普通高校基础数学教材系列

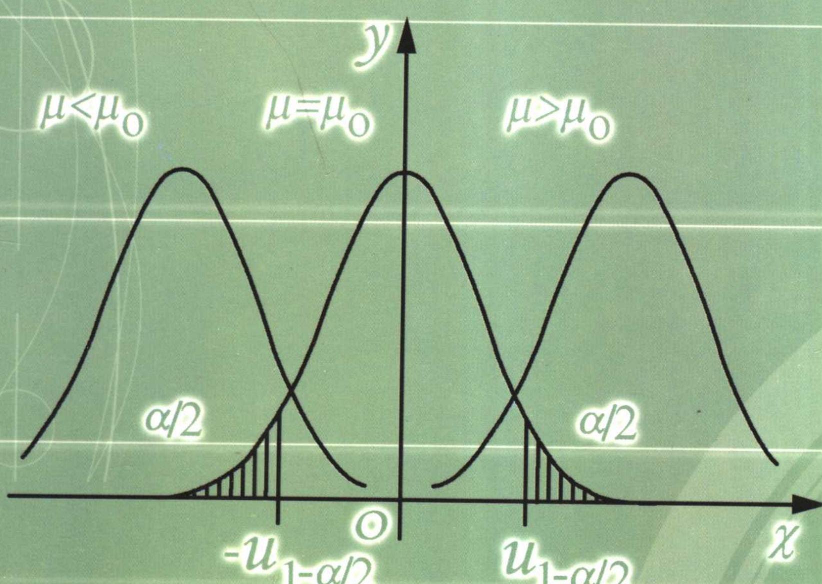
概率统计

Gailü Tongji

Gailü Tongji

GAILU TONGJI

主编 陆元鸿 苏德中 刘剑平



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校基础数学教材系列

概率统计

主编　陆元鸿　苏德中　刘剑平

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/陆元鸿 等主编. —上海:华东理工大学出版社,2003.12

(普通高校基础数学教材系列)

ISBN 7-5628-1476-7

Ⅰ.概... Ⅱ.陆... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118760 号

普通高校基础数学教材系列

概 率 统 计

主编 陆元鸿 苏德中 刘剑平

出版	华东理工大学出版社	开本	787×960 1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	15.5
邮编	200237 电话(021)64250306	字数	286 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2003 年 12 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	印次	2004 年 5 月第 1 次
印刷	上海长阳印刷厂	印数	1-5050 册

ISBN 7-5628-1476-7/O·93 定价:22.00 元

前　言

本书是华东理工大学继续教育学院组织编写的成人教育普通高校基础数学教材系列中的一本，内容共分为7章，包括了概率论和数理统计课程的全部基本内容.

本书是根据教育部1998年颁布的全国成人高等教育概率统计课程教育基本要求，结合作者多年教育经验编写而成的，可作为成人教育工科概率统计教材，也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的概率统计教材.

考虑到成人教育的特点，在本书中，我们着重讲清概率论和数理统计的基本概念、基本原理和计算方法，避免烦琐的理论推导证明，尽量少引进一些不是十分必要的数学定义和理论概念. 在内容叙述和举例说明时，力求做到文字通畅，简明扼要，浅显易懂，一般水平的学生，不需要辅导，通过阅读教材，就能够自学掌握所学的内容. 在每一章的后面，都配置了习题，这些习题中的大多数，只需要掌握基本的概念、原理和计算方法，就能顺利解出，不需要用到特殊的数学技巧和高深的数学知识. 在书后还给出了全部习题的详细解答，供学生参考.

教师在使用本教材时，可以根据具体的教育要求，根据学生的实际水平，减少或增加一些教学内容，另外补充一些有意义的但更复杂一些、需要教师讲解学生才能掌握的例题.

本书由华东理工大学继续教育学院组织编写，由陆元鸿、苏德中、刘剑平主编. 在编写和出版过程中，得到了华东理工大学继续教育学院和华东理工大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢.

本书内容中难免有疏漏差错之处，欢迎读者向我们指出，以便再版时修订改正.

