

—高等学校教材—

数字信号处理

下 册

西安交通大学 吴兆熊

成都电讯工程学院 黄振兴 黄顺吉 编著



国防工业出版社

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初,由于各有关院校,特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合,共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要,反映国内外电子科学技术水平,达到“打好基础,精选内容,逐步更新,利于教学”的要求,在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上,电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》,中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会,作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构,并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划,列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量,适当增加教材品种的思想指导下,这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿,主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材,分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验,这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处,希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议,共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材由“无线电技术与信息系统”教材编审委员会“电路与系统”编审小组评选审定，并推荐出版。

本教材由西安交通大学吴兆熊(第一章至第四章)、成都电讯工程学院黄振兴(第五章)、黄顺吉(第六章)协同编著，由华中工学院葛果行担任主审。编、审者均依据“电路与系统”编审小组审定的编写大纲进行编著和审阅。

本课程的参考教学时数为 50 至 60 学时，教材的主要内容有三个部分。其中第一部分是有关离散随机信号处理的基本理论与方法，包括四章：(1) 离散随机信号，(2) 维纳过滤与卡尔曼过滤，(3) 自适应过滤系统，(4) 功率谱估计。其中第一、二章是离散随机信号的理论基础。第三、四章是当前在数字信号处理领域最活跃的二个课题。第三章对横向结构的自适应滤波器进行了详细分析和系统的介绍。在第四章中对最大熵谱估计法及有关问题作了扼要的论述。第二部分(第五章)在同态信号处理的理论和应用方面作了较全面的阐述，特别是对解卷积系统的时谱(Cepstrum，也译作倒谱或逆谱)技术作了适当的充实。第三部分(第六章)对于应用范围越来越广的二维数字信号处理的分析基础和设计原理作了较系统的介绍，阐述了二维递归滤波器的可递归性和稳定性的理论，证明了一系列有关稳定性的定理。使用本教材时应注意到本门课程有较强的理论性和系统性，它概括了数字信号处理领域中某些主要进展，但只作了导论性的阐述。因此在讲授时首先应把重点放在基本概念、基本理论和分析方法上，并结合教材内容，多指定阅读一些主要的原始文献，以便学生深入钻研，彻底弄懂弄通。学习时除搞清本书中所举的一些实例外，还应配合适当的习题，并结合有关的实际问题，在应用方面多下功夫，为以后进行专题研究打下坚实的基础。

本教材责编委国防科学技术大学孙仲康同志在审稿会上对本书提出了许多宝贵的意见，在这里一并表示诚挚的谢意。由于编著者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切地希望广大读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 离散随机信号	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 随机信号的时域 (统计) 表达	3
§ 1.3 随机信号的 z 域及频域 (统计) 表达	12
§ 1.4 线性系统对随机信号的响应	14
参考文献	19
第二章 维纳过滤与卡尔曼过滤	20
§ 2.1 引言	20
§ 2.2 维纳滤波器的离散形式 (I)——时域解	21
§ 2.3 维纳滤波器的离散形式 (I)—— z 域解	24
§ 2.4 维纳预测器	32
§ 2.5 卡尔曼过滤的信号模型——状态方程与量测方程	41
§ 2.6 卡尔曼过滤的方法与公式	44
参考文献	51
第三章 自适应过滤系统	52
§ 3.1 自适应滤波器的基本原理	52
§ 3.2 Widrow-Hoff LMS 算法	54
§ 3.3 自适应抵消器	63
§ 3.4 自适应噪声抵消器作为陷波器的例子——自适应滤波器的硬件实现	67
§ 3.5 自适应过滤系统在信号处理中的应用	71
参考文献	77
第四章 功率谱估计	78
§ 4.1 引言	78
§ 4.2 自相关函数的估计	82
§ 4.3 周期图作为功率谱的估计	84
§ 4.4 平滑后的周期图作为 PSD 的估计	90
§ 4.5 自回归模型法	95
§ 4.6 最大熵谱估计法	100
§ 4.7 预测误差格型滤波器及伯格 (Burg) 递推算法	104
参考文献	112
第五章 同态滤波	114
§ 5.1 引言	114
§ 5.2 同态滤波的基本概念	114
§ 5.3 解相乘同态系统	117
§ 5.4 相乘同态系统的应用	118
§ 5.5 解卷积同态系统	122
§ 5.6 时谱技术	127

§ 5.7 复时谱的计算实现·····	140
§ 5.8 解卷积同态系统的应用·····	144
附录 A 离散希尔伯特变换·····	155
参考文献·····	161
第六章 二维数字信号处理·····	162
§ 6.1 引言·····	162
§ 6.2 二维数字信号处理系统分析基础·····	162
§ 6.3 二维非递归滤波器的设计·····	172
§ 6.4 二维递归滤波器的可递归性·····	180
§ 6.5 二维递归滤波器的稳定性·····	189
§ 6.6 二维 QP 递归滤波器的设计·····	198
§ 6.7 二维 NSHP 递归滤波器的设计·····	208
参考文献·····	213

第一章 离散随机信号

离散时间随机信号的分析方法与许多结果和连续时间随机信号有不少相似之处。因此,本章不准备将所有随机过程的问题从头再仔细讨论一遍,而主要是按时间离散的观点和方法,讨论各种在数字信号处理中将要用到的基本结果。这些结果是后面各章内容的必不可少的基础。

