

# 第 I 篇

## 单自由度体系





# 第 1 章 运动方程、问题表述和求解方法

## 概 述

在开篇的这一章里，我们将用简单结构来阐述结构动力学问题，所谓“简单结构”是指可理想化为具有一个集中质量和一个无质量支撑结构的体系。我们将考虑线弹性结构以及非弹性结构承受外加的动力荷载或者地震引起的地面运动，然后简要评述求解结构运动控制微分方程的四种方法。在本章结束时，将对后续各章中如何安排单自由度体系动力反应的学习内容进行总结。

## § 1.1 简单结构

现在从图 1.1.1 所示的长廊和图 1.1.2 所示的水塔这样的简单结构开始学习结构动力学。当这些结构受到顶部的侧向(或水平)力作用或者承受由地震引起的水平地面运动时，我们想了解它们的振动。



图 1.1.1 这个长廊位于委内瑞拉首都加拉加斯附近的 Macuto-Sheraton 旅馆，在 1967 年 7 月 29 日的地震中由于钢管柱变形过大而损坏。该次地震的震级为 6.5 级，饭店距震中 15 英里。(经 G. W. Housner 允许)

我们称这些结构为简单结构，是因为它们能用一个具有侧向刚度为  $k$  的无质量结构支撑的一个集中(或集总)质量来理想化。对于这样一个有沉重的混凝土顶盖，由轻钢管柱支撑的长廊，作这样的理想化是合适的。混凝土顶盖很刚硬，结构侧向(或水平向)运动的柔度完全由

柱子提供。理想化体系为一对柱子支撑从属的一段混凝土顶盖，如图 1.1.3a 所示。该体系有一个集中质量  $m$ ，等于所示顶盖的质量，其侧向刚度  $k$  等于各管柱刚度之和。图 1.1.3b 所示的类似理想化体系适合于充满水的水箱。由于水的晃动在充满水时不可能发生，因此可将其看成是一个由相对较轻的、可假定为无质量的塔所支撑的集中质量  $m$ ，支撑水箱的悬臂塔对结构提供侧向刚度  $k$ 。目前，我们暂时假定这些结构的侧向运动是微小的，也就是说，支撑结构的变形在线弹性范围内。

本章稍后可见，在没有外部激励（作用力或地面运动）时，控制这些理想化结构侧向位移  $u(t)$  的微分方程为

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1.1.1)$$

式中， $u$  上面的点表示对时间的微分；因此， $\dot{u}$  表示质量的速度， $\ddot{u}$  表示它的加速度。第 2 章所介绍的此方程的解将表明，如图 1.1.3 所示理想化体系的质量被移至某初位移  $u(0)$ ，然后释放并允许自由振动，结构将在其初始平衡位置作往复振荡（或振动）。如图 1.1.3c 所示，相同的最大位移接续发生，振动永远继续，这些理想化体系决不会静止。当然，这是不切实际的。直觉告诉我们，如果长廊的顶盖或者水塔的顶部用绳索侧向拉开，然后突然切断绳索，结构将会以不断减小的振幅振动，并最终停止。在试验室里，用单层框架模型来做这种试验并测量它们自由振动反应的记录，如图 1.1.4 所示。像预期的一样，这些模型结构的运动随时间衰减，有机玻璃模型的衰减比铝质框架更快。

使振动的振幅稳定地减小的作用称为阻尼。阻尼作用耗散振动体系的动能和应变能，其各种机理将在后面讨论。为了考虑结构自由振动试验中观察到的振动衰减特性，目前我们只是



图 1.1.2 这个处于 40 英尺高单混凝土柱上的钢筋混凝土水箱，位于 Valdivia 飞机场附近，在 1960 年 5 月的智利地震中未曾损坏。当水箱充满水时，可将其作为单自由度体系分析。（来自 K. V. Steinbrugge 收藏品，经加州大学伯克利分校地震工程研究中心允许）

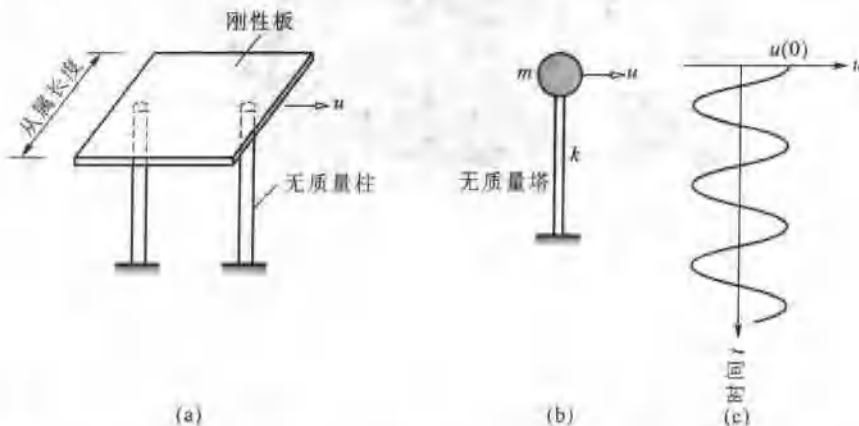
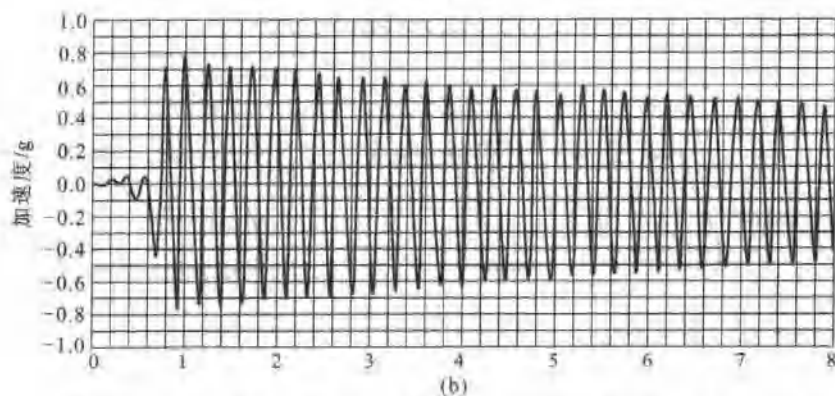


