力作用	(189)
§ 6-6 具有小圆孔的平板的均匀拉伸	(194)
§ 6-7 尖劈顶端受集中力或集中力偶的作用	(197)
§ 6-8 几个弹性半平面问题的解答	(201)
思考题与习题	(207)
第七章 平面问题的复变函数解答	(211)
§ 7-1 双调和函数的复变函数表示	(211)
§ 7-2 位移和应力的复变函数表示	(213)
§ 7-3 边界条件的复变函数表示	(216)
§ 7-4 保角变换和曲线坐标	(219)
§ 7-5 圆域上的复位势公式	(223)
§ 7-6 圆盘边缘受集中力作用	(226)
§ 7-7 多连通域上应力和位移的单值条件 多连通 无限域的情形	(229)
§ 7-8 具有单孔的无限域上的复位势公式	(236)
§ 7-9 椭圆孔的情况	(240)
*§ 7-10 裂纹尖端附近的应力集中	(250)
*§ 7-11 正方形孔情况	(254)
思考题与习题	(258)
第八章 柱形杆的扭转和弯曲	(261)

§ 8-1 扭转问题的位移解法 Saint Venant 扭转函数	(261)
§ 8-2 扭转问题的应力解法 Prandtl 应力函数	(265)
§ 8-3 扭转问题的薄膜比拟法	(268)
§ 8-4 椭圆截面杆的扭转	(271)
§ 8-5 带半圆形槽的圆轴的扭转	(274)
§ 8-6 厚壁圆筒的扭转	(275)
§ 8-7 矩形截面杆的扭转	(277)
§ 8-8 薄壁杆的扭转	(281)
§ 8-9 柱形杆的弯曲	(287)
§ 8-10 椭圆截面杆的弯曲	(291)
§ 8-11 矩形截面杆的弯曲	(294)
思考题与习题	(297)

第九章 弹性力学方程的通解及其应用..... (301)

§ 9-1 基本方程的柱坐标和球坐标形式	(301)
(一) 基本方程的柱坐标形式	(301)
(二) 基本方程的球坐标形式	(304)
§ 9-2 位移矢量的 Stokes 分解式	(307)
§ 9-3 Lamé 位移势 空心圆球内外壁受均布压力作用	(308)
§ 9-4 弹性力学的位移通解	(312)
(一) Boussinesq-Галёркин 通解	(312)
(二) Neuber-Панковеч 通解	(315)
§ 9-5 无限体内一点受集中力作用	(316)
§ 9-6 半无限体表面受法向集中力作用	(318)
§ 9-7 半无限体表面受切向集中力作用	(321)
§ 9-8 半无限体表面圆形区域内受均匀分布压力作用	(324)
§ 9-9 两弹性体之间的接触压力	(329)
(一) 两个球体的接触	(329)
(二) 两任意弹性体的接触	(334)
§ 9-10 弹性力学的应力通解	(339)
§ 9-11 回转体在匀速转动时的应力	(345)
思考题与习题	(348)

第十章 热应力	(350)
§ 10-1 热膨胀和由此产生的热应力	(350)
§ 10-2 热应力的简单问题	(351)
§ 10-3 热弹性力学的基本方程	(354)
§ 10-4 位移解法	(358)
§ 10-5 圆球体的球对称热应力	(360)
(一) 实心球体	(360)
(二) 空心圆球体	(361)
§ 10-6 热弹性位移势的引用	(362)
§ 10-7 圆筒的轴对称热应力	(364)
§ 10-8 应力解法	(366)
§ 10-9 平面热弹性力学问题的应力解法	
Airy 热应力函数	(369)
思考题与习题	(372)
第十一章 弹性波的传播	(374)
§ 11-1 无限弹性介质中的纵波和横波	(374)
§ 11-2 无限弹性介质中的集散波和畸变波	(379)
§ 11-3 表层波(Rayleigh 波)	(381)
§ 11-4 弹性介质中的球面波	(384)
思考题与习题	(386)
第十二章 弹性薄板的弯曲	(387)
§ 12-1 一般概念和基本假设	(387)
§ 12-2 基本关系式和基本方程的建立	(389)
(一) 薄板中的位移分量和应变分量的表示式	(389)
(二) 薄板中的应力分量表示式	(390)
(三) 薄板横截面上的内力表示式	(392)
(四) 薄板弯曲的基本方程	(396)
§ 12-3 薄板的边界条件	(398)
§ 12-4 简单例子	(402)
§ 12-5 简支边矩形薄板的 Navier 解	(408)
§ 12-6 矩形薄板的 Lévy 解	(413)

