

高等学校交流譜文

普通物理学

PUTONG WULIXUE

原子物理学部分（上册）

苟清泉 吳知非編

人民教育出版社

高等学校交流講义



普通物理学

PUTONG WULIXUE

原子物理学部分（上册）

着清泉 吳知非編

本书是根据编者几年来在吉林大学物理系讲授“普通物理学”课程中原子物理学部分的讲义修改补充而成的。全书共十四章，分上、下两册出版。上册包括绪论及第一章至第七章，主要內容是：原子结构与原子光谱，分子结构与分子光谱；下册包括第八章至第十四章，主要内容是原子核。

本书可作为综合大学及高等师范学校物理各专业“普通物理学”课程原子物理学部分的教材，也可供高等工业学校的相近专业选用。

簡裝本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本書暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相應減少20%。希望諒。

普通物理学

原子物理学部分（上册）

荀清泉 吳知非編

人民教育出版社出版

（北京東書局印業公司印制第2版）

人民教育印刷厂印製

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 13010·955 开本 787×1092 1/16 印张 8 1/4/16
字数 162,000 印数 10,001—18,000 定价 (6) ￥0.55
1961年7月第1版 1961年7月北京第2次印刷

序　　言

本书是根据我們几年来在吉林大學物理系講授“普通物理学”課程中原子物理学部分的講义整理而成的。根据几年来教学实践經驗以及讀者們所提的意見，原講义逐年均有修改，最近又作了次較全面的修改和补充，才整理成这本书。

本书的內容属于基礎課“普通物理学”的范畴，因此在讲解时，着重于从实验事实出发，主要应用半經典半量子的理論，有时也用一些量子力学的結果，來对原子内部所发生的物理現象和运动規律进行解釋和探討。但在內容上和理論闡述上比过去一般“普通物理学”課程中原子物理部分略有充实和提高。这是由于这門學科近几年来发展很快，內容很丰富，故有好些东西必須反映到教材中来。

本书的內容共分三大部分：第一部分为原子結構与原子光譜，包括本书的第一章到第六章；第二部分为分子結構与分子光譜，即本书的第七章；第三部分为原子核，包括本书的第八章到十四章。

本书最近这一次的修改和加工工作，是在很短的时间內匆促完成的，并且限于我們的学識和水平，书中一定有很多缺点、遺漏、甚至錯誤，我們誠懇地希望讀者們給我們提出批評和建議，以便以后有机会再版时，把书修改得更为完整一些。

在这一次的修改工作中，北京大学李椿同志和南开大学王淑賢同志曾对本书某些內容的安排上提出了一些建議和寶貴意見，我校潘守甫同志帮助校閱了全稿，李永基同志帮助繪制了大部分插圖，赵旗与赵世昌两同志帮助攝照了一部分圖片，黃树勋同志帮