作者的电子信箱是：lu_yuanhong@hotmail.com

陆元鸿　苏德中　刘剑平

2003.12

目　录

1 事件与概率

1.1 随机现象与随机事件

1.1.1 随机现象

自然界和人类社会中存在着许多现象，其中有一些现象，只要满足一定的条件，就必然会发生，事前人们可以预言会发生什么结果. 例如，在一个标准大气压下，纯水加热到100℃ 必然会沸腾；氢气和氧气混合在一起，点燃后必然会反应生成水；在真空中，两个从同样高度落下的自由落体，总是同时落到地面等等. 我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**.

但是在自然界和人类社会中，还存在着另一类非确定性的现象. 例如，掷一个骰子，可能掷出一点，也可能掷出二点、三点、四点、五点、六点，掷出的结果是不确定的；买一张彩票，可能中头奖，可能中二等奖、三等奖……也可能不中奖，事先也无法确定；一门炮对一个目标进行射击，可能击中也可能击不中，炮弹落点到目标的距离可能近也可能远，这些都无法准确预料等等. 这些现象的一个共同特点是：在同样的条件下进行同样的的观测或实验，有可能发生多种结果，事前人们不能预言将出现哪种结果. 这种在同样条件下进行同样的观测或实验，却可能发生种种不同结果的现象，称为**随机现象**或**偶然现象**.

1.1.2 随机试验

随机现象在实际生活中，是经常可以遇到、大量存在的. 表面上看来，随机现象的发生，完全是随机的、偶然的，没有什么规律可循，但事实上并非如此，在表面上看来毫无规律的随机现象的背后，隐藏着某种必然性的有规律的东西. 例如，投掷一枚质地均匀的硬币，只投掷一次时，投掷的结果是正面还是反面是无法确定的，但当大量重复投掷硬币时，就可以看到出现正面的次数约占试验总数的一半. 又如某人打靶射击，若射击次数不多，靶上的弹着点似乎是随意分布的，但倘若进行大量的重复射击时，弹着点的分布就逐渐呈现规律性：大体上它

们关于靶中心对称，靠近靶心的弹着点密，偏离靶心越远弹着点越稀少，且弹着点落在靶内任意指定区域的次数与射击次数之比(频率)大体上保持稳定，射击次数越多，其频率稳定性就愈加明显．这种在大量重复试验中随机现象所呈现的固有规律，通常称之为统计规律．

概率统计就是专门研究随机现象的统计规律性的一门学科．

在概率论中，我们把在一定条件下进行某种实验然后对发生的现象进行一次观测，称为一个**试验**．如果一个试验具有下列三个特性，就称为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每一次试验，可能出现多种不同结果，总共有可能出现哪几种结果，是可以事先明确知道的；

(3) 每一次试验，实际只出现一种结果，至于实际出现哪一种结果，在这一次试验结束之前，是无法预先知道的．

后面，我们讲到的试验，总是指这种随机试验．

为了研究的方便，有时也把具有固定结果的试验，看成是随机试验的极端情形．有时又需要把几次试验作为一个整体合起来看成是一次随机试验．例如：可以把连续掷 3 次骰子看成是一次随机试验．

1.1.3 样本空间

对于某个确定的随机试验，我们用 ω(ω 也可以带下标)表示它的一个可能的试验结果，称为**样本点**，也称为**基本事件**．一个试验所有的样本点组成的集合，称为**样本空间**，记为 Ω．

从集合论的观点看，样本空间 Ω 是随机试验的一切可能的结果所构成的集合，即这个随机试验的全部样本点的集合．

例如，掷一硬币一次，观察出现正、反面的情况，是一个随机试验．这个随机试验所有可能的试验结果只有两种：或者出现正面，或者出现反面(当然，这里作了一些简化，假定不会出现硬币“立起来”，或硬币滚到阴沟里去等其他的情况)．这个随机试验的样本空间 Ω 可以写成 $\Omega=\{$正，反$\}$，也可以写成 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中，$\omega_1$ 表示出现的是正面，ω_2 表示出现的是反面．或者，如果我们约定用 1 表示出现的是正面，用 0 表示出现的是反面，它也可以写成 $\Omega=\{1,0\}$．这个随机试验的样本空间是由 2 个元素组成的集合．

