高等专科学校适用

工程与管理数学基础

成锡石 主编

机械工业出版社

高等专科学校适用

工程与管理数学基础

成锡石　主　编
彭德权　余亮云　副主编
侯振挺　邓国栋　主　审

机械工业出版社

(京)新登字054号

本书以国家教委最近颁布试行的高等专科学校有关数学课程的基本要求为依据，介绍了线性代数（包括投入产出），线性规划，概率论，数理统计等四个方面的重要而实用的内容。全书以掌握概念、强化应用、培养解决实际问题的能力为重点，紧密结合工程与管理实际，论证删繁就简，叙述简明通俗，习题难易适度，并在书末附有全部习题答案。本书可作为高等专科学校试用教材，也可作为高等学校的教材或教学参考书，以及工程技术人员和经济管理人员学习数学的自学读物。

工程与管理数学基础

成锡石　主编

*

责任编辑：杨丹琼　版式设计：冉晓华

封面设计：刘　代　责任校对：王惠英

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

湘潭东平印刷厂印刷

机械工业出版社发行

*

开本 787×1092 1/16・印张26・字数650千字

1992年8月湘潭第1版・1992年8月湘潭第1次印刷

印数　0 001-3 000・定价：12.59元

*

ISBN 7-111-03389-2/F·451(X)

前 言

根据国家教委提出的高等专科教育以培养技术应用型人才为主，基础课教学以应用为目的，以必须、够用为度的原则，我们在近几年的教学改革中进行了探讨和实践。为了加强教材基本建设，交流教学经验，推动教学改革的深入发展，湘潭机电专科学校，湖南城市建设专科学校，长沙大学，湖南纺织专科学校联合编写了这本《工程与管理数学基础》，以此作为我们继续深入进行教学改革的一个新起点，并与兄弟学校进行交流。同时也是为广大工程技术人员及管理人员提供一部系统的、通俗易懂的自学读物，并可作为电大、函大、夜大、职大等成人高校的教材或教学参考书。

本书是以国家教委颁布试行的高等专科学校有关数学课程的基本要求为依据编写的，内容包括线性代数（含投入产出），线性规划，概率论，数理统计四大部分。各部分内容相对独立，教师可根据各专业教学要求选择其中若干部分或全部进行讲授。国家教委颁布试行的有关数学课程的基本要求中打＊号的内容，本书也打上了＊号。本书以掌握概念、强化应用为重点。对概念及理论一般都由实例引出，叙述力求简明通俗，论证删繁就简，例题大部分结合工程与管理实际，习题的配置注意到其深度与广度，书末附有全部习题答案及管理数学用表。

本书由我国著名数学家、湖南省数学学会理事长侯振挺教授及湖南省数学学会理事、《湖南数学通讯》常务编委、长沙大学基础课部主任邓国栋副教授主审。长沙铁道学院李致中教授审阅了本书的第八至第十三章。他们提出了许多宝贵的修改意见。在本书的编写过程中，得到了参编学校各级领导的大力支持，得到了长沙铁道学院叶梅新副教授以及湘潭机电专科学校钱必胜副教授、周述洪副教授、马志高副教授、张建明等同志的大力支持和帮助。在此，一并表示诚挚的谢意。

参加本书编写工作的有：陈艳文（第一章），刘洁纯（第二章），曹炳元（第三、五、六章），唐岳山（第四章），张枚军（第七章），彭德权（第八、九、十章），徐科进（第十一、十二、十三章），余亮云（第十四章），夏学文（第十五、十六章），颜卫人（第十七、十八章），成锡石（第十九、二十、二十一、二十二、二十三章），皮敏（第二十四章）等，本书由成锡石担任主编，对全书进行了总纂。

由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，恳请同行专家及广大读者批评、指正。

编者

1992年3月

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　线性规划

第三篇 概 率 论

第四篇 数 理 统 计

第一篇 线性代数

在工程技术和经济管理活动中，大量存在着或近似地存在着变量之间的关系式是一次式的情况，这种关系我们称为线性关系。许多非线性关系的问题可以转化为线性关系来处理。因此，对线性关系的研究十分重要。线性代数是研究线性关系问题的最基本的数学工具。本篇我们将向读者介绍线性代数的基本知识，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容。作为线性代数的直接应用，在第七章中，还将介绍在经济各部门中广泛应用的投入产出数学模型。