本章讨论的重点是离散的相关函数(相关序列)、协方差函数(协方差序列)和功率谱密度函数(简称功率谱),以及线性非时变离散系统的输入-输出关系。

§1.1 引言

时间上离散的信号(或序列)和时间上连续的信号一样可以分为确定的和随机的。所谓确定信号,就是其每个时间点上的值可以用某个数学表达式或图表唯一地确定的信号。对于这种离散时间的确定信号及其 z 变换和傅氏变换的表征,我们假定读者已很熟悉。本章将讨论离散时间的随机信号(即随机序列)的表征及有关问题。

随机序列有以下性质:

(1) 随机序列中的任何一个点上的取值都是不能先验确定的随机变量

我们以最简单的抛硬币这种随机试验为例,每次抛掷结果有二种可能的状态,一是硬币的正面朝上,另一是反面朝上。每次抛掷时并不能先验地确定是正面朝上还是反面朝上。如果把正面朝上用 $x = +1$ 表示,反面朝上用 $x = -1$ 表示,连续地抛掷,可以得到一个由 $+1$ 和 -1 组成的序列 $x_i(n)$,如图1.1所示。这个序列在任何 n 值点上的取值都是不能先验确定的。因此我们称抛硬币过程所产生的是一个随机过程,或者说,抛硬币产生的序列是一个随机序列。概括这个概念:一个随机信号(或序列)是一个随机过程,在它的每个时间点上的取值都是随机的,可用一个随机变量表示,或者说,一个随机过程是一个随机试验所产生的随机变量依时序组合得到的序列。今后我们用 $\{x_n\}$ 表示一个随机过程,而用 x_n 表示时间为 n 的点上的一个随机变量。显然,任何一个具体试验所得到的序列(例如,图1.1的序列 $x_1(n)$)都只能是随机序列的一个样本序列(或一个实现)。



图1.1 抛硬币得到的随机样本序列

(2) 随机序列可以用它的统计平均特性来表征

虽然上述抛硬币试验所得到的随机序列在任何 n 值点上的取值都是不能先验确定的,但是,这种先验不确定的过程中却含有确定的统计规律。不难理解,如果试验条件稳定不变,那么抛掷硬币结果出现 $+1$ 或 -1 的概率分别都是确定的,又如果硬币的结构是正反面完全对称的,则出现 $+1$ 或 -1 的概率将分别都是确定的 $1/2$ 。由其它随机试验产生的随机序列,同样地,在各时间点上的随机变量的取值是服从某种确定的概率分布

的。因此，一个随机序列中的每一个随机变量，都可以用确定的概率分布特性来统计地描述它。或者，可以通过统计平均特性来统计地表征它。因为统计平均特性反映着随机变量的概率分布特性。一个随机变量的各种统计平均特性，是这个随机变量的各种函数按概率加权求平均的运算结果。例如，随机变量 x_n （一次幂）的统计平均值 $E[x_n]$ 为

$$E[x_n] = \sum_i x_i p(x_i)$$

这里 $p(x_i)$ 表示 x_n 取值为 x_i 的概率，它表示着 x_n 的概率特性。

总之，一个随机变量的取值尽管是不能先验确知的，我们可以用它取各种可能值的概率特性 $p(x_i)$ 或它的全部完整的统计平均特性 $E[f(x_n)]$ ，包括 $E[x_n]$ 、 $E[x_n^2]$ 、 $E[x_n^3]$ ……来表征它。它们分别从不同侧面描述了 x_n 的取值特性。

一个随机序列在各个 n 值上的取值都是随机变量，但这个随机序列并不是把各种随机试验产生的随机变量任意地放在一起随意编序排列而构成的。我们所遇到的随机序列常常是在一个作随机运动的系统中某一端点上所观测到的采样数据依照时序排列构成的时间序列，它的各时间点上的取值之间，往往有前后波及影响。这种波及影响是由系统的各种惯性所决定的。波及影响的统计特性可由描述此序列各时间点取值的多维概率特性来表征。因此，对于一个随机序列，不仅需要知道它在各个 n 值点上的取值特性，还需要知道它的各个不同点间取值的相互关联性（波及性）。这就不仅需要用一维而且需要用它的多维统计平均特性来表征它。

（3）平稳随机序列是无限持续期无限能量的时间序列

我们在实际中遇到的随机序列，不少可认为是平稳序列。平稳的概念是：这种随机序列在各点上的概率特性不随时间平移而变化。平稳序列是无始无终的。

为了信号处理的目的，常常需要将信号转入变换域来表征和认识，即常常需要研究信号的各种变换。因为，一个在时域里的（离散）信号常常是变换到频域（或 z 域）中作数学处理更为方便。在先行课程中，已详细讨论了确知序列的傅氏变换和 z 变换。但是，一个序列的傅氏变换只有当它的能量是有限的时候才可能存在。对于一个无始无终的平稳随机信号，它的能量是无限的，傅氏变换是不存在的（它的 z 变换也是不存在的[●]），因而不能求得这种随机信号的频谱。但是，一个序列如果能量无限并不一定意味着它的功率是无限的。所以，一个随机信号[●] 的频谱在数学上虽不存在，但它的功率谱则是可以存在的。因此，人们可以用功率谱统计地在频域表征一个随机过程的谱特性。我们将会知道，一个信号的功率谱是这个信号的自相关函数的傅氏变换，功率谱和自相关函数是一对傅氏变换对，它们相互唯一地确定，它们都是信号的一种（二维）统计平均表征，它们从不同域的侧面表征着一个随机过程的最本质的性质。因此，对于一个观测到的随机信号，重要的是确定它的功率谱密度函数和自相关函数。