我们再举一些例子．

例 1 掷一颗骰子，观察掷出的点数．这个试验共有 6 个样本点，它们是：

$$\omega_i\text{：表示掷出 } i \text{ 点} \quad (i=1,2,\cdots,6),$$

样本空间可以写成 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. 也可以写成 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中，1，2，3，4，5，6 分别表示出现的点数. 这个随机试验的样本空间是由 6 个元素（6 个样本点）组成的集合.

例 2 抛掷两枚均匀的硬币，观察它们向上的一面是正面还是反面. 对于这个试验，可以有下列两种不同的考虑方法：

(1) 两枚硬币分别考虑，分别看它们是“正面向上”还是“反面向上”，这时共有 4 个样本点，它们是：

ω_1：表示第一枚为正面，第二枚为正面；

ω_2：表示第一枚为正面，第二枚为反面；

ω_3：表示第一枚为反面，第二枚为正面；

ω_4：表示第一枚为反面，第二枚为反面.

样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

(2) 两枚硬币一起考虑，看两枚硬币中总共出现几个“正面向上”，这时只有 3 个样本点，它们是：

ω_1：表示两个正面，ω_2：表示一个正面，一个反面，ω_3：表示两个反面.

样本空间可以写成 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. 它也可以写成 $\Omega=\{0,1,2\}$，其中，0，1，2 分别表示出现正面的个数.

这个例子说明：样本点的选取和样本空间的构造不是唯一的. 同一个试验，随着考虑角度的不同，样本点的选取和样本空间的构造可以是不一样的.

例 3 在相同条件下接连不断地向同一个目标射击，直到第一次击中为止，观察直到击中为止所需要的射击次数. 因为射击次数可以是任何正整数，所以在这个试验中，样本点有无穷多个，但是这些样本点可以排成一列，一一列举出来（可以一一列举出来的无穷多个，称为“可列无穷多个”），即：

$$\omega_i\text{：表示到击中为止需要射击 } i \text{ 次} \quad (i=1,2,3,\cdots),$$

样本空间可以表示为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$. 它也可以表示为 $\Omega=\{1,2,3\cdots\}$. 其中，1，2，…分别表示出现正面的次数.

例 4 在一批显像管中，任意取一只，测试它的使用寿命 t. 因为使用寿命 t 可以取 $(0,+\infty)$ 中的任何一个值，所以在这个试验中，样本点有无穷多个，而且不能一一列举出来（不能一一列举出来的无穷多个，称为“不可列无穷多个”）. 这个试验的样本空间可以表示为 $\Omega=\{t|t>0\}$，Ω 中的每一点都是样本点.

1.1.4 随机事件

随机试验可能出现的结果，称为**随机事件**，简称为**事件**. 在概率论中，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots,A_1,A_2,A_3,\cdots$ 来表示事件.

样本空间 Ω 包含了全体样本点，而一般的随机事件，总是由具有某些特征的基本事件即样本点所组成. 由此可见，**任一随机事件都是样本空间 Ω 的一个子集**. 例如，在前面例 1 中，如果把样本空间记为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 A "出现点数是偶数"包含出现点数 2,4,6 这三种情况，可以表示为 $A=\{2,4,6\}$，它是 Ω 的一个子集.

在每次随机试验中一定会发生的事件，称为**必然事件**. 相反地，如果某事件一定不会发生，则称为**不可能事件**.

因为 Ω 是由所有样本点所组成的，在每一次试验时，不是这个样本点发生，就是那个样本点发生，也就是说，在试验中 Ω 必然要发生，因此，我们可以用 Ω 表示必然事件；空集 $\varnothing$ 是不包含任何样本点的集合，它也可以看作是 Ω 的子集，在每一次试验时，由于空集不包含任何样本点，$\varnothing$ 永远不可能发生，因此，我们可以用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 没有不确定性，因而严格地说，它们已经不属于"随机"事件了. 但是，为了今后讨论方便起见，我们还是把它们包括在随机事件中，作为特殊的随机事件来处理.