图 1.1.3 (a) 理想化的长廊；(b) 理想化的水箱；(c) 初位移引起的自由振动

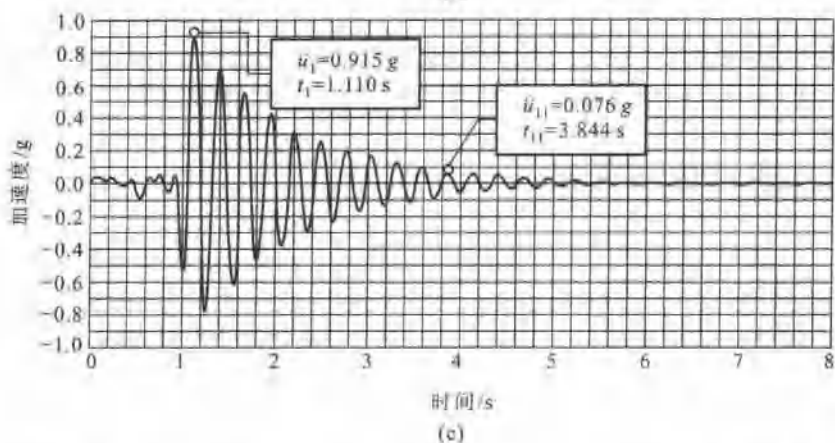
暂时地承认结构的理想化应该包含能量耗散机理。最常用的阻尼元件是粘滞阻尼器，部分原因是它所涉及的数学最简单。在第2章和第3章我们将介绍其他能量耗散机理。



(a)



(b)



(c)

图 1.1.4 (a) 在加州大学伯克利分校，用于教室演示的装在一个小振动台上的铝质的和有机玻璃的框架模型照片(经 T. Merport 允许)；(b) 铝质模型的自由振动记录；(c) 有机玻璃模型的自由振动记录

## § 1.2 单自由度体系

所考察的体系示于图 1.2.1 中, 它是由一个集中在顶部的质量  $m$ 、一个为体系提供刚度的无质量框架以及一个耗散体系振动能量的粘滞阻尼器(也称作减振器)组成。假设梁和柱无轴向变形。

可以将该体系看作是单层结构的理想化模型。实际结构的每个构件(梁、柱、墙等)都对结构的惯性(质量)、弹性(刚度或柔度)和耗能(阻尼)特性有影响。然而, 对于理想化体系, 每一个这类特性均集中在三个独立的且单一的元件里, 它们分别是质量元件、刚度元件和阻尼元件。

为了确定所有质量相对于它们初始位置所需要的独立位移的个数, 称为动力分析的自由度(DOFs)数。定义结构刚度特性所需的自由度数通常要比描述惯性特性所需的自由度数多。考察图 1.2.1 所示的单层框架, 迫使其仅在激励方向发生运动。为了确定框架的侧向刚度(见 § 1.3), 静力分析问题需要用三个自由度(侧向位移和两个结点转角)来描述。相反, 对于动力分析, 如果用集中在某个位置(通常位于顶部)的质量来理想化, 则结构仅有一个自由度——侧向位移。这样, 我们将其称为单自由度(SDF)体系。

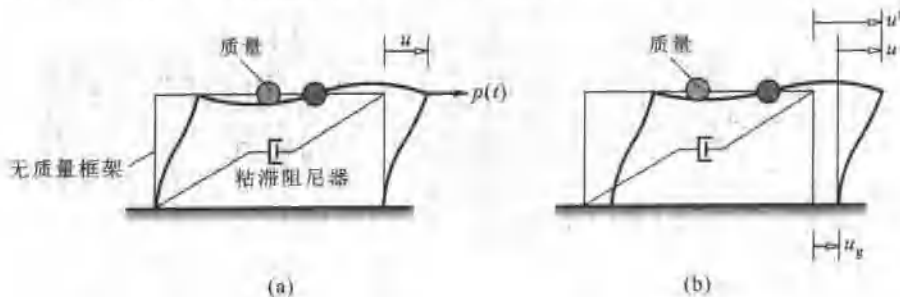


图 1.2.1 单自由度体系: (a) 作用力  $p(t)$ ; (b) 地震引起的地面运动

将考虑两类动力激励: (1) 沿侧向的外力  $p(t)$  (图 1.2.1a); (2) 地震引起的地面运动  $u_g(t)$  (图 1.2.1b)。在这两种情况下,  $u$  均表示结构的质量与基础之间的相对位移。

## § 1.3 力 - 位移关系

考察图 1.3.1a 所示的体系, 其上无动力激励作用, 只有一个沿所示自由度  $u$  方向外部作用的静力  $f_s$ 。抵抗位移  $u$  的内力是与外力  $f_s$  等值反向的(图 1.3.1b)。需要确定力  $f_s$  和与结构变形有关的相对位移  $u$  之间的关系。这个力 - 位移关系在小变形时是线性的, 而在大变形时是非线性的(图 1.3.1c); 这里既考虑非线性关系, 也考虑线性关系(图 1.3.1c 和 d)。

确定  $f_s$  和  $u$  之间的关系是结构静力分析中的一个标准问题, 假定读者对此分析是熟悉的。因此, 这里只给出简略的介绍, 并只限于那些基本问题。

### 1.3.1 线弹性体系

对于线性体系, 侧向力  $f_s$  与其引起的变形  $u$  之间的关系是线性的, 即

$$f_s = ku \quad (1.3.1)$$

式中,  $k$  是体系的侧向刚度, 它的单位是: 力/长度<sup>①</sup>。式(1.3.1)隐含着对结构小变形所确定的线性  $f_s - u$  关系对于大变形也是正确的这一假定<sup>②</sup>。这个线性关系意味着  $f_s$  是  $u$  的单值函数(即加载与卸载曲线是相同的), 称这样的体系为弹性的。因此, 为了强调这两方面的性质, 用线弹性体系这个术语。

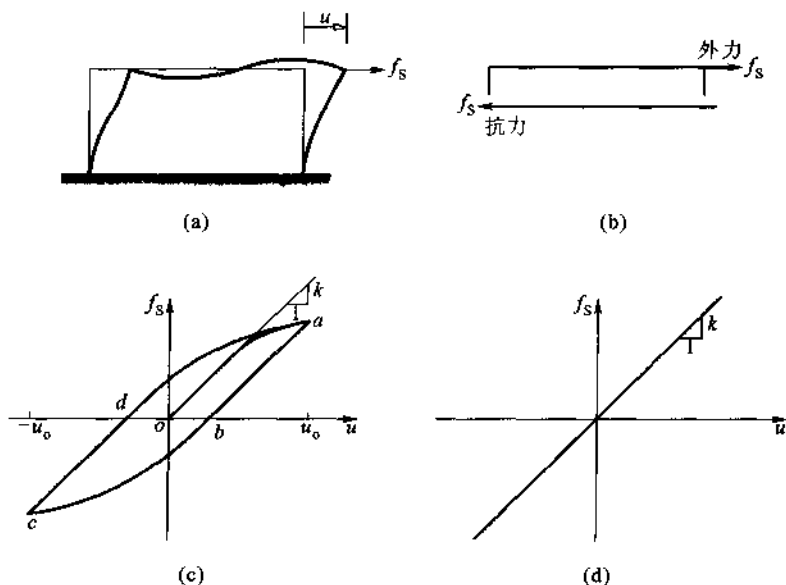


图 1.3.1

考察图 1.3.2a 所示的框架, 其跨度为  $L$ , 高度为  $h$ , 弹性模量为  $E$ , 梁和柱的横截面面积对弯曲轴的二次矩(即惯性矩)<sup>③</sup>分别等于  $I_b, I_c$ , 柱子嵌固(或固定)在基础上。在下述两种极端情况下, 框架的侧向刚度的确定并不困难: 如果梁是刚性的[即弯曲刚度  $EI_b = \infty$  (图 1.3.2b)], 则

