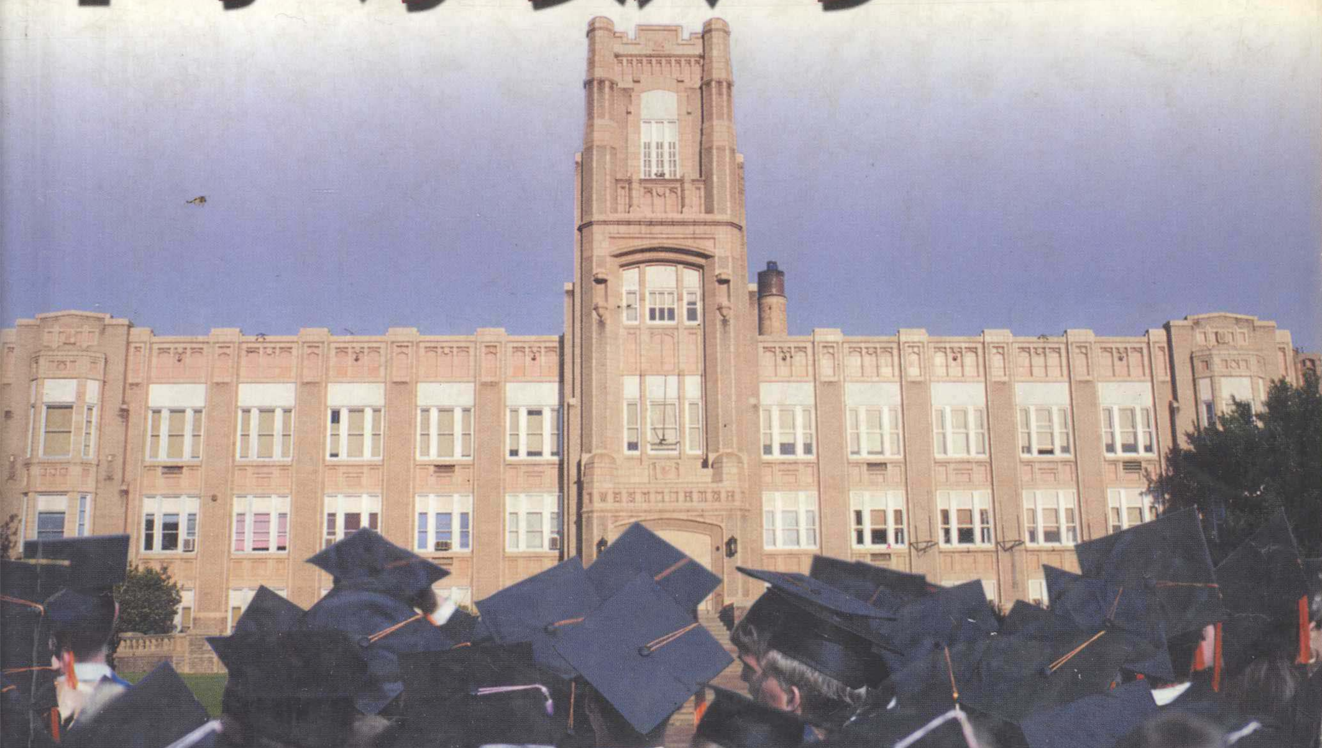
全国各类成人高考复习丛书

全国成人高考复习教材

专升本·统考科目

高等数学(一)



成人高考专升本考试指导中心　编写

光明日报出版社

★ 全国各类成人高考复习丛书 ★

全国成人高考复习教材

专升本·统考科目

高等数学(一)

成人高考专升本考试指导中心 编写

光明日报出版社

责任编辑：茹新平
封面设计：蓝田

图书在版编目(CIP)数据

全国成人高考复习教材．高等数学(一)(专升本)/《全国成人高考复习教材》编写组编．—北京：光明日报出版社，2002.9

ISBN 7-80145-572-X

Ⅰ．全…　Ⅱ．全…　Ⅲ．理科(教育)-课程-成人教育：高等教育-自学参考资料
Ⅳ．G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 058772 号

全国成人高考复习教材
专科起点升本科
高等数学(一)
光明日报出版社
北京市宣武区永安路 106 号

新华书店总经销
天津市蓟县宏图印务有限公司印刷
787×1092 毫米　16 开　200 印张　4000 千字
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-80145-572-X/G·327
全套总定价：472.00 元