1.2 事件的关系和运算

在同一个样本空间 Ω 中，可以有很多随机事件，事件与事件之间，存在着各种关系，还能进行各种运算. 人们通常需要研究这些事件间的关系和运算，以便能够通过简单事件的统计规律，去探求复杂事件的统计规律.

另一方面，从集合论的观点看，事件既然是一些集合，就必然存在着集合之间的关系和集合之间的运算，这些集合之间的关系和运算与作为事件间的关系和运算应该有对应的意义.

在以下的叙述中，设 Ω 是给定的样本空间，$A,B,C,\cdots,A_1,A_2,\cdots$ 均表示其中的事件.

1.2.1 事件之间的关系

1) 包含关系

如果事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生（事件 A 不发生时，事件 B 可能

发生也可能不发生)，则称事件 A **包含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

事件 A 包含于事件 B，就是当 A 中的任何一个样本点发生时，B 必定发生，即 A 中样本点都包含在 B 中，意味着对于任意的 $\omega\in A$ 有 $\omega\in B$. 所以，从集合论的观点看来，也就是说 A 是 B 的子集，即记号 $A\subset B$ 也可以理解为集合的包含关系.

英国逻辑学家约翰·文(John Venn，1834—1923)发明了一种"文氏图"，可以将事件(集合)间的关系用图形形式直观地表示出来. 在"文氏图"中，用一个矩形表示样本空间 Ω(全集)，矩形内的点表示样本点(元素)，矩形中的区域表示事件(全集的子集).

用"文氏图"表示 $A\subset B$，就是事件 A 的区域完全包含在事件 B 的区域中(即 A 是 B 的子集)(图 1-1).

显然，事件的包含关系具有下列性质：

(1) 任何一个事件 A 都包含它自身，即 $A\subset A$；

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$；

(3) 任何事件 A 都包含在必然事件 Ω 中，即 $A\subset\Omega$；

(4) 任何事件 A 都包含不可能事件 $\varnothing$，即 $A\supset\varnothing$.

这些性质是我们在讨论集合的包含关系时已知的，只是我们现在用了"事件"的语言. 我们在下面还会看到"集合"的语言与"事件"的语言的这种对应的表达.

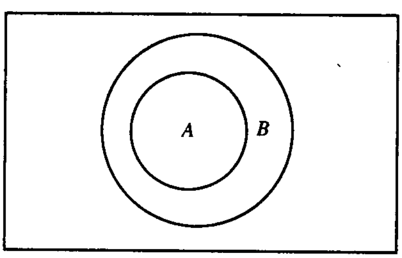


图 1-1

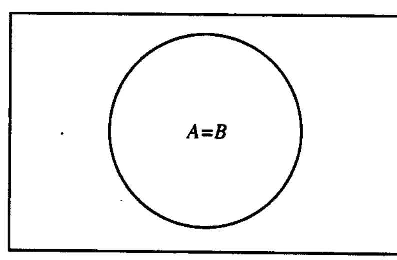


图 1-2

2) 相等关系

如果事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，事件 A 不发生时，必然导致事件 B 不发生，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$ 或 $B=A$.

容易知道，这等价于 A 与 B 作为集合的相等关系.

用"文氏图"表示 $A=B$，就是事件 A 的区域与事件 B 的区域完全重合(图 1-2).

如果既有 $A\subset B$、又有 $A\supset B$，则必有 $A=B$.

3) 对立(互逆)关系

如果事件 A 发生时，必然导致事件 B 不发生，事件 A 不发生时，必然导致事件 B 发生，则称 A 与 B 是**相互对立**(或**互逆**)的事件，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

从"文氏图"来看，$A=\overline{B}$，就是事件 A 的区域与事件 B 的区域没有公共部分，而且这两个区域拼合起来正好是整个样本空间 Ω，换句话说，A 是 Ω 中除去 B 后剩下的部分，B 是 Ω 中除去 A 后剩下的部分(图 1-3).