从以上所列三点性质，关于随机信号的概念和表征问题，我们不妨可以概括为二点：

- z 变换存在的条件虽然比傅氏变换有所放宽：对于指数阶的信号都可以存在 z 变换，但是，随机信号一般并不是单纯的指数阶信号。
- 今后，如不特别说明，为简写方便计，一般“随机信号”常指“平稳随机信号”。

① 一个随机信号在各时间点上的取值以及在不同点上取值之间的相互关联性只能用概率特性或统计平均特性来表征, 它的确定值是无法先验表达的。

② 一个无限持续期、无限能量、但有限功率的平稳随机序列, 它的频谱是无法求得的; 对它来讲, 作为统计表达手段, 重要的是功率谱密度函数与自相关函数。

§ 1.2 随机信号的时域(统计)表达

一个确定的(非随机的)信号 $x(n)$, 如果我们确知它在每个时刻的值(可用数学表达式或图表示), 例如图 1.2 所示, 那么我们对这个信号就完全知道了或者说充分认识了, 该信号就称为一个已知的信号。

对于一个随机信号, 如上节所述虽然我们并不能确知它在每个时刻的值, 但从统计平均的观点来认识它。可以知道它在每个时刻可能取哪几种值和取各种值的概率是多少, 以及各时间点上取值的关联性。因此, 如果已完整知道了它的概率分布(包括一维和二维概率分

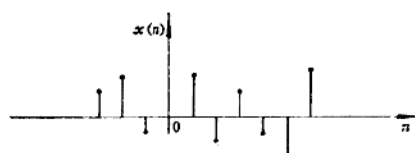


图 1.2 用图表示的确定信号每个时刻的值

布), 我们就认为对这个随机信号在统计意义上已充分了解或已作明白描述了。因此, 对于随机信号, 我们需要了解和研究它的一维和二维(或多维)概率分布函数。

随机过程的各种统计特征量[例如, 前面提到的统计平均值 $E[x_n] \left(= \sum_i x_i p(x_i) \right)$ 就

是一个特征量]分别从各个侧面间接地反映了概率分布特性。对于一个随机变量, 如果将所有它的一维特征量, 包括各阶矩:

$$E[x_n^l] = \sum_i x_i^l p(x_i), \quad l = 1, 2, 3 \dots$$

(其中 $l = 1$ 时的一阶矩即为平均值 $E[x_n]$) 或各阶中心矩[●]:

$$E[(x_n - E(x_n))^l] = \sum_i (x_i - \bar{x}_i)^l p(x_i),$$

$$l = 1, 2, 3 \dots$$

(其中 $l = 2$ 时的二阶中心矩 $E[(x_n - E(x_n))^2]$ 称为方差) 都列出来, 就等价地完整说明了 x_n 取值的一维概率分布特性, 这是因为一维概率分布函数的特征函数 $C(\xi)$ 是一维概率密度函数 $p(x)$ 的傅氏变换。即

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-j\xi x} dx$$

● 已知各阶矩, 可求得各阶中心矩, 反之亦然。

它可由随机变量 x_n 的全部各阶矩 (或各阶中心矩) 所刻画[●], 而 $p(x)$ 又可由 $C(\xi)$ 唯一确定

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

同理, 用各种二维特征量可以等价地说明 x_n 的二维概率分布特性。因此, 表达随机信号概率特性的另一种方法是用它的统计平均特征量。

下面, 我们将分别讨论随机信号的概率分布函数及统计平均特征量。

1.2.1 概率分布函数

为了便于后面引用有关符号, 让我们重温概率分布函数, 并且在处理中结合到信号为离散时间随机过程来考虑。

对于一个随机变量 x_n , 用 $P_{x_n}(x_1, n)$ 表示它的概率分布函数, 有

$P_{x_n}(x_1, n) = [x_n \leq x_1]$ 的概率
或写成

$$P_{x_n}(x_1, n) = \text{概率}[x_n \leq x_1] \quad (1-1)$$

如果 x_n 的取值是连续的, 则用概率密度函数 $p_{x_n}(x_1, n)$ 表示

$$\left. \begin{aligned} p_{x_n}(x_1, n) &= \frac{\partial P_{x_n}(x_1, n)}{\partial x_1} \\ P_{x_n}(x_1, n) &= \int_{-\infty}^{x_1} p_{x_n}(x, n) dx \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

或 $p_{x_n}(x_1, n) dx_1$ 是 x_n 取值在 x_1 到 $x_1 + dx_1$ 范围内的微概率。

如果 x_n 的取值是离散的, 则用概率质量函数 $p_{x_n}(x_1, n)$ 表示

$$p_{x_n}(x_1, n) = \text{概率}[x_n = x_1] \quad (1-3)$$

即此时的 $p_{x_n}(x_1, n)$ 代表 x_n 取某一值 x_1 的概率。

例如前面抛硬币的例子, x_n 只有二种可能取值: $x_n = +1$ 或 $x_n = -1$; 如果 $x_n = +1$ 的概率为 p , 则 $x_n = -1$ 的概率为 $(1-p)$ 。图1.3表示了 this 随机变量 x_n 的概率分布函数及概率质量函数图。对于一个随机变量, 已知它的概率分布图, 就可认为在统计意义下充分了解了或已明白描述了该随机变量。