$$k = \sum_{\text{柱}} \frac{12EI_c}{h^3} = 24 \frac{EI_c}{h^3} \quad (1.3.2)$$

另一方面, 如果梁无刚度[即  $EI_b = 0$  (图 1.3.2c)], 则

$$k = \sum_{\text{柱}} \frac{3EI_c}{h^3} = 6 \frac{EI_c}{h^3} \quad (1.3.3)$$

观察梁刚度的两个极端值, 可见框架侧向刚度与梁的长度  $L$  (或跨度) 无关。

当梁的实际刚度介于两个极端值之间时, 框架的侧向刚度可用标准的结构静力分析方法来计算。框架的刚度矩阵用三个自由度表示: 侧移  $u$  和两个梁柱结点的转角(图 1.3.2a)。通过

① 力和长度并不是单位, 而是量的名称, 应为力的单位/长度的单位, 后面类似的不再标注。——编辑注

② 对于大变形问题, 即使应力-应变关系仍然是线弹性的, 力-变形关系也不一定是线性的。这里的大变形应该理解为位移-变形(应变)几何关系仍是线性的情况(即不考虑几何刚度等)。——译者注

③ 在本书中,  $I$  的首选术语为面积二次矩, 用来代替常用的惯性矩, 后者将保留用于定义与刚体转动运动有关的惯性效应。——原书注

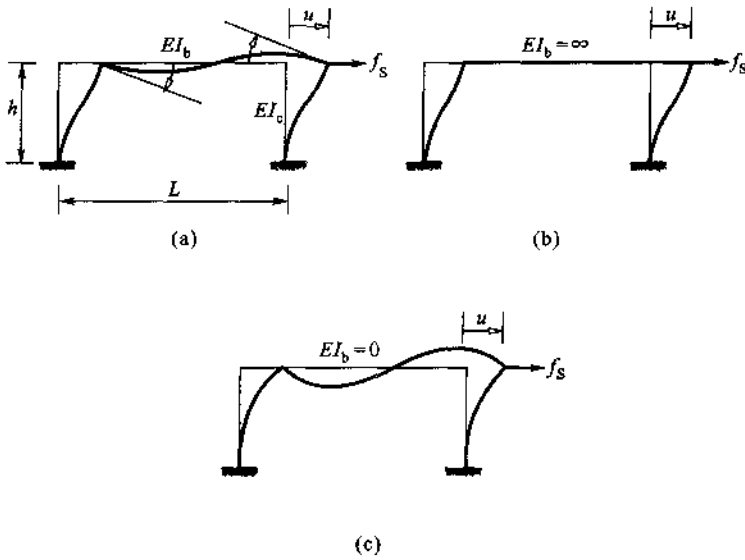


图 1.3.2

静力凝聚或消去转动自由度，可确定式(1.3.1)的侧向力-位移关系。对  $L=2h$ ， $EI_b = EI_c$  的框架应用这一方法，得到其侧向刚度为(见例题 1.1)

$$k = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3} \quad (1.3.4)$$

当  $I_b$  和  $I_c$  取其他值时，框架的侧向刚度可利用附录 1 所给的等截面弯曲单元的刚度系数做类似计算。如果忽略单元中的剪切变形，结果可以写成如下形式

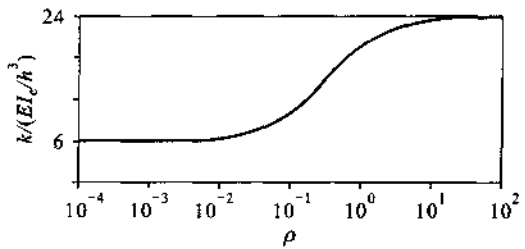
$$k = \frac{24EI_c}{h^3} \frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \quad (1.3.5)$$

式中， $\rho = I_b/4I_c$  为梁柱刚度比(将在 18.1.1 中详细阐述)。当  $\rho = 0$ ， $\infty$  和  $1/4$  时，式(1.3.5)分别化为式(1.3.3)、式(1.3.2)和式(1.3.4)的结果。作为  $\rho$  的函数，侧向刚度的图形示于图 1.3.3 中；随  $\rho$  从 0 增加到  $\infty$ ，侧向刚度增加 4 倍。

**例题 1.1** 计算图 E1.1a 所示框架的侧向刚度，假设单元不计轴向变形。

**解：**该结构可以用包括力矩分配的任意一种标准方法分析。为了解决问题，这里用刚度系数的定义。

体系有 3 个自由度，如图 E1.1a 所示。为了获得  $3 \times 3$  阶刚度矩阵中的第一列元素，令自由度  $u_1$  发生单位位移，同时使  $u_2 = u_3 = 0$ 。保持这个挠曲形式所需的力  $k_{11}$  示于图 E1.1b 中，使用附录 1 中的等截面弯曲单元刚度系数确定这些力。刚度矩阵第二列元素  $k_{21}$  是令  $u_2 = 1$ ，同时  $u_1 = u_3 = 0$  确定的，见图 E1.1c。类似地，刚度矩阵的第三列元素  $k_{31}$  可以令  $u_3 = 1$ ， $u_1 = u_2 = 0$  得到。这样就得到了结构的  $3 \times 3$  阶刚度矩阵，并能写出平衡方程。对于  $I_b = I_c$  并受到侧向力