容易知道，这等价于作为集合的 A 与 B 是互为补集的关系.

事件的对立关系具有下列性质：

(1) $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$；

(2) $\overline{\overline{A}}=A$；

(3) $A\subset B$ 的充分必要条件是 $\overline{A}\supset\overline{B}$.

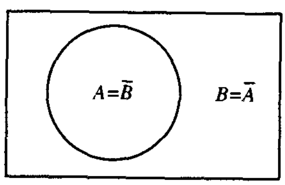


图 1-3

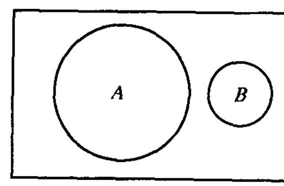


图 1-4

这些性质也是我们在讨论集合的关系时已知的.

4) 互不相容(互斥)关系

如果事件 A 发生时，事件 B 必然不发生(事件 A 不发生时，事件 B 可能发生也可能不发生)，则称事件 A 与 B **互不相容或互斥**，记为 $A\subset\overline{B}$ 或 $B\subset\overline{A}$.

从"文氏图"来看，事件 A 与 B 互不相容，就是事件 A 的区域与事件 B 的区域没有公共部分(图 1-4).

1.2.2　事件之间的运算

1) 事件 A 与 B 的和

"事件 A 与 B 中至少有一个发生"也是一个事件，称这个事件为事件 A 与 B 的和，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

图 1-5 中的阴影部分就是事件 A 与事件 B 的和事件 $A+B$.

容易知道，这 $A+B$ 等价于集合 A 与 B 的并集.

"n(n 可以是∞)个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$(或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$)，简记为

$\sum_{i=1}^{n} A_i$（或$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$）.

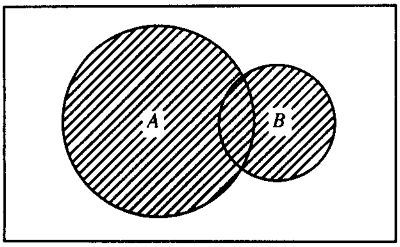


图 1-5

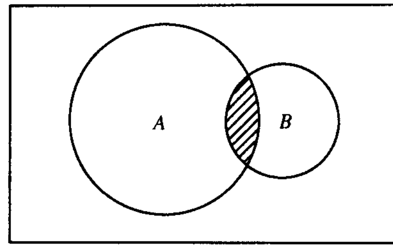


图 1-6

2）事件 A 与 B 的积

"事件 A 与 B 同时发生"也是一个事件，称这个事件为 A 与 B 的积，记作 AB 或 $A \cap B$.

图 1-6 中的阴影部分就是事件 A 与 B 的积事件 AB.

容易知道，这 AB 等价于集合 A 与 B 的交集.

"n（n 可以是∞）个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作 $A_1A_2\cdots A_n$（或 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$），简记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$（或$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$）.

3）事件 A 与 B 的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$ 或 $A\overline{B}$.

在图 1-7 中，A 与 B 相交；在图 1-8 中，$A \supset B$，两个图形里的阴影部分都表示事件 $A-B$.

容易知道，这 $A-B$ 等价于集合 A 与 B 的差集.

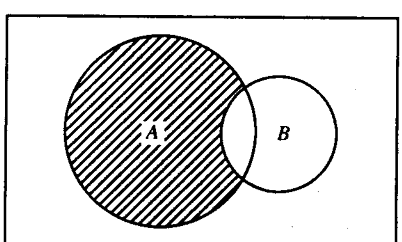


图 1-7

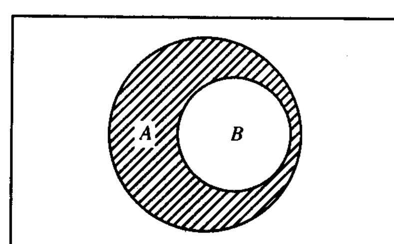


图 1-8

1.2.3 事件运算的规律和法则

下面给出一些关于事件运算的规律和法则. 这些运算法则(正好对应了集合论中的运算法则)我们都不详细证明了,但如果画出相应的"文氏图",则不难理解它们都是成立的.