第一章 n 阶行列式

第一节 n 阶行列式的定义

本节我们将在复习、分析二阶、三阶行列式的基础上，引出一般n阶行列式的定义。

一、二阶、三阶行列式与二元、三元线性方程组

在初等数学中，我们已经知道二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的解当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时可表示为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了使上述结果便于记忆，我们引入二阶行列式的概念：

定义1 把a_{11}，a_{12},a_{21},a_{22}4个数排成$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为一个二阶行列式，用来表示左上角和右下角（主对角线）两个数的乘积$a_{11}a_{22}$减去左下角和右上角（次对角线）两个数的乘积$a_{12}a_{21}$之差，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式有二行、二列。横写的称为行，竖排的称为列。行列式中的数又叫做行列式的元素，如a_{21}就表示位于第2行第1列上的元素。$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$又叫做行列式的展开式，其计算结果是一个数，叫做行列式的值。

按照二阶行列式的定义，二元线性方程组解的分子、分母都可以用行列式表示出来。

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D\neq 0$时，二元线性方程组的解可简单地表示为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

或
$$x_i=\frac{D_i}{D}\ (i=1,\ 2)$$

这里的D是由原二元线性方程组的未知量的系数按原来的顺序排列成的行列式，称为系数行列式；D_1是由常数项b_1, b_2分别代替系数行列式D中x_1的系数a_{11}, a_{21}以后所构成的行列式；D_2是用常数项b_1，b_2分别代替系数行列式D中x_2的系数 a_{12}，a_{22} 以后所构成的行列式。当系数行列式$D\neq 0$时，二元线性方程组有唯一的一组解。

同样地，对一般的三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时，三元线性方程组有唯一的一组解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}} \\ x_2=\dfrac{b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}} \\ x_3=\dfrac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}} \end{cases}$$

同样，为了使上式便于记忆和表达简单，我们引入了三阶行列式的意义：

定义2 我们将9个数排成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为一个三阶行列式，其值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

上式给出的三阶行列式的计算法则一般称为对角线法则。此法则可作如下叙 述 和 记忆（见图1-1-1）。

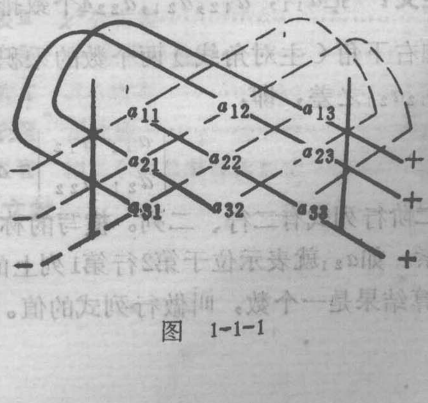

图 1-1-1

把三阶行列式左上角元素和右下角元素所

联成的对角线叫做主对角线，而把左下角元素与右上角元素联成的对角线叫做次对角线。一个三阶行列式是六项的代数和，其中三项取正号，三项取负号。带正号的三项中，有一项是主对角线上三个元素的乘积，另外二项都是在一条与主对角线平行的直线上的两个元素与对角上的一个元素的乘积，如图1-1-1实线所示；带负号的三项中，有一项是次对角线上三个元素的乘积，其余二项都是与次对角线平行的直线上的两个元素与对角上的一个元素的乘积。如图1-1-1虚线所示。

如果记$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为系数行列式，又以三元线性方程组的常数项$b_1$，$b_2$，$b_3$分别代替$D$中$x_1$，$x_2$，$x_3$的系数列而得到的行列式依次记为$D_1$，$D_2$，$D_3$，即：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则三元线性方程组当系数行列式$D\neq 0$时，其唯一的一组解可表示为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