如果我们要描述一个随机过程中的二个时间点 (n_1 与 n_2) 上的随机变量 x_{n_1} 和 x_{n_2} 之间的关系, 那么我们可以用二维联合概率分布函数表示

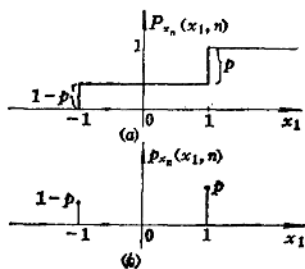


图 1.3

(a) 某随机变量的概率分布函数,

(b) 相应的概率质量函数。

● 按式 $C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-j\xi x} dx$; $C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$, $C'(0) = \left. \frac{dC(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -j \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = -jE[x]$, $C''(0) = \left. \frac{d^2 C(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = -E[x^2]$, $C'''(0) = \left. \frac{d^3 C(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=0} = jE[x^3]$, $\dots C^{(n)}(0) = \left. \frac{d^{(n)} C(\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=0} = (-j)^n E[x^n]$, 而由 $C(\xi)$ 的 Taylor 级数展开形式为 $C(\xi) = C(0) + C'(0)\xi + \frac{C''(0)}{2!}\xi^2 + \dots + \frac{C^{(n)}(0)}{n!}\xi^n + \dots$ 故 $C(\xi)$ 可由全部各阶矩所刻画。

$$P_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = \text{概率}[x_{n_1} \leq x_1, x_{n_2} \leq x_2] \quad (1-4)$$

它表示 $x_{n_1} \leq x_1$ 同时 $x_{n_2} \leq x_2$ 的联合概率。

如果这两个随机变量的取值是连续的, 我们也可以利用二维联合概率密度 $p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2)$ 来表达

$$p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = \frac{\partial P_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1-5)$$

$p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) dx_1 dx_2$ 代表 x_{n_1} 在 x_1 到 $x_1 + dx_1$ 同时 x_{n_2} 在 x_2 到 $x_2 + dx_2$ 区间取值的二阶微联合概率。

对于离散取值的情况, 用二维联合概率质量函数表示

$$p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = \text{概率}[x_{n_1} = x_1, x_{n_2} = x_2] \quad (1-6)$$

它代表 x_{n_1} 取值 x_1 同时 x_{n_2} 取值 x_2 的联合概率。

从随机变量 x_{n_1} 与 x_{n_2} 的二维联合概率密度可求得 x_{n_1} 与 x_{n_2} 分别的一维概率密度:

$$\left. \begin{aligned} p_{x_{n_1}}(x_1, n_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) dx_2 \\ p_{x_{n_2}}(x_2, n_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

又按贝叶斯 (Bayes) 公式有

$$\left. \begin{aligned} p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) &= p_{x_{n_2}}(x_2, n_2) \cdot p_{x_{n_1}}(x_1/x_2) \\ \text{或} \quad p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) &= p_{x_{n_1}}(x_1, n_1) \cdot p_{x_{n_2}}(x_2/x_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

其中 $p_{x_{n_1}}(x_1/x_2)$ 代表 x_{n_2} 已取 x_2 值后, x_{n_1} 取 x_1 值的概率密度, $p_{x_{n_2}}(x_2/x_1)$ 代表 x_{n_1} 取 x_1 值后, x_{n_2} 取 x_2 值的概率密度。 $p_{x_{n_1}}(x_1/x_2)$ 及 $p_{x_{n_2}}(x_2/x_1)$ 称为条件概率密度。

由此可见, 二维联合概率密度不仅蕴涵了一维概率密度, 而且蕴涵了条件概率密度。正是条件概率密度说明了 x_{n_1} 与 x_{n_2} 之间的相关性。当随机变量 x_{n_1} 与 x_{n_2} 统计独立时, 即 x_{n_1} 与 x_{n_2} 的取值互不影响时 (如抛硬币就属于这种情况: 各次抛的结果互不影响), 则有

$$\left. \begin{aligned} p_{x_{n_1}}(x_1/x_2) &= p_{x_{n_1}}(x_1, n_1) \\ p_{x_{n_2}}(x_2/x_1) &= p_{x_{n_2}}(x_2, n_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

于是, x_{n_1} 与 x_{n_2} 彼此独立时有

$$p_{x_{n_1}, x_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = p_{x_{n_1}}(x_1, n_1) \cdot p_{x_{n_2}}(x_2, n_2) \quad (1-10)$$

对于一个一般意义下的随机过程 (或随机信号), 需要用到所有各时间点上的随机变量的多维联合概率密度 $p_{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_N}}(x_1, n_1; x_2, n_2, \dots, x_N, n_N)$ 来描述它 (正像二维概率密度蕴涵一维概率密度一样, 可以从一个 N 维概率密度推求得各低于 N 维的概率密度)。但如果一个随机过程是平稳的, 概率特性不随时间平移而变化, 对于这种平稳随机过程, 用它的二维联合概率分布已可充分描述它。

既然平稳随机过程的概率特性不随时间的平移而变化, 因此有

$$p_{x_n}(x, n) = p_{x_n}(x, n+k) = p_{x_n}(x, 0) = p_{x_n}(x) = p_1(x) \quad (1-11)$$