§ 12-7 薄板弯曲的叠加法	(419)
§ 12-8 基本关系式和基本方程的极坐标形式	(421)
§ 12-9 圆形薄板的轴对称弯曲	(425)
§ 12-10 圆形薄板受线性变化荷载作用	(431)
思考题与习题	(434)
第十三章 弹性力学的变分解法	(438)
§ 13-1 弹性体的虚功原理	(438)
§ 13-2 功的互等定理	(441)
§ 13-3 位移变分方程 最小势能原理	(442)
§ 13-4 用最小势能原理推导具体问题的平衡微分 方程和边界条件	(446)
§ 13-5 基于最小势能原理的近似计算方法	(451)
§ 13-6 应力变分方程 最小余能原理	(466)
§ 13-7 基于最小余能原理的近似计算方法	(470)
§ 13-8 最小余能原理在平面问题和扭转问题中的应用	(471)
*§ 13-9 弹性力学的广义变分原理	(478)
(一) 胡海昌-鹭津久一郎广义变分原理	(479)
(二) Hellinger-Reissner 广义变分原理	(482)
*§ 13-10 Hamilton 变分原理	(484)
思考题与习题	(489)
补充材料 A Descartes 张量简介	(493)
§ A-1 张量的定义和变换规律	(493)
(一) 下标记法	(493)
(二) Kronecker 记号	(493)
(三) 张量的定义和变换规律	(493)
§ A-2 偏导数的下标记法	(497)
§ A-3 求和约定	(498)
§ A-4 置换张量	(500)
补充材料 B 弹性力学基本方程的曲线坐标形式	(502)
§ B-1 曲线坐标 度量张量	(502)

§ B-2 基矢量 α_i 和单位矢量 e_i 在正交曲线坐标系中的变化率	(507)
§ B-3 正交曲线坐标系中的应变张量	(510)
§ B-4 正交曲线坐标系中应变与位移的关系	(515)
§ B-5 正交曲线坐标系中的平衡微分方程	(519)
 部分习题答案	 (525)
 主要参考书目	 (533)

绪 论

绪-1 弹性力学的任务、内容和研究方法

弹性力学,又称弹性理论,是固体力学的一个分支。它的基本任务是要解决现代生产实践中所提出的有关机械和结构的强度和刚度等问题,要求能最大限度地解决并统一经济与安全的矛盾。这是固体力学要解决的普遍矛盾。但弹性力学还有它本身的特殊性,这主要在于弹性力学的研究对象是实际物体经过抽象处理后的完全弹性体,而弹性力学的主要任务,是要解决完全弹性体在外界因素(例如外力、温度变化等)作用下应力和变形的问題,这也构成了弹性力学的基本内容。

所谓“弹性”,它本是固体的一个基本属性,而“完全弹性”则是对于实际弹性物体的一种抽象,使它构成一个近似于真实物体的理想“模型”,然后对它进行数学和力学的处理,以求问题的解决。固体的“完全弹性”的特征是:对应于一定的温度,存在着应力和应变之间一一对应的关系,和时间无关,和它的历史也无关。通常,对于像钢一类的材料,当受力不超过某一限度时,应力和应变之间的关系十分近似于线性的,但也有一些材料,例如某些有色金属和塑料等,却具有非线性性质。前者称为物理线性的,而后者称为物理非线性的。

从研究的对象、研究问题的内容和基本任务来看,弹性力学和材料力学是相同的;再从处理问题的方法来看,弹性力学和材料力学都要从问题的三个方面,即静力学方面、几何学方面和物理学方面进行分析。但两者所研究问题的范围是不同的。弹性力学只研究完全弹性体,而材料力学有时还研究材料的塑性、蠕变、疲劳以

及破坏等问题,有时在解释某些物理现象的本质(例如对于材料疲劳破坏实质的研究)时,还舍弃连续性的假设。弹性力学既研究杆状的构件,也研究诸如板和壳,以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构,而材料力学只研究杆状构件,这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和变形,是材料力学的主要研究内容。

另外,在研究问题的方法上,事实上两者也是不完全相同的。在材料力学里研究杆状构件,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外,为了简化计算,大都还对构件的应力分布和变形状态作出某些假定,因此得到的解答,有时只是粗略的近似。但在弹性力学里研究杆状构件时,一般都不必引进那些假设,因而所得的结果就比较精确,并可以用来校核材料力学中相应问题的结果是否精确。

例如,在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下弯曲时,引进了关于平截面的假设,由此得出的结果是:横截面上的弯曲应力按直线分布。但用弹性力学方法求解这问题时,就毋需采用这个假设,相反地,还可以利用弹性力学的结果来校核这个假设是否正确,并说明由于引进了这一假设以后,对于具有不同的跨度和高度之比的梁来说所引起的误差,从而可以确定这种假设所带来的条件性和局限性。