或
$$x_i=\frac{D_i}{D}\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

用二阶、三阶行列式表示的二元、三元线性方程组的解在形式上是完全一样的，并且便于记忆。同理，n元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

也有类似的结论。这里首先有一个把二阶、三阶行列式的定义推广到n阶行列式的问题，即如何定义n阶行列式。

二、排列及其逆序数

为定义n阶行列式，我们先简单介绍排列及其逆序数的问题。

对于n个不同的元素组成的排列，我们规定各元素之间有一个标准的顺序，例如对n个不同的自然数，可规定由小到大为标准顺序。于是，在这n个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序。一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

逆序数为偶数的排列叫做偶排列，逆序数为奇数的排列叫做奇排列。逆序数为零，我们规定它为偶排列。

下面我们讨论计算排列逆序数的方法。

一般地，设n个元素为1至n这n个自然数，并规定由小到大为标准顺序。设$p_1p_2\cdots p_n$为n个自然数的某个排列。考虑元素p_i（$i=1$，2，…，n），如果比p_i大的且排在p_i前面的元素

有t_i个，就说p_i这个元素的逆序数为t_i，全体元素的逆序数之和：

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

就是这个排列的逆序数。

例1 试确定下列各排列的逆序数：

①43521；　②217689345；　③$(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1\cdot n$

解：先求出排列中各元素的逆序数，然后求出它们的和就得到各排列的逆序数。

①在排列43521中：

4排在首位，其逆序数为0；

3的前面比3大的数有1个，其逆序数为1；

5是最大的数，其逆序数为0；

2的前面比2大的数有3个，其逆序数为3；

1的前面比1大的数有4个，其逆序数为4。

将上面的结果列表如下（见表1-1-1）：

表 1-1-1

排　　列	4	3	5	2	1
各元素的逆序数	0	1	0	3	4

故排列43521的逆序数为：$0+1+0+3+4=8$。

②仿①列表计算如下（见表1-1-2）：

表 1-1-2

排　　列	2	1	7	6	8	9	3	4	5
各元素的逆序数	0	1	0	1	0	0	4	4	4

故排列217689345的逆序数为：$0+1+0+1+0+0+4+4+4=14$。

③仿①列表计算如下（见表1-1-3）：

表 1-1-3

排　　列	$n-1$	$n-2$	$n-3$	…	2	1	n
各元素的逆序数	0	1	2	…	$n-3$	$n-2$	0

故排列$(n-1)(n-2)(n-3)\cdots2\cdot1\cdot n$的逆序数为：$0+1+2+\cdots+(n-2)+0=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$。

三、三阶行列式的展开式的结构分析

根据三阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

我们可以看到，三阶行列式的展开式有以下几个特点：

(1) 展开式的每一项都是三个取自不同的行、不同的列的元素的乘积，即每一项都可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 j_1、j_2、j_3取1、2、3所有可能的六种排列中的一种排列。

(2) 展开式中每一项或者带正号，或者带负号。带正号的有三项，带负号的有三项。如果把每项各元素的第1个下标（行标）按1、2、3排列，那么带正号的三项的第2个下标（列标）j_1、j_2、j_3形成的排列分别为：

1，2，3；　　3，1，2；　　2，3，1

带负号的三项的第2个下标（列标）j_1、j_2、j_3形成的排列分别为：

3，2，1；　　2，1，3；　　1，3，2

计算上述六个排列的逆序数。通过计算，我们得知，前三个排列的逆序数分别为0、2、2；后三个排列的逆序数分别为：3、1、1。可见，前三个排列都是偶排列，后三个排列都是奇排列。因此，我们得到三阶行列式展开式各项的符号规律：若每项的行标按1、2、3排列，则每项所带的符号由它的列标形成的排列j_1、j_2、j_3的奇偶性决定：若是偶排列，带正号，若是奇排列，带负号。

(3) 展开式中正、负项的总数由j_1、j_2、j_3的全排列的种数决定，j_1，j_2，j_3的全排列有3!种，所以展开式中共有 3!＝6项。

总之，三阶行列式可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,j_3)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