即各时间点上的一维概率特性相同 (今后一维概率特性统一用脚标 1 表示), 也即平稳随机过程的一维概率特性与时间无关。同样地, 它的二维概率密度为

$$\begin{aligned}
 p_{x_1, x_2}(x_1, n_1; x_2, n_2) &= p_{x_1, x_2}(x_1, n_1 + k; x_2, n_2 + k) \\
 &= p_{x_1, x_2}(x_1, 0; x_2, n_2 - n_1) \\
 k &= -n_1 \\
 &= p_2(x_1, x_2, m) \quad (1-12)
 \end{aligned}$$

即平稳随机过程的二维概率特性只与二点间的时间差 $m = n_2 - n_1$ 有关, 与时间的起始点无关; 任何在时间轴上相隔相同距离 m 的二点的二个随机变量的二维联合概率密度均相同。

例如, 图1.4中 a 、 b 二点间的联合概率密度与 c 、 d 二点以及 e 、 f 二点间的联合概率密度均相同。(今后二维概率特性统一用脚标 2 表示)。

而各不同点间的相互关系都可以包括在同一二维概率密度随 m 的变化关系之中, 于是, 对于平稳随机过程, 只需要用二维概率密度 $p_2(x_1, x_2, m)$ 已能在统计意义上充分描述它。

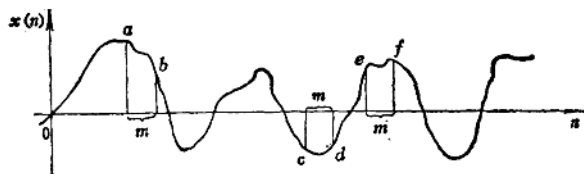


图1.4 平稳随机过程的二维概率特性只与二点间的时间差 m 有关

必须指出, 对于二个随机过程, 即使所有时间点上的一维概率特性均相同, 如果它们在不同时间点上取值之间的相关性 (波及性) 不同, 它们的样本体现形式也是不同的。图1.5示出了一对例子。图中 (a) 与 (b) 分别表示二个随机过程的样本。即使在所有时间点上它们的一维概率分布相同, 但

(a) 前后相关弱, (b) 前后相关强, 这就使 (a) 与 (b) 的表现形式很不相同, (a) 变化快, (b) 变化慢。因此, 对于一个随机过程, 需要用多维联合概率特性来表征它, 而对于平稳随机过程, 则需要用二维联合概率分布才能充分表征它。今后如不特别说明, 所讨论的随机信号均认为是平稳随机过程。

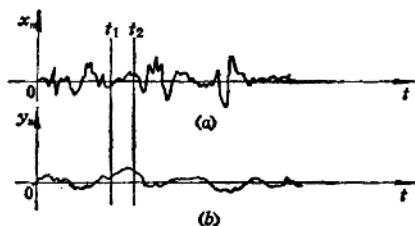


图1.5 相关性对随机过程的影响
(a) 前后相关弱; (b) 前后相关强。

因为自相关函数是二维概率特性的“泛函”, 因此, 当二维概率特性与基准点无关而只与时间差 m 有关时, 自相关函数必与 n 无关而只与 m 有关, 但是, 逆关系并不一般成立。因此, 我们称二维概率特性与基准点无关而只与 m 有关的随机序列为严 (或狭义) 平稳随机序列, 而称自相关函数只与 m 有关而与 n 无关的随机序列为宽 (或广义) 平稳随机序列。今后我们所提到的平稳随机过程 (序列) 如不特别指明, 均认为是广义平稳随机过程 (序列)。

1.2.2 概率分布特性的特征量

前面讨论了用概率分布可以最充分地在统计意义上描述一个随机过程。但在实际问题中, 要得知一个随机过程各点上的随机变量的分布函数并不是很方便的。而且, 在很多问题中, 往往只要知道概率分布的某些特征量就足够描绘这个过程了。其中, 最主要的

是均值、方差与自相关函数。当我们已经知道随机过程的分布函数的形式（例如，高斯分布、泊松分布、或等概率分布等）时，又往往只要知道它的某些特征量，就已经充分说明它的概率分布。例如，对于高斯分布形式，只要知道它的均值 m_x 与方差 σ_x^2 这两个特征量，就等于完全说明了它的概率分布函数，这是因为高斯分布为

$$p_{x_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (1-13)$$

这些特征量的性质，及其定义的详细解释，在先行课程中已经讨论过。离散时间系统和连续时间系统在这方面是完全类同的。所以这里只简单地叙述一下定义，以统一数学符号的表达形式，作为后面应用时的准备：

(1) 数学期望（均值）

随机变量 x_n 的均值（用 m_{x_n} 表示）定义为

$$m_{x_n} = E[x_n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx \quad (1-14)$$

如果 x_n 是电压或电流， $E[x_n]$ 可理解为第 n 点上电压或电流的“直流分量”。

(2) 均方值

随机变量 x_n 的均方值定义为

$$E[x_n^2] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx \quad (1-15)$$

如果随机变量 x_n 是电压或电流， $E[x_n^2]$ 可理解为在第 n 点上这个电压或电流在 1Ω 电阻上的“平均功率”。

(3) 方差

随机变量 x_n 的方差（用 $\sigma_{x_n}^2$ 表示）定义为

$$\sigma_{x_n}^2 \triangleq E[(x_n - E(x_n))^2] = E[(x_n - m_{x_n})^2] \quad (1-16)$$