又例如,在材料力学里计算带孔构件拉伸时,假定拉应力在净截面上是均匀分布的。但在弹性力学里,就不需要作出这个假定,而且它的结果表明,净截面上拉应力远不是均匀分布的,而在孔边附近发生高度的应力集中现象,孔边的最大拉应力会比平均应力高出若干倍。

弹性力学作为一门基础技术学科,是近代工程技术的必要基础之一。在造船工程中,船体结构的强度、刚度计算,要直接应用弹性力学的理论和方法。在航空工程中,尤其是航天工程的发展,不断地对弹性力学提出新的任务,并由此而形成了新的分支(例如空气弹性力学)。在重型机器、精密机械和化工机械中,对于机器的部件在各种工作条件下的强度研究,也广泛地应用着弹性力学的结

论和公式。在水利工程和土建工程中,工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为计算、设计和应力应变分析的理论基础。在地震学中,根据弹性波在地壳中传播的研究结果,计算出震源所在的位置,并研究地震波传播的规律性。

弹性力学又可作为一门基础理论学科。物理学家在研究光波理论时引用了弹性力学,近年来,人们还把弹性力学的理论和方法应用于生物力学等边缘学科的研究。

用弹性力学的经典解法实际问题,主要的困难在于偏微分方程边值问题的复杂性。因此,人们早就寻求各种近似解法,例如差分解法和变分解法等等。自 20 世纪 30 年代开始,不少建筑工作者和力学工作者还致力于弹性力学和结构力学的综合应用。弹性力学吸收了结构力学中超静定结构分析法以后,大大扩大了它的应用范围,使得某些本来无法解决的复杂问题得到了解决。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性,但应用于工程上,有时却是足够精确的。近 30 年来发展起来的有限单元法,就是把连续弹性体划分成有限个有限大小的单元构件,然后利用结构力学的位移法、力法或混合法求解,更加显示出弹性力学和结构力学综合应用的良好效果。由于各种近似解法的出现和采用,为用弹性力学解决实际工程问题开辟了更为广阔的前景。

绪-2 弹性力学的基本假设

在弹性力学中,为了能通过已知的量(如物体的几何形状和尺寸、物体所受的外力或几何约束)求出应力、应变和位移等未知量,首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发,建立这些未知量所满足的弹性力学的基本方程和相应的边界条件。由于实际问题是极为复杂的,是由多方面的因素构成的,所以,如果我们不分主次地将全部因素都考虑进来,则势必会造成数学推导上的困难,而且,由于导出的方程过于复杂,实际上也不可能求解。因此,通常必须按照物体的性质以及求解的范围,去忽略一些可以暂不

考虑的因素,而提出一些基本假定,使我们所研究的问题限制在一个方便可行的范围以内。在以后的讨论中,如不特别指出,将采用以下 6 条基本假设。

1. **连续性假设** 弹性力学作为连续介质力学的一部分,它的基本前提是将可变形固体看作是连续密实的物体,即组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假设出发,我们可以认为,一些物理量如应力、应变和位移等是连续的,它们可表示成坐标的连续函数,因而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上,一切物体都是由微粒组成的,都不可能符合这个假定。但可以想象,当微粒尺寸以及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时,运用这个假设并不会引起显著的误差。

2. **均匀性假设** 假定所研究的物体是用同一类型的均匀材料组成的,因此它的各部分的物理性质(如弹性)都是相同的,并不会随着坐标位置的改变而发生变化。根据这条假设,我们在处理问题时可取出物体内的任一部分进行分析,然后将分析的结果用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,只要每种材料的颗粒远远小于物体的几何尺寸,而且在物体内均匀分布,从宏观的意义上说,它也是均匀的。

3. **各向同性假设** 假定物体在不同的方向上具有相同的物理性质,因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。单晶体是各向异性的,木材和竹材是各向异性的。钢材虽然由无数个各向异性的晶体组成,但由于晶体很小,而且排列是杂乱无章的,故从宏观的意义上说它是各向同性的。

4. **完全弹性的假设** 完全弹性的含义在绪-1 中已经讲过,这里不作重复。本教程只研究应力和应变呈线性关系的情况,这时,各个弹性常数就不随应力或应变的大小而改变,并且可以运用叠加原理。

5. **小变形假设** 假定物体在外界因素(例如荷载或温度变化等)作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸,因而应变分量和转角都远小于 1。应用这条假设,可以使问题大为简化。例如,在研