出版说明

为了帮助报考各类成人高等学校的考生顺利通过考试,由具有多年教学经验、从事成人高考辅导的特级教师以及相关学科的资深学者、专家成立了专门的研究组和考试指导中心,以国家教育部最新颁布的大纲为依据编审出以下系列成考权威用书。

A.**《全国成人高考复习教材》**包括专升本与高中起点升专、本科两大类,覆盖两类中的各学科。

B.**《全国成人高考复习综合教程》**包括文科、理科、西医科、历史地理综合科、物理化学综合科。

C.**《全国成人高考命题预测试卷》**包括专升本与高中起点升专、本科两大类,覆盖两类中的各学科。

A类是成人高考单科复习专用教材,包括各学科的基础知识及练习,是考生系统复习各科课程的好教材。此书逐章讲解、同步练习,附有考试大纲和近年的全国统考试题及答案,特别方便学习。

B类是成人高考高中起点升专、本科考试的各科合订本,文科含英语、语文、数学(文)三科;理科含英语、语文、数学(理)三科;西医科含英语、语文、医学基础、医学临床科。各科包括【知识结构】、【复习要点】、【检测练习】、【练习答案】,其中数学、物理、化学还附有【典型例题】,本书附有考试大纲和最新考题以及模拟试题,是考生短期内迅速补习中学课程的综合性教程。物理化学综合科与历史地理综合科是各两科的合并。

C类是专升本及高中起点升专、本科各统考目的模拟预测试卷,每科包含5-8套模拟预测试卷。完全按照真卷的题型、题量设计,真卷装订,反映了最新出题热点和考试精神,十分适合考生作考前预测练习。每套试卷均有答案及评分标准,方便考生自我检测。

以上系列丛书是根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生考试大纲——高中起点升本、专科》及《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲—专科起点升本科》精心编写而成。

考生应该引起重视的是:根据以上两大纲,2003年起成人高考有较为重大的调整:

第一,在高中起点升专本科考试中,将不再考核政治,外语成绩首次100%计入高中起点考生总成绩中。

第二,高中起点升专科的考试分文理两种,文科考英语、语文、数学(文);理科考

英语、语文、数学(理),高职不再单列,也归入专科类。

第三,高中起点升本科的考试科目改为5门,在专科考试科目基础上,理科考生加考物理化学综合卷,文科加考历史地理综合卷。每门满分均为150分,考试时间120分钟。(即5门科目,4张试卷,4场考试)

第四,取消专升本的师范类、非师范类之分,统考科目除政治、外语另加一门专业基础课,共三门。专升本每门考试时间为150分钟,每门满分150分。专升本各学科统考专业基础课如下表所示:

统考专业基础课	对应报考专业
大学语文	哲学、文学(艺术类除外)、历史学以及中医学类(一级学科)
艺术概论	艺术类(一级学科)
高等数学(一)	工学、理学(生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类等四个一级学科除外)
高等数学(二)	经济学、管理学、农学以及职业教育类、生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类、药学类六个一级学科
民　　法	法学
教育理论	教育学(职业教育类一级学科除外)
生态学基础	农学
医学综合	医学(中医学类、药学类等两个一级学科除外)

以上系列丛书,紧扣大纲精神,在覆盖新大纲知识点的前提下,力求突出以下特点:

1. 内容充实,体例清晰、重点突出,例题与练习题都贴近考试真题,应考针对性极强。

2. 适合成人学习,方便快速吸收,注重各学科现代的新知识,精心打造,增大篇幅。从而,使丛书伸长了触角和拓展了覆盖的幅射面。**例如语文,仅选择基本课文导读,就比去年翻了一番,是目前与读者见面的同类书中选择篇目最全的,足以免除资料不全带来的不便。**

3. 版式设计做到形式为内容服务、为重点突出,将书中的重点难点用波浪线、着重符号等直观表现,使本丛书简明、实用。

尽管这样,本书难免不足,欢迎读者批评指正。此《丛书》除供各类成人高等学校考生复习备考用外,也可供成人高中、中等职业学校的学生、教师和教研人员学习、参考。更是全国成考辅导班的首选教材。

本丛书编者

目　录

高等数学(一)

第一章　函数、极限与连续

§1.　函　　数

【知识结构】

- 函数
  - 函数的概念
    - 函数的定义
    - 函数的表示法
    - 分段函数
  - 函数的简单性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 反函数
    - 反函数的定义
    - 反函数的图象
  - 基本初等函数及其图象
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数
  - 函数的四则运算与复合运算
  - 初等函数