如果 x_n 是电压或电流， $\sigma_{x_n}^2$ 可理解为电压或电流的起伏分量（已除去直流分量）在 1Ω 电阻上耗散的平均功率。利用式 (1-16)，容易证明

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_n}^2 &= E[x_n^2] - m_{x_n}^2 \\ E[x_n^2] &= \sigma_{x_n}^2 + m_{x_n}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

或

即，“平均功率”=“交流功率”+“直流功率”。

以上的三个特征量仅与一维概率密度 $p_1(x)$ 有关。对于平稳随机过程，一维概率密度与时间无关，故对于平稳随机过程 m_{x_n} 、 $E[x_n^2]$ 、 $\sigma_{x_n}^2$ 均是与时间无关的常数，可以将第二个下标 n 去掉（今后我们将用 m_x 与 σ_x^2 分别表示 m_{x_n} 与 $\sigma_{x_n}^2$ ）。

与二维概率分布有关的统计特性主要有自相关函数和自协方差函数。

(4) 自相关函数

一个平稳随机过程中的二个时间点上的随机变量 x_{n_1} 与 x_{n_2} 之间的自相关函数（用 $\phi_{xx}(m)$ 表示）定义为

$$\phi_{xx}(m) \triangleq E[x_{n_1} \cdot x_{n_2}] = E[x_n \cdot x_{n+m}] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2, m) dx_1 dx_2 \quad (1-18)^{\bullet}$$

这里 $m = \text{时移差} (n_2 - n_1)$ 。把随机变量 x_{n_1} 与 x_{n_2} 相乘, 就意味着把它们中间的共性成分进行了相乘。因为共性成分的相乘永远是带确定符号关系的, 而非共性成分相乘随机地“有正有负”, 平均来讲趋于相互“抵消”, 因此, 自相关函数能把 x_{n_1} 与 x_{n_2} 中的共性成分提取出来, 它是随机信号 $\{x_n\}$ 在 n_1 点与 n_2 点间的波及性的指示。

(5) 自协方差函数

一个平稳随机序列的协方差 (用 γ_{xx} 表示) 定义为

$$\gamma_{xx}(m) \triangleq E[(x_n - m_x)(x_{n+m} - m_x)] \quad (1-19)$$

自相关函数与自协方差函数是衡量随机过程在不同时刻上的随机变量之间的相关性的量。利用式 (1-19) 可以看出 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 之间有如下关系:

$$\gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m) - m_x^2 \quad (1-20)$$

对于平稳随机过程, m_x 为一常数, 因此 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 只相差一个常数 m_x^2 , 它们之间没有本质的差别。

以上讨论了一个随机过程在不同时刻的两个随机变量之间相关程度的两种量度。对于两个随机过程 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的随机变量间的相关性, 则可用互相关函数和互协方差函数描述。

(6) 互相关函数

$$\phi_{xy}(m) = E[x_n y_{n+m}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_2(x, y, m) dx dy \quad (1-21)$$

(7) 互协方差函数

$$\gamma_{xy}(m) = E[(x_n - m_x)(y_{n+m} - m_y)] = \phi_{xy}(m) - m_x m_y \quad (1-22)$$

由式 (1-18)、(1-19)、(1-21) 及 (1-22) 可见, 相关函数决定于二维概率分布 $p_2(x, y, m)$ 。对平稳随机过程, 二维概率分布仅决定于时间差 m , 与起始时间无关, 因而相关函数也只决定于 m 。前面的讨论中已经指出, 二维概率分布可充分地表达一个平稳随机过程的统计特性, 因为它不仅蕴涵了相关性, 也蕴涵了一维概率分布。由二维概率分布决定的相关函数, 也有同样的性质。它不仅表达了相关性, 也隐含了一维特征量。因此自相关函数 $\phi_{xx}(m)$ 或自协方差函数 $\gamma_{xx}(m)$ 是表征一个随机过程的最重要的统计特性。

1.2.3 自相关与自协方差序列的性质

两个实的、平稳随机过程 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的自相关、自协方差、互相关和互协方差序列分别定义为

$$\phi_{xx}(m) = E[x_n x_{n+m}] \quad (1-23)$$

$$\gamma_{xx}(m) = E[(x_n - m_x)(x_{n+m} - m_x)] \quad (1-24)$$

● 当随机变量 x_n 是复数时, 式 (1-18) 应写成

$$\phi_{xx}(m) = E[x_{n_1} x_{n_2}^*] = E[x_n x_{n+m}^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* p_2(x_1, x_2, m) dx_1 dx_2$$

当随机变量是复数时, 式 (1-19) 与式 (1-21) 也应作类似的修正。

$$\phi_{xy}(m) = E[x_n y_{n+m}] \quad (1-25)$$

$$\gamma_{xy}(m) = E[(x_n - m_x)(y_{n+m} - m_y)] \quad (1-26)$$

它们具有下列性质 (其中大部分性质均可从以上四个定义式导出。)

性质 1

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xx}(m) &= \phi_{xx}(m) - m_x^2 \\ \gamma_{xy}(m) &= \phi_{xy}(m) - m_x m_y \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