图 1.3.3 侧向刚度  $k$  随梁柱刚度比  $\rho$  的变化



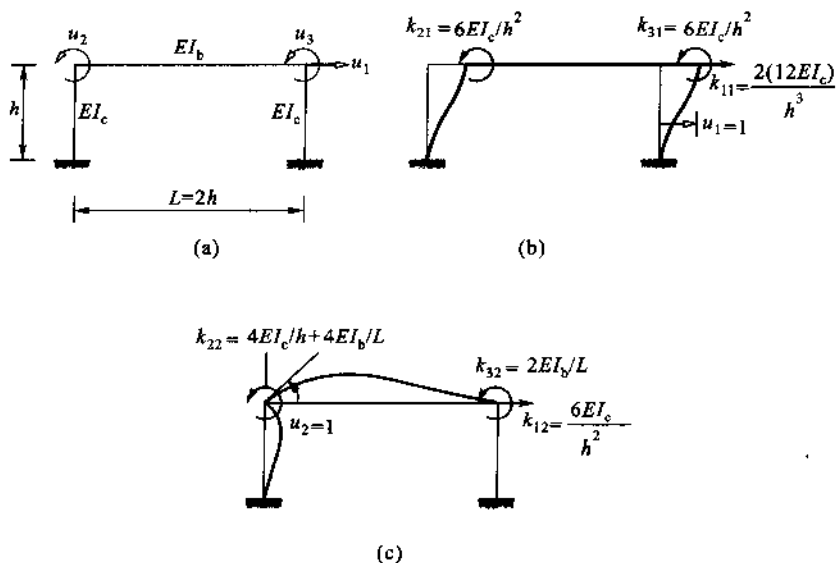


图 E1.1

$f_s$  作用的框架，平衡方程为

$$\frac{EI_c}{h^3} \begin{pmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

利用第二个和第三个方程，结点转角能用侧向位移表达如下：

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6h \\ 6h \end{pmatrix} u_1 = - \frac{6}{7h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)三个方程式中的第一个，得到

$$f_s = \left( \frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3} \frac{6}{7h} (6h \quad 6h) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) u_1 = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3} u_1 \quad (c)$$

这样，框架的侧向刚度为

$$k = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3} \quad (d)$$

这种消去结点转角的方法称为静力凝聚方法，在关于结构静力分析的教科书中有介绍，第9章我们将再回到这个课题。

### 1.3.2 非弹性体系

图 1.3.4 给出了由试验确定的一个结构钢构件经历循环变形时的力 - 变形关系曲线。初始加载曲线在大变形振幅时为非线性的，卸载和重新加载曲线均不同于初始加载曲线；这类体系称为非弹性的。这意味着相应于变形  $u$  的力  $f_s$  不是单值的，取决于变形的历史，以及变形是增加的(速度为正)还是减少的(速度为负)。因而，抗力可表示为

$$f_s = f_s(u, \dot{u}) \quad (1.3.6)$$

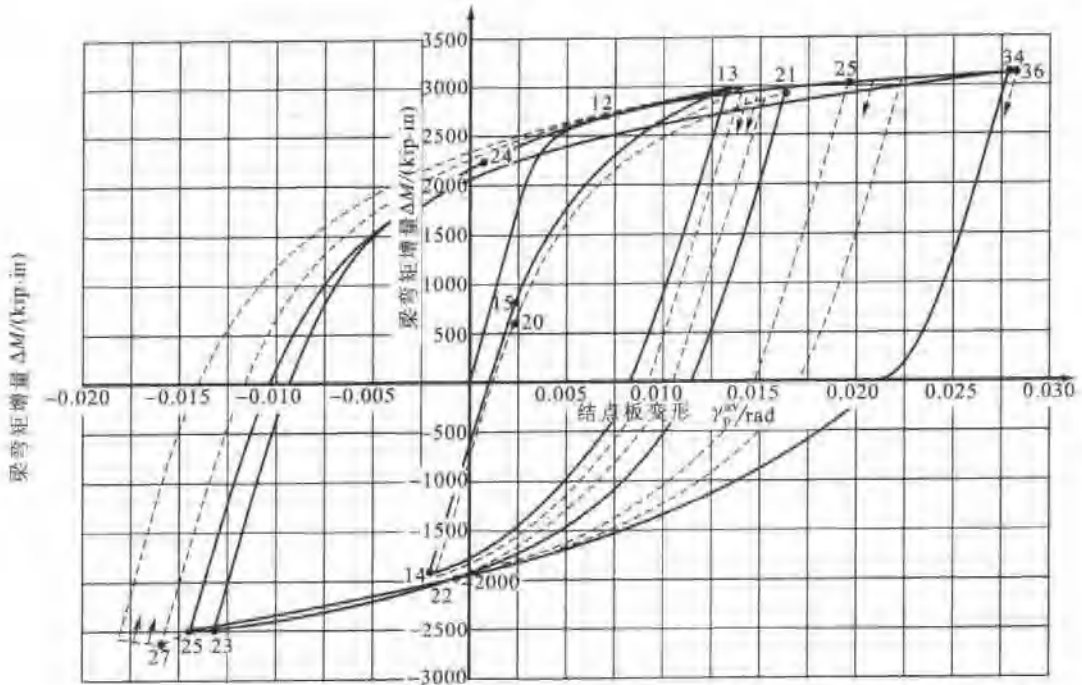


图 1.3.4 一个结构钢构件的力-变形关系

(摘自 H. Krawinkler, V. V. Bertero, and E. P. Popov, "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages," Report No. EERC 71-7, University of California, Berkeley, Calif., 1971.)

对于变形进入非弹性范围的理想化单层框架(图 1.3.1a), 其力-变形关系可用两种方法之一确定。一种途径是使用结构非线性静力分析方法, 例如, 在分析一个具有假定应力-应变律的钢结构时, 为了获得图 1.3.1c 所示的初始加载曲线( $o-a$ ), 分析记录在关键部位的屈服和扩展, 以及塑性铰的形成。卸载( $a-c$ )和再加载( $c-a$ )曲线可用类似的方法计算, 或者使用现有的假定从初始加载曲线定义。另一种方法是像图 1.3.4 那样将非弹性的力-变形关系定义为试验数据的理想化描述。

我们之所以对非弹性体系的动力反应研究感兴趣, 是因为许多结构的设计期望它们在地震引起的强烈地面摇晃中会经历某些开裂、屈服和破坏。

## § 1.4 阻尼力

前面提到, 使自由振动的振幅稳定地减小的作用称为阻尼。由于阻尼, 振动体系的能量可由各种机制耗散, 经常是多于一种的机制同时呈现。在简单的像图 1.1.4 所示的试验室模型那样“完美”的体系中, 大部分能量耗散可能是源于材料重复弹性变形的热效应以及固体变形时的内摩擦。而对于实际结构, 许多其他机理也对能量耗散起作用。在一个振动的建筑中, 它们包括钢连接中的摩擦、混凝土微裂缝的张开与闭合、结构自身与像填充墙那