式中 $\tau(j_1,j_2,j_3)$表示排列j_1、j_2、j_3的逆序数，$\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3)}$ 表示对j_1、j_2、j_3的所有排列求和。

上述三阶行列式展开式的结构特点，二阶行列式展开式也都具有，读者可自行验证。

四、n阶行列式的定义

把上述三阶行列式的结构特点推广到一般n阶行列式，我们得到n阶行列式的定义如下：

定义3 设有n^2个数$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，将它们排成一个有$n$行、$n$列的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称它为一个n阶行列式。它表示所有这样乘积的代数和：每个乘积中含有n个元素，每行一个，每列也一个。于是这些乘积都可以写成下面的形式：$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中每个元素的第1个下标（行标）是按1，2，3，…，n的自然顺序排列，第2个下标（列标）$j_1, j_2, \cdots, j_n$是1，2，…，n的某一个排列，每个这样的排列依1，2，3，…，n的顺序来比较，就有一个逆序数。当这个逆序数为偶数时，该项取正号；为奇数时，该项取负号。因为n个元素全排列共有n! 种，所以行列式的所有项数共n! 项。其中带正号的项和带负号的项各一半。

如果我们把上述定义用式子表示出来就是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

式中 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$表示排列j_1，j_2，…，j_n的逆序数，符号 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有j_1，j_2，…，j_n的排列求和。右端称为n阶行列式的展开式。

当$n=2$，$n=3$时，就得到二阶、三阶行列式的定义。我们规定只有一个元素a的行列式$|a|$就是a本身。注意这里不要与绝对值的记号相混淆。我们这样定义的二阶、三阶行列式显然与以前用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的。

例2 根据行列式的定义，计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$　② $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：在行列式展开式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，若有一个元素为零，则该项即为零。每一项的各元素取自不同的行与不同的列，每行或每列取一个而且只取一个元素。

① 在第1列的4个元素中，只有a_{11}不为零，故要使行列式的项不为零的话，只能取a_{11}。同理，第2列的4个元素只能取a_{22}，第3列的4个元素只能取a_{33}，第4列的4个元素只能取a_{44}。这就是说，原行列式的展开式中不为零的项只有一项，这就是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，此项带正号，因此，原式为：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

完全类似地可以证明，n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 要使行列式展开式中的项不为零，第4列的元素只能取a_{14}，第3列的元素只能取a_{23}，第2列的元素只能取a_{32}，第1列的元素只能取a_{41}。也就是说，展开式中只有一项$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$不为零，其余各项均为零。不为零的这一项的符号决定于排列4321的逆序数。经计算可知其逆序数为6，故该项带正号。所以，原式为：$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

完全类似地可以证明，n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$$

根据此例的结论，我们可知：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times2\times3 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

例2的两个行列式称为三角形行列式。关于三角形行列式的这两个结论在解题时经常用到，读者最好记住这个结论。根据这个结论我们还可以推出下面的对角行列式（对角线上的元素是λ_i，$i=1, 2, \cdots, n$，未写出的元素均为0）：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

第二节　n阶行列式的性质

如果根据定义计算一个n阶行式的值，就必须要计算$n!$项的代数和，这是相当麻烦的，而且随着n的增大，项数迅速增加。如$4!=24$，$5!=120$，$8!=40320$，$10!=2628000$。为了简化行列式的计算，就需要进一步讨论行列式的性质。下面我们列出这些基本性质，并以三阶行列式为例加以验证，只对性质5给以一般的证明。

定义1　把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次用序号数相同的列去代替，所得到的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做D的转置行列式。显然，D也是D'的转置行列式，即D与D'互为转置行列式。

性质1　行列式D与它的转置行列式D'的值相等，即$D=D'$。

例如，行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2; \quad D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

性质1说明，在行列式中，行与列具有同等的地位。因此，凡是对列成立的性质，对行也成立，反之亦成立。所以下面的性质我们仅对行进行讨论，对列就不重复了。

性质2　互换行列式的两行，其值变号。

例如，行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1 & 2 & 4\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}=2$$

互换D的第1行与第2行，得：

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 2 & 5\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}=-2$$