当 $m_x = 0$ 时, 相关序列和协方差序列相等

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xx}(m) &= \phi_{xx}(m) \\ \gamma_{xy}(m) &= \phi_{xy}(m) \end{aligned} \right\}$$

性质 2

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xx}(0) &= E[x_n^2] = \text{均方值} \\ \gamma_{xx}(0) &= \phi_{xx}(0) - m_x^2 = E[x_n^2] - m_x^2 = \sigma_x^2 = \text{方差} \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

性质 3

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xx}(m) &= \phi_{xx}(-m) \\ \gamma_{xx}(m) &= \gamma_{xx}(-m) \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

这是因为

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(m) &= E[x(n)x(n+m)] \\ &= E[x(n+m)x(n)] = \phi_{xx}(-m) \end{aligned}$$

性质 4

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= \phi_{yx}(-m) \\ \gamma_{xy}(m) &= \gamma_{yx}(-m) \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

这是因为

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= E[x(n)y(n+m)] \\ &= E[y(n+m)x(n)] = \phi_{yx}(-m) \end{aligned}$$

性质 5

$$\left. \begin{aligned} |\phi_{xx}(m)| &\leq \phi_{xx}(0) \\ |\gamma_{xx}(m)| &\leq \gamma_{xx}(0) \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

这是因为

$$E[x(n) \pm x(n+m)]^2 \geq 0$$

从而

$$E[x^2(n) \pm 2x(n)x(n+m) + x^2(n+m)] \geq 0$$

又因 $\{x(n)\}$ 是平稳随机过程, 故

$$E[x^2(n)] = E[x^2(n+m)] = \phi_{xx}(0)$$

代入上面的不等式, 得

$$\begin{aligned} 2\phi_{xx}(0) \pm 2\phi_{xx}(m) &\geq 0 \\ \therefore \phi_{xx}(0) &\geq |\phi_{xx}(m)| \end{aligned}$$

而 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 只差一常数 m_x^2 , 故有相仿的性质, 即 $\gamma_{xx}(0) \geq |\gamma_{xx}(m)|$

性质 6

如果 $y_n = x_{n-m}$ 则

$$\left. \begin{aligned} \phi_{yy}(m) &= \phi_{xx}(m) \\ \gamma_{yy}(m) &= \gamma_{xx}(m) \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

这是由于平稳性带来的。

性质 7

对于实际上遇到的许多随机过程，当 m 愈大则相关性愈小， m 趋于无穷大时，可认为不相关。因此有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xx}(m) = E[x_n x_{n+m}] = E[x_n] E[x_{n+m}] = m_x^2 \quad (1-33)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xx}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xx}(m) - m_x^2 = 0 \quad (1-34)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xy}(m) = m_x m_y \quad (1-35)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xy}(m) = 0 \quad (1-36)$$

由以上性质 2、3、5、7 可得到图 1.6，该图中 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 除相差一个常数 m_x^2 外，其它特性相同。

$\phi_{xx}(m)$ 是一个随机过程 $\{x_n\}$ 最主要的统计表征，它不仅说明了相关性，并且蕴涵了 m_x 、 σ_x^2 、 $E\{x_n^2\}$ 等主要特征量，如

$$\left. \begin{aligned} E\{x_n^2\} &= \phi_{xx}(0) \\ m_x^2 &= \phi_{xx}(\infty) \\ \sigma_x^2 &= E\{x_n^2\} - m_x^2 = \phi_{xx}(0) - \phi_{xx}(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

因此，对于一个平稳随机过程，只要知道它的自相关函数 $\phi_{xx}(m)$ ，就等于知道了随机过程的所有主要特征量。故对于一个随机序列的统计描述，可以由这个随机序列的自相关函数来高度概括。

如果随机变量 X 为一向量，有

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

则其均值向量为

$$E\{X\} = \begin{bmatrix} E\{x_1\} \\ E\{x_2\} \\ \vdots \\ E\{x_N\} \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

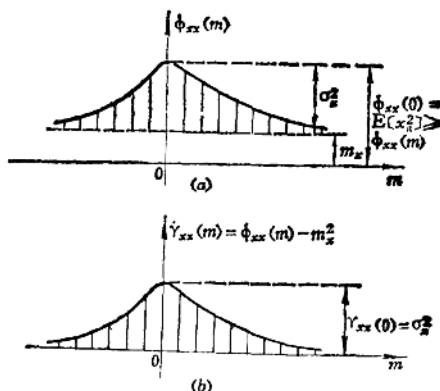


图1.6 相关函数的特性

(a) $\phi_{xx}(m)$ 的特性; (b) $\gamma_{xx}(m)$ 的特性。

其自协方差阵定义为

$$\text{Cov}[\mathbf{X}] = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})][\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^\tau\} \quad (1-40)$$

它是一个 $N \times N$ 的方阵, 并且是一个非负定阵。其中 τ 代表矩阵的转置。

如果随机变量 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 均为随机向量, 则其互协方差阵定义为

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})]^\tau\} \quad (1-41)$$

如果随机变量 X 、 Y 不是向量, 而是复数, 则上述式 (1-40)、(1-41) 中的转置符号应改为共轭符号。如果随机变量 X 、 Y 既是向量, 又是复数, 则式 (1-40)、(1-41) 的转置符号应改为共轭转置符号。