样的非结构构件之间的摩擦。在实际建筑中，要识别或用数学描述这些能量耗散机理中的每一项似乎是不可能的。

因此，实际结构中的阻尼通常用高度理想化的方法描述。出于多种目的，单自由度结构的实际阻尼可满意地理想化为一个线性粘滞阻尼器或减振器。阻尼系数的选择，一般令其所耗散的振动能量与实际结构中的所有阻尼机理组合的能量耗散相当。因此，这种理想化称为等效粘滞阻尼，这个概念将在第3章中做进一步的阐述。

图 1.4.1a 显示一个线性粘滞阻尼器，受到沿自由度  $u$  方向的力  $f_D$  的作用。阻尼器的内力与外力  $f_D$  大小相等，方向相反(图 1.4.1b)。像图 1.4.1c 所示的那样，阻尼力  $f_D$  与线性粘滞阻尼器的速度  $\dot{u}$  有关，即

$$f_D = c\dot{u} \quad (1.4.1)$$

这里，常数  $c$  称为粘滞阻尼系数，它的单位为：力  $\times$  时间/长度。

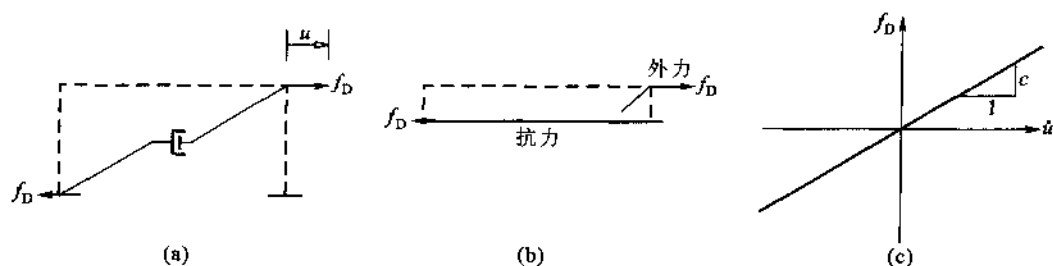


图 1.4.1

与结构的刚度不同，阻尼系数不能通过结构的尺寸和结构构件的大小来计算。这并不惊奇，因为像前面所解释的，要确定实际结构振动能量耗散的各种机理是行不通的。因而，实际结构的振动试验为计算阻尼系数提供数据。这些可能是自由振动试验，它导致像图 1.1.4 所示的那些数据，像第 2 章将要看到的那样，在自由振动中，测量出的运动衰减率将为计算阻尼系数提供一个基础。阻尼特性也可以由强迫振动(也称作受迫振动)试验确定，这一点将在第 3 章中讨论。

等效粘滞阻尼器是整体结构变形幅值在线弹性范围内的能量耗散模型。变形超过这个范围，由试验确定的阻尼系数  $c$  可能随变形幅值而改变。阻尼的这个非线性特性在动力分析中通常不直接考虑，而是通过对于期望的变形幅值(通常取与结构线弹性极限有关的变形)选择一个适当的阻尼系数值来间接地处理。

另外的能量耗散是由于结构大变形时的非弹性行为所引起的。在循环往复的力或变形下，这一特性意味着形成一个力-变形滞回环(图 1.3.1c)。在变形极限  $\pm u_s$  之间的一个变形循环，阻尼能量耗散由滞回环  $abcd$ (图 1.3.1c)的面积给出。这种能量耗散通常不用粘滞阻尼器模拟，尤其激励是地震地面运动时，其原因将在第 7 章中讨论。相反，最普通的、直接的和精确的考虑非弹性特性能量耗散的方法是辨识出抗力与变形之间的非弹性关系，像图 1.3.1c 和图 1.3.4 那样，由解运动方程来解决(第 5 章)<sup>①</sup>。这种力-变形关系是通过结构或结构构件的低变

<sup>①</sup> 作者实际是说，非弹性能量耗散不作为阻尼考虑，而是应该通过解运动方程时的非线性滞回分析来解决。——译者注

形速率试验获得的,这样就排除了率相关效应所引起的任何能量耗散影响。通常的做法是,在非弹性变形范围内的这种阻尼,仍用前面线弹性范围小变形所定义的相同粘滞阻尼器来建模<sup>①</sup>。

## § 1.5 运动方程:外力

图 1.5.1a 所示的是前面介绍的理想化单层框架,它受到一个沿自由度  $u$  方向外部作用的动力荷载  $p(t)$  的作用,这个符号表示力  $p$  随时间  $t$  变化。所导致的质量的位移也随时间变化,将其记为  $u(t)$ 。在 1.5.1 和 1.5.2 中,将用两种方法导出控制位移  $u(t)$  的微分方程:(1)牛顿第二运动定律;(2)动平衡。在 1.5.3 中还介绍了建立方程的另外一种观点。

### 1.5.1 利用牛顿第二运动定律

某瞬时作用在质量上的力示于图 1.5.1b 中,这些力包括外力  $p(t)$ ,弹性(或非弹性)抗力  $f_s$ (图 1.3.1)和阻尼抗力  $f_D$ (图 1.4.1)。外力以沿  $x$  轴正向为正,位移  $u(t)$ 、速度  $\dot{u}(t)$  和加速度  $\ddot{u}(t)$  也以沿  $x$  轴正向为正。弹性力和阻尼力如图所示反方向作用,因为它们是内力,分别抵抗变形和速度。

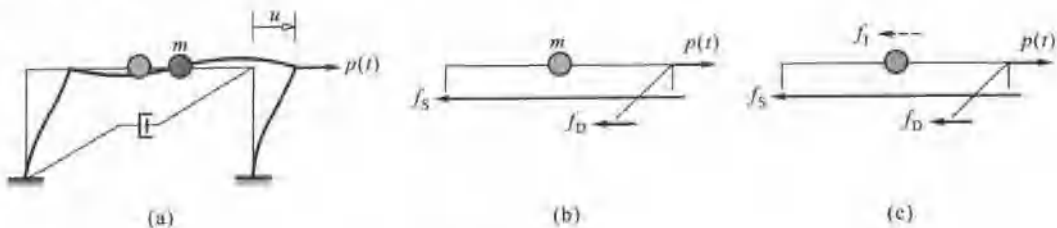


图 1.5.1

沿  $x$  轴方向的合力是  $p - f_s - f_D$ , 牛顿第二运动定律给出

$$p - f_s - f_D = m\ddot{u} \quad \text{或} \quad m\ddot{u} + f_D + f_s = p(t) \quad (1.5.1)$$

在代入式(1.3.1)和式(1.4.1)之后,方程成为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.5.2)$$

这是图 1.5.1a 所示的理想化结构,在线弹性假设并承受外部动荷载  $p(t)$  作用下控制变形或位移  $u(t)$  的运动方程。质量的单位是:力/加速度。