(1) **交换律** $A+B=B+A$, $AB=BA$.

(2) **结合律** $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$.

(3) **分配律** $(A+B)C=AC+BC$, $AB+C=(A+C)(B+C)$.

(4) **德摩根(De Morgan)定律**

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

这一定律还可以推广到多个事件的情形,即有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n},\quad \overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}.$$

(5) $A\overline{A}=\varnothing$, $A+\overline{A}=\Omega$.

(6) 当 $A\subset B$ 时,必有 $AB=A$,$A+B=B$.

(7) 由于对任何事件 A,有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$,所以有

$$\varnothing A=\varnothing,\quad \varnothing+A=A,\quad A\Omega=A,\quad A+\Omega=\Omega.$$

(8) 如果 A 与 B 互不相容,即 $A\subset\overline{B}$,则必有 $AB=\varnothing$;反之,如果 $AB=\varnothing$,则必有 $A\subset\overline{B}$,即 A 与 B 互不相容. 所以,可以用 $AB=\varnothing$ 表示"事件 A 与 B 互不相容".

这一表示方法还可以推广到多个事件,甚至可列无穷多个事件,如果 n(n 可以是∞)个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

$$A_iA_j=\varnothing,\quad (1\leqslant i<j\leqslant n),$$

即这 n 个事件中任何两个事件都没有公共部分,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

例 1 摇奖机中有编号为 0,1,2,…,9 的 10 个奖球,随机摇出一个奖球. 设事件 A 是"摇出一个号码大于 5 的奖球",事件 B 是"摇出一个号码为奇数的奖球".

(1) 写出这一试验的样本点和样本空间;

(2) 将下列事件表示成样本点的集合,并分别说明它们是什么事件:

$$A,\ \overline{A},\ B,\ \overline{B},\ A+B,\ AB,\ A-B,\ B-A,\ \overline{A+B}.$$

解

(1) 样本点共有 10 个,它们是:

ω_i:表示摇出一个号码为 i 的奖球,$(i=0,1,\cdots,9)$,

样本空间为 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_9\}$.

(2) $A=\{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\}=\{$摇出一个号码大于 5 的奖球$\}$,

$\overline{A}=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=\{$摇出一个号码不大于 5 的奖球$\}$,

$B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}=\{$摇出一个号码为奇数的奖球$\}$,

$\overline{B}=\{\omega_0,\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}=\{$摇出一个号码为偶数的奖球$\}$,

$A+B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$

$=\{$摇出一个号码大于 5 或为奇数的奖球$\}$,

$AB=\{\omega_7,\omega_9\}=\{$摇出一个号码大于 5 而且为奇数的奖球$\}$,

$A-B=A\overline{B}=\{\omega_6,\omega_8\}=\{$摇出一个号码大于 5 而且为偶数的奖球$\}$,

$B-A=B\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$

$=\{$摇出一个号码为奇数但号码不大于 5 的奖球$\}$,

$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}=\{\omega_0,\omega_2,\omega_4\}$

$=\{$摇出一个号码为偶数而且号码不大于 5 的奖球$\}$.

例 2　设一个工人生产了 4 个零件. A_i 表示第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$),试用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示下列事件:

(1) 4 个零件中没有一个是次品；　(2) 4 个零件中至少有一个是次品；

(3) 4 个零件中只有一个是次品；　(4) 4 个零件中至少有三个不是次品.

解

(1) $A_1A_2A_3A_4$;　　(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$;

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2A_3A_4$.

例 3　设 A,B,C 是随机事件,试证 $(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$.