1.2.4 集合平均与时间平均

如果有有限多人同时平行地抛掷同样的硬币, 所得到的这些平行样本序列的各种平均特性, 称为有限集合的平均。当人数趋于无穷多时, 显然, 集合平均就趋于统计平均。

上面我们讨论了一些统计平均量 $E[x_n]$ 、 $\phi_{xx}(m)$ 等的定义与求法。但按上面讨论的式子求 $E[x_n]$ 和 $\phi_{xx}(m)$ 都需要预先知道一维、二维概率分布。这实际上是不容易办到的。即使用集合的平均来求它, 即

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\text{对 } N \text{ 个} \\ \text{样本}}} x_n \quad (1-42)$$

$$\phi_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\text{对 } N \text{ 个} \\ \text{样本}}} [x_n x_{n+m}] \quad (1-43)$$

也需要对一个平稳随机过程获得数量很多的平行样本序列, 这实际上也是困难的。

仍以抛硬币为例, 如果有趋于无穷多个人同时抛同样的且正反面对称的硬币, 可以估计到在每个时间点上统计平均来讲, 将有 $1/2$ 的人是 $(+1)$, $1/2$ 的人是 (-1) , 即出现 $(+1)$ 的概率是 $1/2$, (-1) 的概率也是 $1/2$ 。由于它是一个平稳随机过程, 它的概率分布不随时间的平移而变化, 因此, 如果是一个抛趋于无穷多次, 可以估计到平均来讲将也会是出现 $x = (+1)$ 的概率为 $1/2$, $x = (-1)$ 的概率也是 $1/2$ 。这二种结果会相同是因为概率分布不随时间变化, 即它是一个平稳随机过程。因此, 看来对于一个平稳随机过程, 全体集合的平均可以用无穷时间的平均来代替, 这正是各态历经假设: 一个平稳随机过程, 集合平均等于一个样本函数在整个时间轴上的平均值。这样就使得在实际工作中, 估计一些统计平均量成为比较现实。

如果随机变量 x_n 的时间平均用 $\langle x_n \rangle$ 表示, 则

$$\langle x_n \rangle \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad \text{各态历经假设} \quad E[x_n] = m_x \quad (1-44)$$

自相关序列为

$$\langle x_n x_{n+m} \rangle \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) x(n+m) \quad \text{各态历经假设} \quad E[x_n x_{n+m}] = \phi_{xx}(m) \quad (1-45)$$

实际上我们的观察手段只能让我们观察到平稳序列的一个样本的有限片段, 因此 N 只能是有限值。一个样本函数在有限的时间轴上的平均值, 是它的统计均值的一个估计值, 并以真值的符号上冠以 “ $\wedge$ ” 记之, 因此有

$$\hat{m}_x \triangleq \langle x_n \rangle_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad (1-46)$$

$$\hat{\phi}_{xx}(m) \triangleq \langle x_n x_{n+m} \rangle_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) x(n+m) \quad (1-47)$$

这里 $\hat{m}_x$ 表示 m_x 的估计值, $\hat{\phi}_{xx}(m)$ 表示 $\phi_{xx}(m)$ 的估计值。

下面让我们以一个总结性的例子, 作为本节的结束。

〔例〕 确定前面抛硬币过程的几个基本特征量。

抛硬币的特点是只有二种可能的结果 $x = +1$ 及 $x = -1$, 并且每次试验是独立的 (这种试验称为伯努利 (Bernoulli) 试验, 服从二项式分布)。同时, 抛硬币过程属于平稳随机过程, 即 $x = +1$ 与 $x = -1$ 的概率分布是与时间无关的。

如果 $x = +1$ 的概率为 p , $x = -1$ 的概率为 $1-p$, 求 m_x , σ_x^2 , $\phi_{xx}(m)$ 。

$$m_x = E\{x\} = \sum x p_1(x) = (+1)p + (-1)(1-p) = 2p-1$$

$$E\{x^2\} = \sum x^2 p(x) = (+1)^2 p + (-1)^2 (1-p) = 1$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - m_x^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p)$$

$$\phi_{xx}(m) = E\{x_n x_{n+m}\} = \begin{cases} E\{x_n^2\} = 1, & m=0 \\ E\{x_n\} \cdot E\{x_{n+m}\} = m_x^2 = (2p-1)^2, & m \neq 0 \end{cases}$$

当 $p = 1/2$, 则 $m_x = 0$, 得

$$\phi_{xx}(m) = \delta(m)$$

对于一个随机过程来说, 只要所有它在不同时间点上的随机变量的取值相互统计独立, 并且它的统计均值为 0, 它的自相关函数就将有单位样本函数的形式。这种过程 (称为白噪声) 在信号处理中起着重要作用。

§ 1.3 随机信号的 z 域及频域 (统计) 表达

由前面关于 $\phi_{xx}(m)$ 及 $\gamma_{xx}(m)$ 的讨论中, 我们知道

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xx}(m) = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xx}(m) = m_x^2$$

当 $m_x = 0$ 时, $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xx}(m) = 0$

这说明虽然无限能量信号本身的 z 变换与傅氏变换不存在, 但它的自协方差序列和自相关序列 (当 $m_x = 0$ 时) 的 z 变换与傅氏变换却是存在的。

1.3.1 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 的 z 变换及其收敛域

记 $\gamma_{xx}(m)$ 的 z 变换为

$$\mathcal{Z}[\gamma_{xx}(m)] = \Gamma_{xx}(z)$$