序 言

助編制了目錄，我們對這些同志們的熱忱幫助，表示十分感謝。

苟清泉 吳知非

1961年4月14日于吉林大學

上册目录

序言	iv	
绪论	1	
第一章 原子结构初期理论的实验基础	5	
§ 1.1. α 粒子的散射实验和原子的核模型(6)	§ 1.2. 原子光谱的实	
验规律(20)	§ 1.3. 佛兰克与赫芝的实验(26)	
第二章 氢原子	30	
§ 2.1. 玻尔的基本假设(31)	§ 2.2. 玻尔的氢原子理论(34)	§ 2.3.
类氢离子的光谱 (43)	§ 2.4. 由于原子核运动所引起的效应 (46)	
§ 2.5. 氢原子的椭圆轨道(53)	§ 2.6. 空间量子化(60)	§ 2.7. 原
子磁矩与史特恩-盖拉赫实验(66)	§ 2.8. 正常塞曼效应(68)	§ 2.9.
索麦弗的相对论修正(75)	§ 2.10. 玻尔的对应原理(84)	§ 2.11. 玻
尔理论的地位和局限性(89)		
第三章 多电子原子	91	
§ 3.1. 碱金属原子结构及其光谱(92)	§ 3.2. 碱金属光谱的双线结构	
与电子自旋(107)	§ 3.3. 电子自旋与轨道运动间相互作用能的计算(118)	
§ 3.4. 氢原子光谱线的精细结构(120)	§ 3.5. 原子的矢量模型(125)	
§ 3.6. 具有两个价电子的原子底光谱(130)	§ 3.7. 反常塞曼效应(135)	
第四章 邓捷列夫周期系与原子的电子壳层结构	141	
§ 4.1. 邓捷列夫周期系(141)	§ 4.2. 泡利原理和电子壳层结构(148)	
§ 4.3. 电子壳层的建造(149)		
第五章 倫琴光谱	158	
§ 5.1. 倫琴射线(158)	§ 5.2. 連續倫琴光譜(161)	§ 5.3. 线状倫
伦琴光谱(162)	§ 5.4. 倫琴吸收光譜(167)	
第六章 量子力学概要	168	
§ 6.1. 德布罗意的假设(168)	§ 6.2. 德布罗意假设的实验验证(168)	
§ 6.3. 粒子的波函数与薛定方程(172)	§ 6.4. 粒子在方匣中的	
运动(176)	§ 6.5. 量子力学对氢原子问题的处理(179)	
§ 6.6. 氢原子的基态(184)		
第七章 分子结构与分子光谱	186	
§ 7.1. 分子结构(186)	§ 7.2. 分子光谱(188)	§ 7.3. 分子的离解
热(201)	§ 7.4. 分子的电子状态(203)	§ 7.5. 光的并合散射现
象(205)	§ 7.6. 液体与固体的发光(211)	

緒論

在古代的希腊和罗马就已萌芽了的原子論，在整个物理学发展史中是一个进步的，与唯物論的科学思潮相适应的理論。在十八世紀的 40 年代，罗蒙諾索夫就很完善地发展了物质底原子-动力論，証明热現象是由于原子底运动。物理学和化学进一步的发展，証实了物质的结构是不連續的，但不能从这里得出物质是由絕對简单的和不可分割的原子所組成的結論。可是曾有許多科学家認為只用不可分割的原子-微粒的結合，就能够說明实际世界底全部多样性，而且認為原子是物质底最后的“本原”。这种观点是形而上学的，不是从实验得出的。辯証唯物論断定客觀存在着的世界是不可穷尽地多种多样的，而我們关于它的知識永远是近似的，但却逐渐地深化和愈益准确，不但原子是不可穷尽的，电子和其他基本粒子也都是不可穷尽的，二十世紀物理学的发展史完全証实了这个观点。

著名的俄国化学家門捷列夫所发现的周期律是具有重大意义的，这定律指出了各种化学元素的原子間互相关联的性质，是建立原子結構理論时的一个指导原則。下面，我們就要簡略地說明原子結構理論的发展过程。

在 1897 年前后，科学家們逐渐地确定了电子的各种基本特性，并确立了电子是各种化学元素的原子的共同組成部分。既然一切原子中都有带负电的电子，那么原子中就必然有带正电的物质，这說明原子是一个复杂的带电系統。从实验和理論两方面来研究原子本身的结构，內在的規律性和原子現象的应用等，就形成了原子物理学的丰富內容，在研究原子結構中首先要解决的问题

就是原子中帶正電的物質的分布情況。二十世紀初期，對這一問題曾提出了兩種不同的假設。

第一種假設是湯姆孫在 1903 年提出的，他假設原子中的正電荷以均勻的體密度分佈在一個大小等於整個原子的球體內，而帶負電的電子則一粒粒地在球內不同的位置上分佈著，並可以分別地以某種頻率在各自的平衡位置附近振動，從而出發電磁輻射，輻射的頻率就等於電子振動的頻率。這個模型和實驗的結果相矛盾，所以很快地就被放棄了。

第二種假設是盧瑟福於 1912 年提出的，他假設原子中心是一個重的帶正電的核，電子圍繞這核轉動，與太陽系的構造相似。與整個原子的大小相比，核的大小是很小的。這種模型叫做原子底核模型，是盧瑟福在他所做的著名實驗即 α 粒子的散射實驗基礎上提出來的，同時也和其他實驗結果符合，所以很快地就被公認了。

