

文科数学

王云峰 王晓瑛 荔炜 编著



西北大学出版社

文科数学

王云峰 王晓瑛 荔 炜 编著

西北大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

文科数学 / 王云峰, 王晓瑛, 荔炜编著. — 西安: 西北大学出版社, 2003. 1 (2007. 7 重印)

ISBN 978 - 7 - 5604 - 1801 - 8

I. 文… II. ①王…②王…③荔… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 003431 号

文科数学

王云峰 王晓瑛 荔 炜 编著

西北大学出版社出版发行

西北大学校内 邮编 710069 电话 88302590)

新华书店经销 西安华新彩印有限责任公司印刷

850 毫米 × 1168 毫米 1/32 开本 9.625 印张 235 千字

2011 年 7 月修订版 2011 年 7 月第 4 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5604 - 1801 - 8 定价: 18.00 元

前 言

数学教育体制改革的关键之一，是对已不能适应我国现阶段数学教学需要的、50年一贯制的前苏联教材体系的改革。

由于历史原因，搞代数者认为代数学重要，搞分析的认为分析学重要，搞随机学的认为随机学好使，这也重要那也重要，最终便堆砌成了如今学了什么都知道却什么都不懂的高等数学教材。这种过分偏重纯数学知识的简单堆积，过分追求知识点的多而全，恨不能在一本书里将所有的数学知识全部罗列出来，一夜之间培养出千百万个数学通才的倾向，违背了教学规律，忽视了数学教学对学生养成用数学极富逻辑的思想分析问题的意识，忽视了用数学极为巧妙的方法解决问题的能力诱导和培养，忽视了数学理论与各边缘学科及新兴学科的联系，忽视了在有限时间内，针对不同学科的学生分别介绍本学科所需之数学知识的基本思想和基本方法的陶冶与训练。于是便出现了只会求导算积分的可谓花拳绣腿式的“高分”人才。

多年来，我们的数学类教材似乎形成了某种定格——只是定义、定理、证明、例题的逻辑存放，不讲为什么要定义一个概念（给人的大多直观印象是物理学的需要）？从何想起这个定理（似乎是 Newton-Leibniz 的创新）？这种重视然而不关心所以然，重视数学与物理学的关系而不注意数学在当今社会生活中方方面面的其它应用，重数学理论本身的严谨性，轻视对教材内容的思想性、可读性及反映事物运行规律的直观性的研究与改革，冲淡

了学生的学习兴趣和，延长了学生对数学思想的感悟时间。原本可用几句话很通俗、很直观地讲清楚的事，就是不说，让你悟，等你悟出这个理，已年事相当了，湮没了学生在其日后工作中用数学的思想认识、解决问题的意识和时机，也使原本有血有肉的数学美人变成了干瘪老头，变成了人见人畏的怪物。

为此，我们西北大学《数学分析》、《高等数学》重点课程建设项目组，在西北大学教务处的领导和支持下，本着以下原则编写了这本《文科数学》教材：

1. 突破教材编写的旧框架，以先有问题后有解决问题的思路与方法为主线，从如何提出问题、分析问题并解决问题的角度入手，编写出适合各专业的专业目录具体要求的教材。
2. 同样是小说、电视剧，既贴近生活又富有哲理者往往引人入胜，回味无穷。一句至理名言挂在墙上，远不如将其哲理贯穿其中的短剧更有魅力。所以，要以人文、社科及各学科目前已有成果中的数学问题为典例，用通俗直观而准确的语言提出问题，进而用精确的数学语言归纳并抽象出定义，为了解决问题，经分析研究得到相关的定理和结论。让人明知，数学并非空中楼阁，数学是为了解决人类社会生活中各种问题而生，又在不断解决问题中而存的。
3. 在尽可能增强数学教材可读性的同时，充分体现数学语言的逻辑性、严谨性，使人读后明白，鸟有鸟语，人有人话，数学有数学的语言，让学生从中学会并掌握用数学语言描述、表达思想的方法。

本教材适合综合大学文博、公管、社科、汉语言文学、新闻、图书情报、外语及法律等文科各院系 72 学时数学课教学要求。本书已在西北大学 9 系 12 个专业试用两年。尽管我们的初

衷是，编写一本能传授数学思想，培养数学思维模式，介绍数学方法的、可读性强的文科各系及专业适用的新书，但由于我们的水平所限，是否真正达到了这个目的，敬请各位同仁批评指正。