由性质2可得如下推论：

若行列式D中有两行完全相同，则$D=0$。

如行列式：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

性质3 若行列式的某一行中所有各元素都乘同一数k，则其结果就等于用数k乘这个行列式。

例如，行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1 & 2 & 4\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}$$

用2乘该式的第2行的各元素则得行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1\times2 & 2\times2 & 4\times2\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}=4=2D$$

由此性质可得如下两个推论：

推论1 如果行列式中某一行的所有元素都是零，那么该行列式的值为零。

推论2 如果行列式中有两行的对应元素成比例，则此行列式的值为零。

例如，行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\0 & 0 & 0\\7 & 8 & 4\end{vmatrix}=0;\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 6 & 8\\4 & 7 & 9\end{vmatrix}=0$$

性质3也可以这样来叙述：若行列式的某一行中有公因数k，则可以把k提到行列式符号外面。

性质4 如果行列式的某一行的各元素都是两数之和，即：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则该行列式等于下面两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1+0 & 1+1 & 2+2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=10-8=2$$

性质4还可以推广到某一行中各元素有k个数之和的情况。

性质5 如果把行列式的某一行中的各元素同乘以数k，再加到另一行中各对应元素上，则该行列式的值不变。

例如，行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

用3乘该式第1行的各元素，再加到第2行各对应元素上，得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1+3 & 2+6 & 4+15 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 19 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=2=D$$

证：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

以数k乘D的第i行各元素，再加到第j行各对应元素上，得：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=D+0=D$ 证毕。

下面我们举例说明，如何利用上述性质简化行列式的计算。在运算中用到如下各符号：r_i表示第i行；c_i表示第i列；$r_i\longleftrightarrow r_j$表示第$i$行与第$j$行互换；$r_j+kr_i$表示第$i$行各元素乘以数$k$加到第$j$行的各对应元素上；$c_i\longleftrightarrow c_j$表示第$i$列与第$j$列互换；$c_j+kc_i$表示第$i$列各元素乘以数$k$加到第$j$列各对应元素上。

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解： 原式$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&1&2&2\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&2&2\\0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-1\\0&0&-1&-2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-\frac{1}{2}r_3}\begin{vmatrix}1&1&2&2\\0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-1\\0&0&0&-\frac{3}{2}\end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-2)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

例2 计算行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\201&102&-99\end{vmatrix}$$

解：

$$原式=\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\200+1&100+2&-100+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\200&100&-100\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&2&1\\4&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-9&-3\\0&-3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-3r_3}-\begin{vmatrix}1&2&1\\0&0&6\\0&-3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-3&-3\\0&0&6\end{vmatrix}=1\times(-3)\times6=-18$$

例3 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

解：

$$原式\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2cr_1]{r_2-2br_1}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-(a+b+c)&0\\0&0&-(a+b+c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^3$$

例4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ c & c & a & c \\ d & d & d & a \end{vmatrix}$$

解：

$$\text{原式}\xlongequal[r_4-dr_1]{\substack{r_2-br_1\\r_3-cr_1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-d \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)$$

例5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 8 \\ -4 & -5 & -7 & -8 & 0 \end{vmatrix}$

解：

$$D=D'=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 8 \\ -4 & -5 & -7 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-D \quad \text{即} D=0$$

在行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，若 $a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则$D$叫作对称行列式；若$a_{ij}=-a_{ji}$，从而$a_{ii}=0$，则$D$叫作反对称行列式。例5的行列式就是一个 5 阶 反对称行列式。仿例5,我们可以证明：奇数阶反对称行列式等于零。证明过程读者可自己写出。

第三节　行列式按行(列)展开

一般来说，低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算简便。因此，我们要解决用低阶行列式来表达高阶行列式的问题，从而简化行列式的计算。为此先引进余子式和代数余子式的概念。

定义1 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来 的 $n-1$ 阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；把$(-1)^{i+j}$与余子式M_{ij} 的乘积$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素a_{ij}的代数余子式，用A_{ij}表示。即：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如三阶行列式：