經典的電磁理論是與原子的核模型有矛盾的。因為根據經典電磁理論，繞核旋轉的電子有加速度，應當自動地放出輻射能來，放出輻射能時，原子的能量要逐漸地減少，頻率也逐漸地改變；因而發射光譜是連續光譜，同時電子因能量的逐漸減少要逐漸地接近原子核而最後和核碰上，因此使原子成為一個不穩定的系統。但事實上原子是穩定的，原子所發射的光譜是線狀的而不是連續的。這些事實說明了從研究宏觀現象而確立的經典理論，不能適用於原子中的微觀過程，因而就需要進一步分析原子現象，探索原子內部的規律性，並建立適合於微觀過程的原子理論。

原子的發光現象是與原子內部結構有密切聯繫的，因此為了要探索原子內部的規律性，也必須對光的本性有進一步的了解。經典的電磁波理論能夠很好地解釋反射，干涉……等光在傳播過程中所表現的現象，但在受熱物体的發光現象——熱輻射——中，經

典理論就遇到了困难，不能解釋全部實驗結果。為了解決這個問題，德國物理學家普朗克於 1900 年提出了量子假說，他假設受熱物体中振動着的帶電粒子所可能具有的能量不是連續的，而是某一最小量值的整數倍，帶電粒子所放出的或吸收的能量也僅是這最小能量的整數倍。這個假說很成功地說明了熱輻射現象。

當紫外光這一類波長較短的光線照射在金屬表面上時，金屬中有電子逸出來，這現象稱為光电效應。經典的理論更不能解釋這種現象。為了解決這個問題，愛因斯坦於 1905 年提出了光子的假說，他假設光是由一顆一顆具有一定質量、能量和動量的粒子所組成的粒子流，這種粒子稱為光子。這個假說能夠很好地解釋光电效应，使量子論又向前推進了一步。

原子所發射的線光譜和原子內部結構的關係問題也是經典理論無法解答的。1916 年，丹麥物理學家玻爾 (N. Bohr) 在盧瑟福所提出的核模型的基礎上，發展了量子概念，提出了有關原子結構的假說。他假設原子所可能具有的能量形成不連續的能量級，當原子的能量級發生躍遷時，就發射出一定頻率的光。玻爾的假說能夠說明氫原子光譜等某些原子現象，有相當的成功；但對原子問題作進一步的研究時，也顯示出這理論有很大的缺點。

在 1924 年德布羅意 (De Broglie) 提出了粒子的波動性的假說後，薛定諤 (Schrödinger) 和其他學者在這新的基礎上建立起了量子力學，能很好的解釋原子現象，但這並不是說量子力學已經很完全地解決了原子問題，原子是不可窮盡的，由於實驗技術的不斷發展，將能更進一步地認識原子現象，從而理論將進一步發展，比現在形式的量子力學能夠更深入地反映原子的規律性。

原子物理學發展的次一階段是研究原子核的內部結構。在 1896—1898 年間，法國物理學家貝克勒耳 (H. Becquerel) 發現鈾鹽能夠發出某種人目所看不見的射線來，這種現象稱為天然放射

性現象；接着瑪麗亞·斯克拉多芙斯卡·居里(Marie Skłodowska Curie)和彼埃耳·居里(Pierre Curie)夫妇发现具有放射性更强的鐳元素。1902—1903年間卢瑟福等研究了天然放射線的組成及天然放射現象的規律性。这些事實說明了原子核是一個複雜體而且按照一定的規律運動變化着。

1919年，卢瑟福利用天然放射線中的 α 射線轰击氮原子，第一次得到了人为的核反应，并发现了質子。1932年，查德威克(Chadwick)发现了中子的存在。接着苏联物理学家伊凡宁科(Л.Л. Иваненко)提出了原子核是由質子和中子所組成的假設，并为世界所公認。科學家們在这一阶段中的工作初步奠定了原子核結構問題的基础。