【命题精要】

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个给定的数集，f 是一个确定的对应关系，如果对于 D 中的每一个元素 x，通过 f 都有 R 中唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系，简称函数，记作

$$f:D \to R \text{ 或 } f(x) = y$$

按照函数 f 与 $x \in D$ 所对应的 $y \in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值，记作 $y = f(x)$，并称 D 为函数 f 的定义域，而 f 的函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数关系通常用 $y = f(x), x \in D$ 来表示，并称 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

注：(1) 函数定义中最本质的是：① 对应法则：对应法则用记号 f 表示，它不只表示某一数学表达式，也可以用几个数学式子，甚至可以用一个图形或一张表格表示，关键是它确定了两个数集之间的对应规则即可. ② 定义域：定义域分两种情况：在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定；在单纯由数学表达式定义的函数时，其定义域是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的数集.

(2) 两个函数相同(或恒等)当且仅当它们的对应法则和定义域都相同.

2. 函数的表示法

解析法，如 $y = f(x)$；图象法；表格法.

3. 分段函数

在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数.

注意，分段函数在其定义域上表示的是一个函数，而不是几个函数.

二、函数的简单性质

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $\mathrm{I} \subset D$，如果存在正数 M，使得对一切 $x \in \mathrm{I}$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $\mathrm{I} \subset D$，任给 $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$，且 $x_1 < x_2$，如果恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；如果恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注意，讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域必须关于坐标原点对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T(T \neq 0)$，使得对于定义域 D 中的任何 x，$x \pm T$ 也在定义域 D 中，且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的，但并不是每个周期函数都有周期.

三、反函数

设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数，其值域为 Z，如果对每个 $y \in Z$，都有唯一的对应值 $x \in D$，满足 $y = f(x)$，则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x = f^{-1}(y), y \in Z$$

并称其为 $y = f(x)$ 的反函数.

通常以 x 为自变量，则 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x), x\in Z$；且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注意，严格单调增加(或减少)的函数有反函数，有些函数在其定义域内不是单调函数，但它在其子区间上是单调的，这时可在其子区间上讨论它的反函数.

四、基本初等函数及其图形

1. 常数函数：$y=c$(c 为常数).

2. 幂函数：形如 $y=x^{\mu}$(μ 是常数)称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定. 但是不论 μ 取何值，在区间 $(0,+\infty)$ 上它总是有定义的.

对于常见的幂函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\sqrt{x}, y=x^{\frac{1}{3}}$ 应掌握它们的定义域、值域和单调性.

3. 指数函数：形如 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 称为指数函数. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时，函数是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，函数是单调减少的. 指数函数的图形总在 x 轴上方. 且过点 $(0,1)$.

4. 对数函数：指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 称为对数函数. 它的定义域为 $(0,+\infty)$. 值域为 $(-\infty,+\infty)$，当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 为单调减少的. 对数函数的图形位于 y 轴右方.

注意，对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，其定义域和值域互相对应，一个函数的定义域恰好是另一个函数的值域.

互为反函数

特别地，取 $a=e$，得自然对数函数：$y=\ln x$.

5. 三角函数与反三角函数

(1) 正弦函数　函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，且为有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数.

(2) 余弦函数　函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，且为有界函数、偶函数和以 2π 为周期的周期函数.

(3) 正切函数　函数 $y=\tan x$ 称为正切函数. 它的定义域为 $(k\pi 1\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数.

(4) 余切函数　函数 $y=\cot x$ 称为余切函数. 它的定义域是 $(k\pi-\pi, k\pi)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数.

(5) 正割函数　函数 $y=\sec x$ 称为正割函数. 它是余弦函数的倒数，即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$. 它的定义域是 $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数，且是偶函数.

(6) 余割函数　函数 $y=\csc x$ 称为余割函数. 它是正弦函数的倒数，即 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$. 它的定义域为 $(k\pi-\pi, k\pi)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 它是以 2π 为周期的周期函数，且是奇函数.

(7) 反三角函数　由于三角函数在它们的定义域内不是单调的，在通常意义下无法讨论其反函数. 通过限制它的定义域范围，使其成为单值的，这样得到的三角函数的反函数称为反三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数依次为

反正弦函数　$y = \arcsin x$，定义域$[-1,1]$，值域$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

反余弦函数　$y = \arccos x$，定义域$[-1,1]$ 值域$[0,\pi]$. 反正弦函数是单调增函数、奇函数；反余弦函数是单调减函数.