本书在编写和试用过程中，得到了西北大学教务处、西北大学数学系同行专家的大力支持和不吝指点，在此一并表示感谢。

编 者

2002 年 2 月

绪 论

1. 是什么？

数学是人类长期探索事物运行规律的结晶。随着人类社会的不断进步，尤其是信息技术的迅猛发展，现代数学的理性思维模式及方法，不仅成为理、工科各专业学生学好本专业课程必需的基础知识，更是人文、社科各系学生增强逻辑思维能力，适应未来社会不可缺少的基本知识。尤其是，在人类社会进入 21 世纪的今天，国防科技、生物技术、生态农业、地质地理、人文经济各行业，大凡试图精确量化某特定事物的问题，无一不首先是建立数学模型的问题。因此，数学在现代社会生活中的地位与作用正在日益被人们所认识，正在焕发着耀眼的光芒。

高等数学是大学非数学专业开设的数学基础课之一，其主要内容是现代数学三大板块——连续变量的微积分及微分方程、离散变量的线性代数、随机变量的概率论与数理统计的最基础的部

分知识. 根据各专业的具体需要, 高等数学又分为: 数学一、数学二、数学三、文科数学四类. 本书是文科数学, 主要介绍初等微积分的基本理论和方法.

微积分是文科数学的主体. 微积分的思想及方法离我们并不遥远: 一杯水在常温下随时间的推移, 一层层蒸发的过程就是微分, 再将其在理想状态下一层层地还原便是积分; 摄像机将人们在某时间范围内的活动, 用一张张静态画面储存于磁带的过程是一种微分, 再将这些静态图像连续不断地播放出来便是积分. 事实上, 早在 2000 多年前, 希腊人为寻求圆面积的计算法, 用圆内接与外切多边形, 通过不断增加边数 (穷举法) 逐步逼近圆面积的方法, 是积分学的早期萌芽. 随着人类对自然界认识的不断深入, 为揭示人类社会中各种事物发展的规律, 解决科学技术中不断出现的各种新问题, 如: 心脏病患者的血流变图形 (即心电图) 是什么? 地球的运行轨道是什么? 如果物体运动的速度已知, 如何求出其加速度? 股市指数运作规律是什么? 地球几大板块运移的数字规律是什么? 人类基因某种特征的遗传规律, 其数字特征是什么? 填加什么燃料, 产生多大推力, 具有什么速度的运载火箭, 才能将太空仓送入预定轨道? …… 这些问题都是数学学科得以飞速发展的源动力. 因此, 在 16、17 世纪数学家 Isaac Newton (1642—1727), Gottfried Leibniz (1646—1716), Louis Cauchy (1789—1857) 及 Bernhard Riemann (1826—1866) 的共同推动下, 形成了现代数学学科的基石——微积分学.

2. 想干什么?

函数, 这个从大量客观事物的运动规律中抽象出来的数学概

念，是微积分研究的主要对象。通过对函数表示法及其基本几何特征（如有界性、周期性、奇偶性、单调性、凸凹性等）的研究，增强用数学的思维方式提出并解决问题的意识，养成严谨而极富逻辑的数学思维习惯。学会研究函数的几种主要方法是开设微积分学课程的主要目的。

掌握基本概念、基本理论、基本方法是学习本课程最基本的要求。通过适量习题的练习，巩固基本概念，加深对基本理论的理解。熟悉并活用各种基本方法是学好本课程的基本途径。

学会如何从未来社会实践中的同类问题中归纳并抽象问题（即提出问题）；怎样使所论问题具体化、直观化、模型化（即问题的具体加工过程——思考问题）；如何用数学的方法解决问题，用严格的数学语言描述问题（即解决问题及回答问题），是学习高等数学的根本目的和任务。

3. 能干什么？

寻觅人类社会不断进步中事物发展、运动的规律，是促进人类社会发展的源动力。虽然，用现代数学的方法可揭示很多人文、社科及自然现象的内部规律（如垒球比赛中人眼的转动速度、商品价格浮动的规律、血液的流速、第一宇宙速度、火箭发射后地球对火箭引力减小的速率、导弹的运行轨迹等等），但是，数学并非神药，能包治人间百病，现代社会中急待解决的众多问题里，依然有大量目前还不能用现有数学的理论和方法解决的问题（如地壳运移规律的数学表达式是什么？人脑对某特定事件的反应规律是什么？……自然界的各种各样的谜，都是现有科学技术手段还不能解决的问题，这些问题都有待于后来者的创新