1934年約里奧居里夫妇发现了人为的放射性核；勞倫斯用人工加速粒子產生了放射性核；費米用中子引起了核反应。这些研究打开了同位素应用和核反应研究的途徑。

1939年哈恩和史特拉斯曼發現了重核的分裂，約里奧居里等人研究了鈾核分裂的鏈鎖反應，指出这类核反應中有巨大的能量发生。

1942年費米及其同事們建成了世界上第一个原子核反應堆，实现了原子核的鏈鎖反應，為原子能的利用及制备放射性同位素提供了条件。并提供了新的實驗方法以研究核的結構。

目前，關於加速器的試制和研究工作，苏联占世界第一位。1957年苏联已經制成了世界上最大的同步穩相加速器产生高能粒子，可将質子加速到具有100亿电子伏特的能量，為美国最大的同类加速器的1.6倍。

由於高能物理的研究，最近几年在基本粒子物理方面也取得很大的成就，迄今已預見或發現了許多类型的基本粒子，關於基本粒子的理論方面的研究主要是以量子場論为基础。

在我国，关于近代物理的研究只在 1930 年前后才略有开始，全国解放以前，散在国内各地的原子核科学的研究人員只有 10 人左右，设备方面，连一台小型的加速器也没有，最简单的观测粒子用的計数管也不能生产。解放以后，在党的领导下，我国原子核物理学的研究得到了迅速的发展。1958 年 6 月，在苏联的帮助下，我国建成了一座現在亚洲最大的重水型研究性反应堆，制成了能加速 α 粒子到二千五百万电子伏特的迴旋加速器，苏联供应的电子感应加速器也正在运转。在这些加速器和反应堆上正紧张地进行着原子核物理，辐射化学，同位素制备，放射生物等方面的研究工作。

在探测仪器方面，制成了核子乳胶和中子計数管及 β 、 γ 計数管等等。

关于宇宙线和高能物理方面的研究，我們曾在海拔为 3,185 米的高山上，建立了一个宇宙线实验室，并曾拍摄了 10 万多对立体照片，研究了重介子和超子的质量及衰变現象等。还建立了观测宇宙线的设备。

我国学者还参加了联合原子核研究所（在苏联）的研究工作，已取得了若干重要成果。

放射性化学和同位素应用的工作，在我国已迅速的从无到有地建立起来了，同位素的应用是原子能科学中对于发展生产技术，和各种基础科学的科学研究方面具有广泛的直接意义，我国社会主义工农业建設的高速度发展，給原子能科学展示了无限广阔的远景。

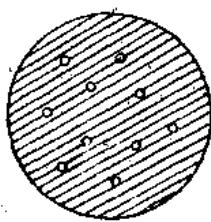
第一章 原子結構初期理論的實驗基础

对原子本身的结构和其内在的規律性的較清楚的了解，是在
试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

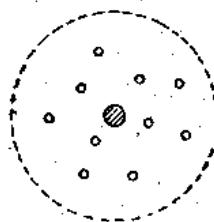
二十世紀初由若干物理学家从實驗和理論上經過相当长时期的探索后才得到的。我們將要在本章中介紹一些对探索原子内部結構和建立原子結構理論起直接作用的基本實驗和實驗規律。卢瑟福的原子的核模型和波尔的原子結構理論就是在这些實驗的基础上建立起来的。

§ 1.1. α 粒子的散射實驗和原子的核模型

我們已經在緒論中指出，关于原子結構的問題，在二十世紀初期就曾提出两种不同的模型，一种是 1903 年湯姆孙首先提出的，他假設原子中的正电荷以均匀的体密度分布在一个大小等于整个原子的球体内，而电子則一粒粒地分布在这球內的不同位置上。另一种是 1912 年卢瑟福提出的，他假設原子內部的正电荷联系着大的質量而集中在很小的中心体积內（就是原子核），而带负电的电子則分布在与原子大小同数量級的封閉軌道上，繞着核旋轉，好象行星系一样，对中性的原子，则所有电子所带负电荷之和等于原子中心的正电荷。由于这个模型假設原子具有一个很小的带正电荷的核心存在，故称为原子的核模型。