这个推导可容易地扩展到非弹性体系,方程(1.5.1)仍然有效,需要做的仅是将只局限于线弹性体系的式(1.3.1)用适合于非弹性体系的式(1.3.6)代替。对于这类体系,运动方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_2(u, \dot{u}) = p(t) \quad (1.5.3)$$

### 1.5.2 动平衡

已经习惯用力平衡来思考的结构工程师们,可能会发现达朗贝尔的动平衡原理格外吸引人。这个原理基于假想的惯性力概念,惯性力等于质量与加速度的乘积,作用方向与加速度反

<sup>①</sup> 应该理解为,体系的阻尼力由于不考虑非弹性滞回耗能的影响,因此和线弹性小变形一样来计算。——译者注

向。该原理指出，将惯性力包括在内时，体系在每一瞬时都处于平衡。这样，可以画出一个运动质量的隔离体受力图，可用静力学原理来获得运动方程。

图 1.5.1c 是  $t$  时刻的隔离体受力图，质量用它的惯性力代替，惯性力用虚线画出，以区别这个假想的力与真实的力。令所有力之和等于零，即可得到前面用牛顿第二运动定律所得的方程(1.5.1b)①。

### 1.5.3 刚度、阻尼和质量元件

在这一小节中，理想单层框架的控制方程是基于另外一种观点列出的。在外力  $p(t)$  作用下，体系的状态由位移  $u(t)$ 、速度  $\dot{u}(t)$  和加速度  $\ddot{u}(t)$  描述，见图 1.5.2a。现在想像体系由三个抽象的元件组合而成：(1)刚度元件：此时框架没有阻尼，也没有质量(图 1.5.2b)；(2)阻尼元件：此时框架具有阻尼特性，但没有刚度，也没有质量(图 1.5.2c)；(3)质量元件：顶层质量(图 1.5.2d)，没有框架的阻尼，也没有刚度。

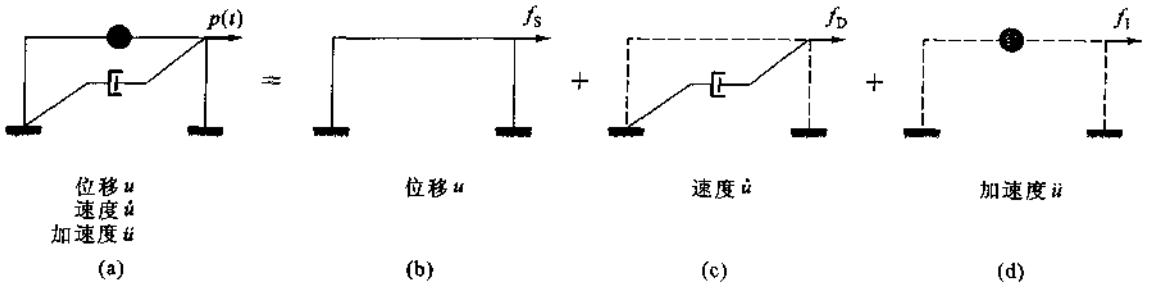


图 1.5.2 (a) 体系；(b) 刚度元件；(c) 阻尼元件；(d) 质量元件

如果体系是线弹性的，那么刚度元件上的外力  $f_s$  与位移  $u$  的关系由方程(1.3.1)确定；阻尼元件上的外力  $f_D$  与速度  $\dot{u}$  有关，由方程(1.4.1)确定；质量元件上的外力  $f_i$  与加速度有关，由  $f_i = m\ddot{u}$  确定。因此，作用在完整体系上的外力  $p(t)$  可以想像成分配给结构的三个元件中， $f_s + f_D + f_i$  必须等于施加的力  $p(t)$ ，从而导致方程(1.5.1b)。尽管这个另外的观点对于像图 1.5.2a 所示的简单体系似乎多余，但对于复杂体系是有用的(第 9 章)。

**例题 1.2** 一个小的单层工业建筑，平面为 20 英尺  $\times$  30 英尺，如图 E1.2 所示，在南—北向有抗弯框架，东—西向有支撑框架。结构的重量可理想化为集中在屋顶水平处的集度 30 磅力/英尺<sup>2</sup>。水平交叉支撑在屋盖桁架的下弦。所有柱子的截面为 W8  $\times$  24，它们的横截面面积对  $x$  轴和  $y$  轴的二次矩分别为  $I_x = 82.8$  英寸<sup>4</sup> 和  $I_y = 18.3$  英寸<sup>4</sup>。对于钢材， $E = 29\,000$  千磅力/英寸<sup>2</sup>。竖向交叉支撑由直径 1 英寸的杆做成。试列出在 (a) 南北方向，(b) 东西方向自由振动的控制方程。

解：屋顶处的集中质量为

$$m = \frac{w}{g} = \frac{30 \times 30 \times 20 \text{ 磅力}}{386} = 46.63 \text{ 磅力} \cdot \text{秒}^2 / \text{英寸} = 0.04663 \text{ 千磅力} \cdot \text{秒}^2 / \text{英寸}$$

① 在同一行中具有同一方程号码的两个或更多个方程，将被从左到右以方程 a、b、c 等来表示。——原书注

② 这种表述方式是不规范的，应在数值后加单位，本书为尊重原著并简略起见，将计算过程中的单位都省略了。——编辑注

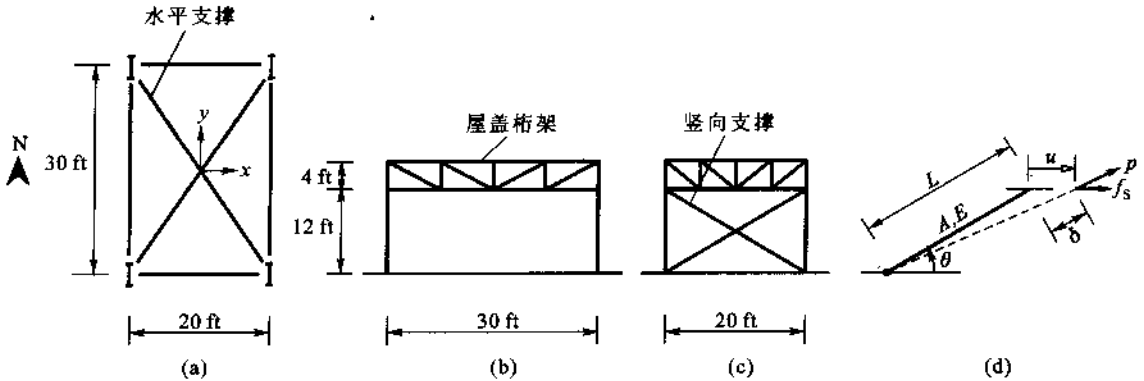


图 E1.2 (a) 平面图; (b) 东西向正视图; (c) 南北向正视图; (d) 交叉支撑

由于水平交叉支撑, 屋顶可以处理为刚性板。

(a) 南—北方向。因为屋盖桁架, 所以每根柱子均可视为两端嵌固的柱, 两根抗弯框架的侧向刚度(图 E1.2b)为

$$k_{N-S} = 4 \times \left( \frac{12EI_x}{h^3} \right) = 4 \times \frac{12 \times 29 \times 10^3 \times 82.8}{(12 \times 12)^3} = 38.58 \text{ 千磅力/英寸}$$