正切函数　$y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的反函数依次为

反正切函数　$y = \arctan x$，定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

反余切函数　$y = \operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0,\pi)$. 反正切函数是单调增函数，且是奇函数；反余切函数是单调减函数.

上述五种函数统称为基本初等函数，是最常用、最基本的函数，它们的定义域、性质和图形（图形请参考相关教科书）应当牢记.

注：1° 指数函数运算性质有

$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$，$(ab)^x = a^x b^x$，$(a^x)^y = a^{xy}$

2° 对数函数运算性质有

$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$，$\log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$，

$\log_a x^b = b\log_a x$，$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$，$a^{\log_a x} = x$，

3° 常用的三角公式

$\sin(-x) = -\sin x$，$\cos(-x) = \cos x$，

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，

$\sin x \cdot \csc x = 1$，$\cos x \cdot \sec x = 1$，$\tan x \cdot \cot x = 1$，

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$，

$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$，

$\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$　$\cos 2x = 1-\cos^2 x$

五、函数的四则运算与复合运算

1. 四则运算：对于同一定义域 D 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$. 定义函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的以下四则运算

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)\ (g(x) \neq 0)$

以上运算可推广至任意有限个函数

2. 设 y 是 u 的函数：$y = f(u)$，而复合运算又是 x 的函数：$u = \varphi(x)$，且函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的全部或一部分包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内，则对 $u = \varphi(x)$ 的定义域内的某些 x，通过变量 u，变量 y 有确定的值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数，称此函数是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

注意，不是任何两个函数都能复合成复合函数，关键是 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域必须相交.

关于复合函数要熟练掌握的内容有三:求定义域;将若干个简单函数复合;将复合函数拆分成若干个简单函数,这里说的简单函数是指基本初等函数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数,熟练掌握复合函数的拆分是今后正确运用求导公式的基础.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算且能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

一般来说,分段函数不是初等函数.

【典型例题】

涉及本节内容的典型考题类型有:

1.判断两个函数是否相等

2.求函数的定义域

3.正确运用函数记号,求函数值与函数的表达式

4.判定给定函数的奇偶性

5.求已知函数的反函数

其中关键是求函数的定义域

1.判定两个函数是否相同(或恒相等)

分析　判定给定的两个函数是否表示同一函数,一般从两方面着手:(1)验证定义域是否相同;(2)对应法则是否一致,当且仅当两者完全相同时它们才恒等.

例 1.1　下列几组函数是否相等

1)$y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

2)$y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

3)$y = 2\ln|x|$ 与 $y = \ln x^2$

4)$y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

5)$y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$

解　1)$y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - sin^2 x} = |\cos x|$ 定义域相同,但对应法则不同,故它们不恒等

2)$y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 要求$\dfrac{1+x}{1-x} > 0$,则$\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$或$\begin{cases} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{cases}$,即其定义域为.

$\{x|-1<x<1\}$,显然 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 定义域也是 $\{x|-1<x<1\}$,而在此范围内 $y = \ln(1+x) - ln(1-x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$,即它们的对应法则亦相同,所以两者恒相等.

3)$y = \ln x^2 = 2ln|x|$,$\forall x \in R$.且 $x \neq 0$,两者恒相等

4)$y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $\forall x \in R$ 与 $y = 1$ 恒等

5)$y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$.不恒相等,原因是 $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ 必须有 $x - 1 \neq 0$,即 $x \neq 1$ 限制,而 $y = x^2 + x + 1$,对 $\forall x \in R$ 都可以,定义域不同.

2.求函数的定义域

分析 要求一个函数的定义域,就是要求所有使函数表达式有意义的自变量的取值范围.这里特别应提醒大家的是诸如分母不为零,偶次根号下不为负等这一批较为基本的方面,往往也是大家容易忽略的部分.