证　由事件差的定义、德摩根定律及分配律可知:

$$(A+B)-AB=(A+B)\overline{AB}=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}$$
$$=\varnothing+A\overline{B}+B\overline{A}+\varnothing=A\overline{B}+B\overline{A}.$$

1.3 概率与频率

前面讲过,随机现象具有偶然性的一面,在一次试验中,某个随机事件可能发生,也可能不发生,确实是无法预料的,是不确定的. 但是,如果我们在相同的条件下进行大量多次重复试验,就会发现,随机现象结果的出现,其实是具有一

定的规律性的，因而在某种程度上也是可以预言的.

我们首先从事件发生的频率谈起.

定义 1.1　如果一个随机事件 A，在 n 次试验中发生了 μ_n 次，则称 μ_n 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**，称比值 μ_n/n 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}.$$

如果试验的次数不多，求出的频率可大可小，似乎没有什么规律. 但是，如果我们进行大量重复试验，就会发现，频率在一个固定的常数值附近稳定地变化，而且随着试验次数的增多，这种稳定性会越来越明显.

下面举两个例子.

例 1　在掷一个硬币的试验中，硬币可能出现正面也可能出现反面，设 A 为"出现正面"的事件.

重复多次这样的试验，记录下试验次数即投掷硬币次数 n，观测事件 A 发生的频数即出现正面的次数 μ_n，求出事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$.

历史上有不少统计学家曾做过这样的"掷硬币"试验，他们得到的试验结果如下：

实验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 μ_n	频率 $f_n(A)$
德・摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从上面的试验结果可以看出，随着试验次数越来越多，出现正面的频率越来越明显地稳定在常数值 0.5 的左右.

例 2　对北京妇产医院 6 年中新生婴儿的数量和性别进行统计，得结果如下：

年份	新生儿总数	男孩数	女孩数	生男孩的频率
1972	5544	2883	2661	0.5200
1974	4063	2087	1976	0.5137

续表

年份	新生儿总数	男孩数	女孩数	生男孩的频率
1975	3913	2039	1874	0.5211
1977	3670	1883	1787	0.5131
1978	4250	2177	2073	0.5122
1979	4055	2138	1917	0.5273
6年总计	25495	13207	12288	0.5180

从表中的数据可以看出,虽然每年的新生婴儿数有多有少,男孩女孩数也有多有少,但是生男孩的频率却总是在一个常数值附近摆动.而且统计的数据越多(例如将6年的数据合在一起统计),频率的摆动幅度就越小,也就是说频率越是稳定.

类似的例子可以举出很多.从这些例子可以看出,随机事件在大量的重复试验中呈现出某种客观规律性,即具有频率的稳定性,当试验次数 n 充分大时,事件 A 的频率会稳定在某一常数值附近,这一常数值大,表明 A 发生的可能性大;这一常数值小,表明 A 发生的可能性小,这个常数反映了事件 A 发生的可能性的大小.

频率的稳定性说明,随机事件发生的可能性的大小,是由事件本身决定的,不随人的意志而改变的,是一种可以度量的客观的属性.因此,可以给出下列定义:

定义 1.2 在大量重复进行同一试验时,随着试验次数 n 的无限增多,随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$ 会越来越明显地稳定在某一常数值附近.这个常数度量了事件 A 发生的可能性的大小,称为事件 A 的**概率**,记作 $P(A)$.

上面给出的概率定义,由于是通过对频率的大量统计观测得到的,通常称为概率的统计定义.

这个定义比较直观,容易被人接受和理解.但是,很难用它来实际计算事件的概率.因为按照定义,要真正得到概率即频率的稳定值,必须进行无穷多次试验才行.实际上,我们不管做多少次试验,试验次数只能是有限的,而有限次试验后得到的频率并不是一个确定的常数,不同的人在不同的时候做试验,得到的频率都不一样.而事件发生的概率是一个客观存在的确定的常数,只要试验已被完全描述并且事件 A 已被指定,那么事件 A 发生的概率就被完全确定了下来,与做试验的人或他做试验时所碰上的特殊运气无关.

在下一节中,我们介绍一些不用凭借试验就可以计算出事件发生的概率的方法.