运动方程为

$$m\ddot{u} + (k_{N-S})u = 0 \quad (a)$$

(b) 东—西方向。图 E1.2c 所示的支撑框架, 通常设计成两个叠合的体系: 一个普通的刚架, 承受竖向荷载(恒荷载和活荷载), 加上一个竖向支撑体系, 通常被当作一个销钉连接的桁架, 用于抵抗侧向荷载。因此, 支撑框架的侧向刚度可由单个撑杆刚度之和来估算。一根撑杆的刚度为  $k_{brace} = (AE/L)\cos^2\theta$ , 其来源如下。

我们从一个撑杆的轴向力—变形关系开始:

$$p = \frac{AE}{L}\delta \quad (b)$$

依据静力学,  $f_s = p\cos\theta$ ; 根据运动学,  $u = \delta/\cos\theta$ 。将  $p = f_s/\cos\theta$  和  $\delta = u\cos\theta$  代入方程 (b), 得

$$f_s = k_{brace}u \quad k_{brace} = \frac{AE}{L}\cos^2\theta \quad (c)$$

对于图 E1.2c 所示的撑杆,  $\cos\theta = 20/\sqrt{12^2 + 20^2} = 0.8575$ ,  $A = 0.785 \text{ 英寸}^2$ ,  $L = 23.3 \text{ 英尺}$ , 由此

$$k_{brace} = \frac{0.785 \times 29 \times 10^3}{23.3 \times 12} \times 0.8575^2 = 59.8 \text{ 千磅力/英寸}$$

尽管每个框架有两根交叉撑杆, 但仅受拉的一根提供侧向抗力, 受压的另一根在小的轴力下将会屈曲, 对侧向刚度没有多少影响。考虑到是两个框架

$$k_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \text{ 千磅力/英寸}$$

运动方程为

$$m\ddot{u} + k_{E-W}u = 0 \quad (d)$$

注意到，忽略柱子的刚度的误差是较小的： $k_{col} = 12EI_c/h^3 = 2.13$  千磅力/英寸，而  $k_{base} = 59.8$  千磅力/英寸。

**例题 1.3** 一个 375 英尺长的混凝土箱梁桥放在四个支撑上——两个桥墩和两个对称布置的排架，如图 E1.3 所示。桥面板的横截面积为  $123$  英尺<sup>2</sup>。桥的重量理想化为集中于桥面板水平处，混凝土的单位重量为  $150$  磅力/英尺<sup>3</sup>，排架的重量可忽略。每个排架由 3 个 25 英尺高的圆截面柱子组成， $I_y = I_z = 13$  英尺<sup>4</sup> (图 E1.3b)。试列出沿纵向控制自由振动的运动方程。混凝土的弹性模量为  $E = 3\,000$  千磅力/英寸<sup>2</sup>。

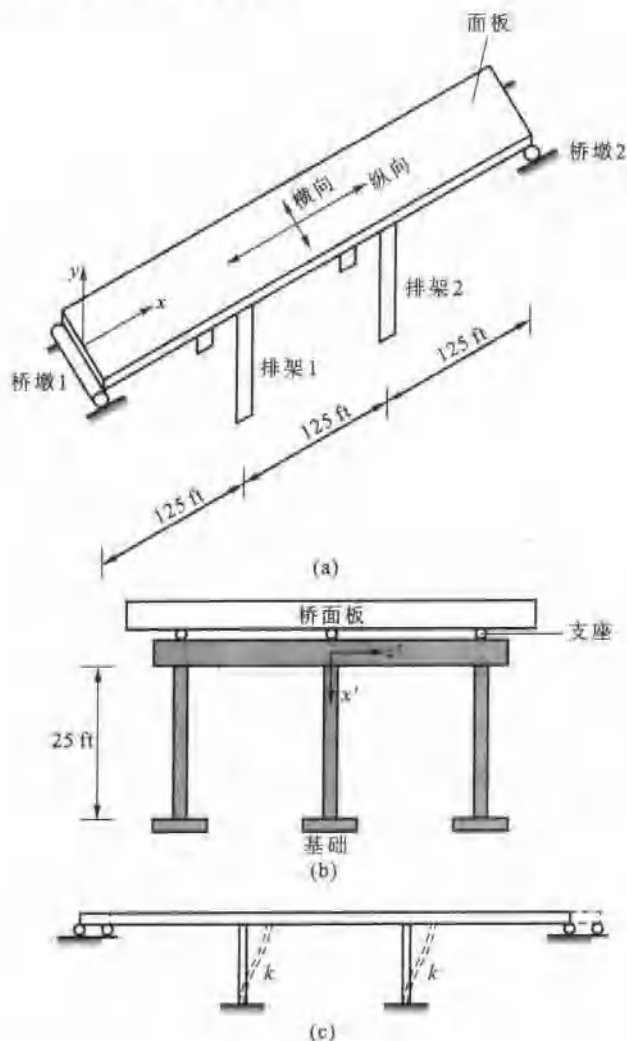


图 E1.3

**解：**集中于桥面板的每单位长度重量为  $123 \times 1 \times 150 = 18.45$  千磅力/英尺。集中于桥面板的总重量为

$$w = 18.45 \times 375 = 6\,919 \text{ 千磅力}$$

相应的质量为

$$m = \frac{w}{g} = \frac{6\,919}{32.2} = 214.9 \text{ 千磅力} \cdot \text{秒}^2 / \text{英尺}$$

计算桥的纵向刚度时，假定桥面如图 E1.3c 所示是刚性的移位。排架每根柱子的行为如两端嵌固的柱，每个排架提供的侧向刚度为

$$k_{\text{bout}} = 3 \times \frac{12EI_c}{h^3} = 3 \times \frac{12 \times 3\,000 \times 144 \times 13}{25^3} = 12\,940 \text{ 千磅力/英尺}$$