例 1.2 求下列函数的定义域

$$1)\ y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} + \ln(5-x)$$

$$2)\ y = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$$

$$3)\ y = \sqrt{16-x^2} + \arcsin\frac{2x-1}{7}$$

解 (1) 要使 y 有意义,x 应满足

$x-2 \geqslant 0, x-3 \neq 0, 5-x > 0$

即 $x \geqslant 2, x \neq 3$ 且 $x < 5$,其公共部分为$[2,3) \cup (3,5)$,故所求定义域为 $D = [2,3) \cup (3,5)$

(2) 要使 y 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} \ln(x-1) \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \\ x(x-3) \neq 0 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x-1 \geqslant 1 \\ x > 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \end{cases}$$

其交集为$[2,3) \cup (3,+\infty)$,故函数的定义域为 $D = [2,3) \cup (3,+\infty)$.

(3) 要使 y 有意义,必须

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0 & ① \\ \left| \dfrac{2x-1}{7} \right| \leqslant 1 & ② \end{cases}$$

$$即 \begin{cases} x^2 \leqslant 16 & ③ \\ |2x-1| \leqslant 7 & ④ \end{cases} \quad 可得 \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

其交集为$[-3,4]$,故函数定义域为 $D = [-3,4]$

例 1.3 设

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ -e^x & x < 0 \end{cases} \qquad \varphi(x) = \ln(x)$$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗?

分析 复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

解 1) 因为 $\varphi(x)$ 定义域为$(0,+\infty)$.值域为$(-\infty,+\infty)$,而 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内,故 $f[\varphi(x)]$ 有意义,因而

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\varphi^2(x) & \varphi(x) \geqslant 0 \\ -e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

即

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\ln^2 x & x \geqslant 1 \\ -x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\therefore\ f[\varphi(x)]$ 的定义域为$(0,1)\cup[1,+\infty)$,即为$(0,+\infty)$

2) 由于 $f(x)$ 的值域为$(-\infty,0]$,$\varphi(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$. 它们无公共部分,所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

例 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$ 求 $f(2x-5)$ 与 $f(\sin 2x)$ 的定义域

解 $\because\ f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,$\therefore f(2x-5)$ 的定义域为 $0\leqslant 2x-5\leqslant 1$

即 $5\leqslant 2x\leqslant 6$,也即$\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3$

同理 $f(\sin 2x)$ 的定义域为 $0\leqslant \sin 2x\leqslant 1$,即

$$2n\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi+\pi \qquad n\in Z$$

故定义域为 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in Z$

3. 求函数值与函数表达式

分析 按函数定义,对定义域 D 中的任一x_0,根据法则 f 所对应的因变量y 记为$f(x_0)$,称为函数 f 在x_0 的函数值,当函数 $f(x)$ 用一个解析表达式表示时,将表达式中的 x 代以x_0,便得到 $f(x_0)$,特别应注意对于分段函数而言,应根据 x_0 所在的区间,确定相应的表达式.

例 1.5 设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{u\to 0}(1+xu)^{\frac{1}{u}} & x\geqslant 1\\ \ln(1+x) & |x|<1\\ \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin ux}{u} & x\leqslant -1\end{cases}$$

求 $f(-1),f(0),f(1)$

解 这是分段函数,求函数值时必须从自变量所在区间的解析表达式中去计算.

$$f(-1)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(-u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(-u)}{u}=-1,$$

$$f(0)=\ln(1+x)|_{x=0}=\ln 1=0,$$

$$f(1)=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

例 1.6 98 年真题 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$,则 $f(x)=$ ____.

解法一 令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,可得

$$\begin{aligned}f(u)&=(u-1)^2+3(u-1)+5\\&=u^2+u+3\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^2+x+3$.

解法二 将所给表达式右端凑为$(x+1)$的表达式

$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x^2+2x+1)+(x+1)+3\\&=(x+1)^2+(x+1)+3\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^2+x+3$.

[解题提示] 若已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式. 相当于已知 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$,只需用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 即可.

例 1.7 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f(x-1),f[f(x)]$.

解 把 $g(x)=x-1$ 代替 $f(x)$ 中的 x,得

$$f(x-1)=\frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

再把 $g(x)=f(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x 可得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

例 1.8　设 $f(x)=\frac{ax}{2x+3}$,且 $f(f(x))=x$,求 a

解　本题是已知 $f(f(x))$ 的表达式,反求参数 a.由

$$f(f(x))=\frac{af(x)}{2f(x)+3}=x \quad 得$$

$$\frac{a\frac{ax}{2x+3}}{2\frac{ax}{2x+3}+3}=\frac{a^2x}{2ax+6x+9}=x$$

即
$$a^2x=(2a+6)x^2+9x$$

比较同次幂的系数得

$$a^2=9,2a+6=0$$
$$a=-3$$

例 1.9　已知 $f(\frac{1}{x})=\frac{x}{1+x}$ 求 $f(x)$

分析　若已知 $f[g(x)]$ 的表达式,反求 $f(x)$ 的表达式,一般步骤是:令 $g(x)=u$,解得 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换成 x,即得 $f(x)$ 的表达式