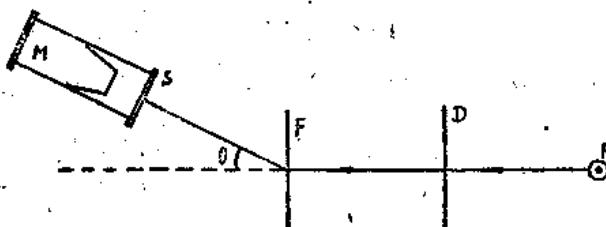
(1) 湯姆孙的模型



(2) 卢瑟福的模型

图 1.1. 原子結構模型的示意图，图中小圆圈代表电子，斜线处代表正电荷的分布。

上面所提出的两种模型，究竟哪一种正确，曾由 α 粒子的散射實驗來檢驗，湯姆孙的模型和實驗結果相矛盾，所以很快就被放棄。

图 1.2. α 粒子散射实验的示意图。

栅栏组 D 后，成为一束狭窄的均匀的 α 射线，通过金属箔叶 F 后，由于各 α 粒子曾受金属箔中原子的不同影响，将沿着不同的方向散射。熒光屏 S 及放大鏡 M 可以沿着以 F 为中心的圓弧上移动。当 S 和 M 对准某一方向时，通过 F 而在这个方向散射的 α 粒子就射到 S 上而产生闪光，用放大鏡 M 观察闪光，就可把单位时间内在这个方向散射的 α 粒子数记录下来。用这种方法就可以研究 α 粒子通过金属箔叶后按不同的散射角 θ 的分布情况。为了避免空气分子对散射的影响， α 粒子的散射必须在真空中进行，故图 1.2 所示的仪器除放大鏡外都应放在真空中。

盖革(Geiger)与馬斯敦(Marsden)在 1909 年按照上述的实验方法发现大多数的 α 粒子经过金属箔叶后偏轉的角度是不大的；但有少数 α 粒子偏轉的角度却很大，約有 8000 分之一的 α 粒子的散射角度超过 90° 以上，有的几乎达到 180° ，即和入射时相反的方向散射。

为什么 α 粒子会发生大角度的散射？这与原子中正电荷的分布情况有密切关系。如果采用湯姆孙的原子模型，即假設原子的正电荷均匀地分布在整個原子中，它的半徑的数量級为 10^{-8} 厘米，则由計算可知， α 粒子通过原子时不会发生实验中所觀察到的大角度散射，湯姆孙的原子模型因此就被放棄了。只有原子的正电荷集中在很小的体积的情形下，排斥力才会大到使 α 粒子发生大

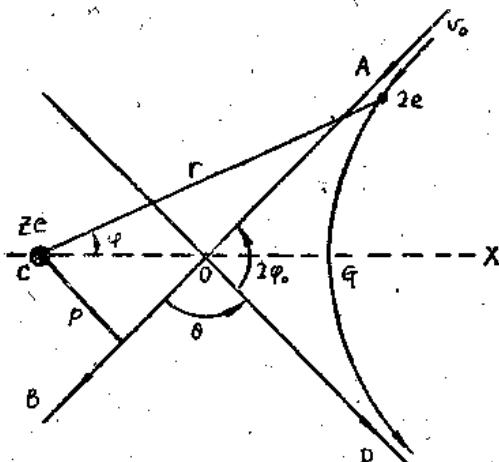
愈大，与在湯姆孙模型中的情况相反，因为这时排斥 α 粒子的正电荷 Ze 全集中在原子的中心固定不变，当 α 粒子离中心的距离为 r 时，所受的斥力为 $F_2 = 2e \cdot Ze/r^2 = 2Ze^2/r^2$ ，故 α 粒子逐步接近中心时所受的斥力，按距离的平方反比律随距离的减少而一直增大，可以大到使 α 粒子偏轉很大的角度。在原子内离中心相同的距离 r 上，在卢瑟福模型中所受的斥力 F_2 要比在湯姆孙模型中所受的斥力 F_1 大 $F_2/F_1 = a^3/r^3$ 倍，愈接近中心时，在两种情形中所受的斥力相差愈大。根据以上的分析显然可見，在湯姆孙模型的情形下 α 粒子不能产生大角度的散射，而在卢瑟福的情形下可以产生大角度的散射。