两个排架提供的总刚度为

$$k = 2 \times k_{\text{bout}} = 2 \times 12\,940 = 25\,880 \text{ 千磅力/英尺}$$

控制纵向位移  $u$  的方程为

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

## § 1.6 质量 - 弹簧 - 阻尼器系统

我们已经通过理想化一个单层结构(图 1.5.1a)介绍了单自由度体系，这种方法应该比较吸引结构工程的学生。不过，经典的单自由度体系是如图 1.6.1a 所示的质量 - 弹簧 - 阻尼器系统，此系统的动力学内容在机械振动和基础物理学的教科书里均有阐述。如果认为弹簧和阻尼器是无质量的，质量是刚性的，所有运动仅在  $x$  轴方向，即可得到一个单自由度体系。图 1.6.1b 给出了质量上的作用力，包括由刚度为  $k$  的线性弹簧施加的弹性抗力  $f_s = ku$ ，由线性粘滞阻尼器引起的阻尼抗力  $f_d = c\dot{u}$ 。牛顿第二运动定律给出方程(1.5.1b)。另外，运用 D'Alembert 原理写出在隔离体图中包括惯性力(图 1.6.1c)的所有力的平衡方程，也可获得相同的方程。显然，先前对于图 1.5.1a 所示的理想单层框架导得的运动方程也同样适用于图 1.6.1a 所示的质量 - 弹簧 - 阻尼器系统。

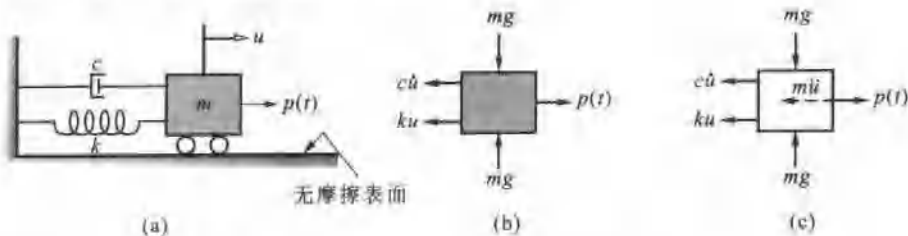


图 1.6.1 质量 - 弹簧 - 阻尼器系统

**例题 1.4** 推导图 E1.4a 所示重物  $w$  的运动方程，它悬挂在悬臂钢梁自由端处的弹簧上，对于钢材， $E = 29\,000$  千磅力/英寸<sup>2</sup>，忽略梁与弹簧的质量。

**解：**图 E1.4b 给出了梁自由端、弹簧和质量的变形位置。质量的位移  $\bar{u}$  从其初始位置量测，而梁与弹簧均位于初始无变形的位罝。图 E1.4c 所示的力平衡给出

$$m\ddot{\bar{u}} + f_s = w + p(t) \quad (a)$$

其中

$$f_s = k_s \bar{u} \quad (b)$$

体系的有效刚度  $k_s$  仍需确定。运动方程为



$$m\ddot{u} + k_c \bar{u} = w + p(t) \quad (c)$$

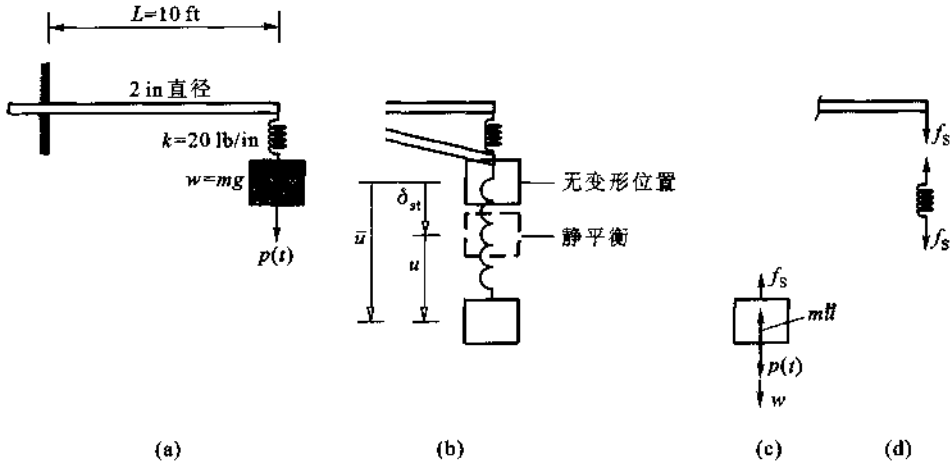


图 E1.4 (a) 体系；(b) 无变形、变形和静平衡位置；(c) 隔离体图；(d) 弹簧与梁受力

位移  $\bar{u}$  可以表示为

$$\bar{u} = \delta_{st} + u \quad (d)$$

其中  $\delta_{st}$  为重力  $w$  引起的静位移， $u$  是从静平衡位置量测的。将式(d)代入式(a)，并注意到：(1) 因为  $\delta_{st}$  不随时间变化，因此  $\ddot{\bar{u}} = \ddot{u}$ ；(2)  $k_c \delta_{st} = w$ ；由此得到

$$m\ddot{u} + k_c u = p(t) \quad (e)$$

注意到它与  $c=0$  时的弹簧-质量系统(图 1.6.1)沿水平方向运动的方程(1.5.2)是相同的；还应注意，控制从静平衡位置量测的  $u$  的运动方程(e)是不受重力影响的。

基于这个原因，我们通常将线性体系的动力分析问题以其静平衡位置作为参考位置。位移  $u(t)$  和体系中的相应内力将代表体系的动力反应，将相应的静力量加到动力反应中，即可得到总的位移和力。

有效刚度  $k_c$  仍需确定，它将静力  $f_s$  和总位移  $\bar{u}$  联系起来，即

$$f_s = k_c \bar{u} \quad (f)$$

其中

$$\bar{u} = \delta_{spring} + \delta_{beam} \quad (g)$$

式中， $\delta_{beam}$  是梁右端的变形， $\delta_{spring}$  为弹簧的变形。参考图 E1.4d，有

$$f_s = k\delta_{spring} = k_{beam}\delta_{beam} \quad (h)$$

在式(g)中，代入式(f)中的  $\bar{u}$  和式(h)中的  $\delta$ ，可得

$$\frac{f_s}{k_c} = \frac{f_s}{k} + \frac{f_s}{k_{beam}} \quad \text{或} \quad k_c = \frac{k k_{beam}}{k + k_{beam}} \quad (i)$$

现在， $k=20$  磅力/英寸，

$$k_{beam} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 29 \times 10^6 \times (\pi \times 1^4/4)}{(10 \times 12)^3} = 39.54 \text{ 磅力/英寸}$$

将  $k$  和  $k_{beam}$  代入式(i)，得出

$$k_c = 13.39 \text{ 磅力/英寸}$$