解　令 $\frac{1}{x}=u$,得 $x=\frac{1}{u}$,于是

$$f(u)=\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\frac{1}{1+u}$$

再将 u 换成 x,得

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

例 1.10　设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$

分析　先将 $3x$ 代入 $f(x)$ 的表达式中,得 $f(3x)$,再由 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

得 $x=\frac{f(x)}{f(x)-1}$ 代入 $f(3x)$ 即可

解　$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}$

$$\because f(x)=\frac{x}{x-1},得\ x=\frac{f(x)}{f(x)-1},代入\ f(3x)$$

$$\therefore f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{\frac{3f(x)}{f(x)-1}}{3\frac{f(x)}{f(x)-1}-1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

例 1.11 设 $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$,求 $f(x)$

解 令 $x + \frac{1}{x} = u$ 解 x 很繁,但

$$f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 = (x+\frac{1}{x})^2 + 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

4.判定给定函数的奇偶性

分析 判断函数奇偶性的方法主要是根据定义及奇偶函数的运算性质:

(1) 两个奇函数的代数和是奇函数;两个偶函数之和是偶函数;奇函数与偶函数的和既非奇函数,也非偶函数.

(2) 两个奇函数乘积是偶函数;两个偶函数的乘积是偶函数;奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

另外,应掌握一些常见函数的奇偶性:x^{2n+1}(n 为正整数)$\sin x$、$\arctan x$ 等是奇函数,x^{2n}(n 为正整数)、$\cos x$ 等是偶函数.

注:判断 $f(x)$ 是否为奇函数,往往直接计算 $f(x) + f(-x) = 0$ 是否成立更简便.

例 1.12 判断下列函数的奇偶性

1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

2) $f(x) = F(x)(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2})$,其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$,$F(x)$ 是奇函数

3) $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

4) $f(x) = x(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2})$

解 1) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

所以,$f(x)$ 是奇函数.

注:1° 当运算式中出现$a \pm \sqrt{b}$ 时,常在运算前先对分子分母同乘以其共轭形式 $a \mp \sqrt{b}$,进行所谓的有理化简化计算.

$$\begin{aligned} 2^\circ f(x) + f(-x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(-x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln 1 = 0,\text{有} \\ f(x) &= -f(-x) \end{aligned}$$

从而也可得证 $f(x)$ 为奇函数.

2) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}$,因为

$$g(-x)=\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}=\frac{1+a^x-1}{1+a^x}-\frac{1}{2}=-(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2})=-g(x)$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 是奇函数,故 $f(x)=F(x)\cdot g(x)$ 是偶函数.

3) $\because f(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

而 $$f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{e^x+1}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(-x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

4) $\because f(-x)=-x(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2})=-x(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2})$

$$=-x(\frac{-1}{2^x-1}-\frac{1}{2})$$

$$=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

例 1.13　99 年真题　设 $F(x)=(2^x+2^{-x})f(x)$,其中 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数,判定 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇偶性.

分析　可以利用函数奇偶性定义来判定.由于

$$F(-x)=(2^{-x}+2^x)f(-x)$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数,因此 $f(-x)=-f(x)$,从而

$$F(-x)=-2(2^{-x}+2^x)f(x)=-F(x)$$

可知 $F(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数.

5. 求已知函数的反函数

分析　由分析关系式 $y=f(x)$ 反解 x 得关系式 $x=f^{-1}(y)$,其次将字母 x 与 y 互换. 便得出所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$

例 1.14　求下列函数的反函数

1) $y=7x-8$

2) $y=\ln(2x-1)+1$

解　1)　由 $y=7x-8$,得 $x=\frac{1}{7}(y+8)$,将 x 与 y 互换

得　$y=\frac{1}{7}(x+8)$

2)　由 $y=\ln(2x-1)+1$

得 $2x-1=e^{y-1}$

即 $x=\frac{1}{2}e^{y-1}+\frac{1}{2}$,将 x 与 y 互换

得反函数 $y=\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{2}$