与解决)。即使在数学目前能够解决的众多问题中所涉及的数学知识,我们也不可能在很有限的 72 学时内,用区区的几十万字展现出来。在有限的时间内,我们所能做到的就如同引导各位进入一家鞋业公司,参观了一双鞋从设计、选料、制做、检验到包装的全过程,特别是,还亲手学做了一双男式牛皮鞋。至于猪皮鞋、布鞋、凉鞋、童鞋、女鞋等其它鞋类的设计、选料、花色、制做等工艺,虽然我们全全然不知,但我们可以通过男式牛皮鞋的制做法举一反三,学会各种鞋的设计与制做。

养成用数学思想想问题的良好习惯,在极有限的时间内逐步学会用数学方法解决问题,为日后解决从事各项社会实践活动中的具体问题奠定必要的思想和方法基础,才是我们的初衷。

通过对数学最基本知识及其方法的学习,学会举一反三,举二反五,从牛皮鞋的制做中学做猪皮鞋,陶冶创新精神,培养自学和攻克难题的能力,为学习本专业后继课程所需数学知识打好基础,是我们迈向社会,走向未来的第一步。让我们用数学的思想及方法解决未来实践中方方面面的问题,强国富民,为中华民族的伟大复兴出力流汗。

常用符号

数学语言是由文字和数学符号组成的一种语言，其中有些符号是数理逻辑的符号，使用数理逻辑的符号可使定义、定理及问题的表述与证明中的语言更严格、简明、准确。为此，我们先介绍本书中将要经常使用的两种数理逻辑符号及其它符号。

1. 连词符号

● “ $A \Rightarrow B$ ”表示“由命题 A 的成立……推出命题 B 的成立”或“若 $A \cdots$ ，则 $B \cdots$ ”。如：中国人是爱好和平的，张小三是中国人 \Rightarrow 张小三是爱好和平的。

● “ $A \Leftrightarrow B$ ”表示“ A 、 B 两命题是等价的”或“ A 、 B 互为充分必要条件”。如：两三角形全等 \Leftrightarrow 三个对应边相等。

2. 量词符号

● 符号 “ $\forall \cdots$ ”表示“对任意的……”，如：“对区间 (a, b) 内任一数 x ”这句话，用逻辑量词便可表示为， $\forall x \in (a, b)$ 。

● 符号 “ $\exists \cdots$ ”表示“存在……”，如： $\exists x_0 \in (0, \pi)$ ，使得 $\sin x_0 = 1$ 。

3. 其它符号

● 符号 “ $\max \{ \cdots \}$ ”表示“在……中的最大者”， \max 是 maximum 的缩写，如： $\max \{ 0, \pi, 2, 5, 0.6, 8 \} = 8$ 。

● 符号 “ $\min \{ \cdots \}$ ”表示“在……中最小的一个”， \min 是 minimum 的缩写，如： $\min \{ \pi, 1, 5, 0, 3 \} = 0$ ，同理， $\min \{ a_1, a_2, \cdots, a_n \}$ 表示 n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n 中最小的数。

目 录

前 言

常用符号

绪 论

第一章 空 间

§1 一维空间

§2 二维空间

习题一

第二章 函 数

§1 几个实例

§2 函数的定义

§3 一类特殊函数——数列

§4 想研究函数些什么？

§5 什么是函数的几何特征？

§6 我们能研究的函数

习题二

数学万花筒 (I)

第三章 研究函数的极限方法

§1 函数的极限

§2 无穷小及其阶

§3 函数的连续性

§4 初等函数的连续性

§5 闭区间上连续函数的性质

习题三

数学万花筒 2)

第四章 研究函数性质的主要工具——导数

§1 问题的引入

§2 导数的定义

习题四 1)

§3 初等函数的导数

§4 高阶导数

习题四 2)

数学万花筒 3)

第五章 研究函数局部性质的微分法

§1 定义与求法

§2 用微分做近似计算

习题五

第六章 用导数研究函数

§1 问题的引入

§2 中值定理

§3 L'Hospital 法则

§4 用导数研究函数的单调性

§5 用导数研究函数的凸性

§6 用导数研究函数的极值

§7 平面曲线的渐近线

§8 函数图形的绘制

习题六

数学万花筒 4)

第七章 积分学

§1 问题的引入

§2 定积分的定义

§3 定积分的性质

§4 定积分的计算

习题七

第八章 积分学的应用

§1 用不定积分求解简单微分方程

§2 定积分的应用

习题八

数学万花筒 (5)

习题答案

第一章 空间

人类在从事社会实践的过程中发现和提出的各种问题,为现代数学中种种概念的抽象提供了丰富的素材.如,在还没有数字的远古时代,牧羊人用石子和羊只一一对应的办法标识羊只的多少,每个人与其身份证的一一对应,每个人与其指纹的一一对应等等,这些方法给人们的生活带来了极大的方便.正是通过这些素材人们一步步地抽象出了自然数、整数、有理数继而实数的概念,后又将抽象了的实数与实数轴上的点这个形一一对应起来,以至于今天我们一谈起实数脑子里便浮现出与之对应的实数轴上的点,使数与形有机地联系起来.以下我们用不同方法建立点与数及有序数组间的一一对应,从而引入数学上称之为空间的概念.

§ 1 一维空间

1. 点与数的 1-1 对应

我们知道,实数集 R 中的数 x 与实数轴上的点 P (point) 是 1-1 对应的,同时也称数 x 为点 P 的坐标.

为描述和量化两列火车的距离,两人在同一条公路上的距离远近等问题,人们需要用数学的方法描述距离的概念.

2. 两点间的距离

如果我们定义, 实数轴上两点 x 与 y 间的距离为 $|x - y|$, 那么这种距离具有以下性质: 首先距离必为非负数; 其次点 P_1 到 P_2 与 P_2 到 P_1 的距离一样; 最后如果有三点 P_1, P_2, P_3 , 那么 P_1 到 P_3 的距离一定不超过 P_1 到 P_2 与 P_2 到 P_3 间距离之和. 这三个常识在数学上被称为公理, 用数学语言描述为:

- 非负性: $0 \leq |x - y|$;
- 对称性: $|x - y| = |y - x|$;
- 三角不等式: $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

3. 实数空间

我们称附带满足以上性质的实数集为实数空间 (或一维空间), 记为 \mathbf{R}^1 .

4. 区间 (Interval)

列车的运行区间、某数的连续变化范围等是我们早已常用的词汇, 它们都可抽象为实数空间中介于两数之间所有实数全体构成的集合, 即区间的概念. 为此, 我们定义区间如下:

- 开区间: $(a, b) = \{a < x < b; x \in \mathbf{R}\}$.
- 点的邻域: 我们称集合 $N(x_0, \delta) = \{x_0 - \delta < x < \delta + x_0; \delta > 0, x \in \mathbf{R}\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域 (Neighborhood).
- 闭区间: $[a, b] = \{a \leq x \leq b; x \in \mathbf{R}\}$.
- 半开区间:
 - $(a, b] = \{a < x \leq b; x \in \mathbf{R}\}$;
 - $[a, b) = \{a \leq x < b; x \in \mathbf{R}\}$.

● 无穷区间:

$$[a, +\infty) = \{a \leq x < +\infty; x \in R\};$$

$$(a, +\infty) = \{a < x < +\infty; x \in R\};$$

$$(-\infty, b) = \{-\infty < x < b; x \in R\};$$

$$(-\infty, b] = \{-\infty < x \leq b; x \in R\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{-\infty < x < +\infty; x \in R\}.$$

例 1: $[-1, 1] = \{-1 \leq x \leq 1; x \in R\}.$

$$[0, 2] = \{0 \leq x \leq 2; x \in R\};$$

$$[4, 5) = \{4 \leq x < 5; x \in R\}.$$

$$[0, +\infty) = \{0 \leq x < +\infty; x \in R\};$$

$$(-\infty, -2) = \{-\infty < x < -2; x \in R\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{-\infty < x < +\infty; x \in R\}.$$

§ 2 二维空间

1. 平面点与有序实数对的 1-1 对应

平面上点 P 与有序实数对 (x, y) 间 1-1 对应的方法很多, 以下我们介绍最常见的方法.

● 直角坐标系: 我们称垂直相交于原点的两实数轴为平面直角坐标 (架) 系 (如图 1-1), 记其为 xOy . 其中点 O 称为坐标原点, 水平放置的一轴称为 x 轴, 另一轴称为 y 轴. 以直角坐标系为媒介, 便可以建立起平面上点 P 与有序实数对 (x, y) 间的 1-1 对应.

设 P_0 为平面上任意一点, 则当过点 P_0 分别与 x, y 轴垂直的直线与两轴的交点坐标分别为 x_0, y_0 时, 点 P_0 便与惟一的有序实数对 (x_0, y_0) 相对应; 反之, 若 (x_0, y_0) 是任一有序实数对, 则过 x 轴上点 x_0 且垂直于 x 轴的直线与过 y 轴上点 y_0 且垂直于 y 轴的