在原子的核模型的基础上，卢瑟福曾提出了下述的 α 粒子散射的定量理論，以便可与实验結果作定量的比較，从而可以进一步檢驗这个模型与散射理論。

在原子的核模型中 α 粒子的散射轨道如图 1.5 所示。由于电子的质量很小，对 α 粒子的作用很小，可以略去不計。所以，当 α 粒子接近原子核时，可以当作只是有两个带正电的点电荷（ α 粒子与原子核）相互以静电斥力作用，而且假設服从庫倫定律。已知 α 粒子的电荷为 $2e$ ，若原子核的电荷为 Ze (Z 为一整数)，当两者相距 r 时，相互排斥的作用力为

$$F = \frac{2Ze^2}{r^2}.$$

若原子核的质量比 α 粒子的大很多，则可以把它看作是静止不动的。由于 α 粒子受原子核的斥力，它将偏轉，而沿一双曲线的一支运动，原子核处在其外焦点处。当 α 粒子离开原子核时将沿 OD 方向运动，与其原来射入时的方向 AB 成 θ 的角度，如图 1.5 所示。我們可以算出 α 粒子的散射角度 θ 与其投射时的能量与瞄准距离 p 之间的关系。

图 1.5. 在原子的核模型中 α 粒子散射时的轨道。

设 α 粒子的质量为 M , 投射时以速度 v_0 沿 AB 方向向原子核投射, 当接近原子核 C 时, 受有斥力 F 的作用, 在距核为 r 处速度改变为 v , 根据能量守恒与动量守恒定律, 我们有:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{2Ze^2}{r}, \quad (1.1)$$

$$Mv_0 p = M \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) r. \quad (1.2)$$

将公式(1.1)中的 v^2 用极坐标表示, 则得:

$$v_0^2 = \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4Ze^2}{Mr}, \quad (1.3)$$

由(1.2)式得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p v_0}{r^2}, \quad (1.4)$$

且

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p v_0}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (1.5)$$

将(1.4)和(1.5)式代入(1.3)式后, 可得 α 粒子运动轨迹的微分方

程式为:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{4Ze^2}{Mv_0^2 p^2 r} - \frac{1}{p^2} = 0. \quad (1.6)$$

若令 $u = \frac{1}{r}$, $r_0 = \frac{4Ze^2}{Mv_0^2}$, 则上式可以简化为

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 + \frac{r_0}{p^2} u - \frac{1}{p^2} = 0,$$

或

$$\frac{p du}{\sqrt{1 - r_0 u - p^2 u^2}} = d\varphi,$$

上式可用下列积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \cos^{-1} \frac{(2cx + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

积出, 按图 1.5 所示的情况选择极坐标, 则得 α 粒子的运动轨迹的方程式为

$$u = \frac{d \cos \varphi - 1}{a},$$

或

$$r = \frac{a}{d \cos \varphi - 1}, \quad (1.7)$$

其中 $a = 2p^2/r_0$, $d^2 = 1 + 4p^2/r_0^2$.

(1.7) 式为一双曲线的极坐标方程式, 以原子核 Ze 为其一焦点。令 $r = \infty$, 可得它的两条渐近线与 X 轴所成的角度为

$$\varphi_0 = \pm \cos^{-1}(1/d). \quad (1.8)$$

由图 1.5 可知, α 粒子偏转角度 $\theta = \pi - 2\varphi_0$, 所以

$$\cot \frac{\theta}{2} = \tan \varphi_0 = (\sec^2 \varphi_0 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

利用(1.8)式的結果, 則得:

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2p}{r_0} = \frac{Mv_0^2}{2Ze^2} \cdot p. \quad (1.9)$$

上式表示偏轉角度 θ 与瞄准距离 p 之間的关系，由此式可知，瞄准距离 p 愈小，偏轉角度 θ 愈大。图 1.6 中表示在三种不同的瞄准距离 p 下， α 粒子散射的情形，当 p 很小时，偏轉角 θ 可以超过 90° ，即 α 粒子与原子碰撞后可以被抛回。

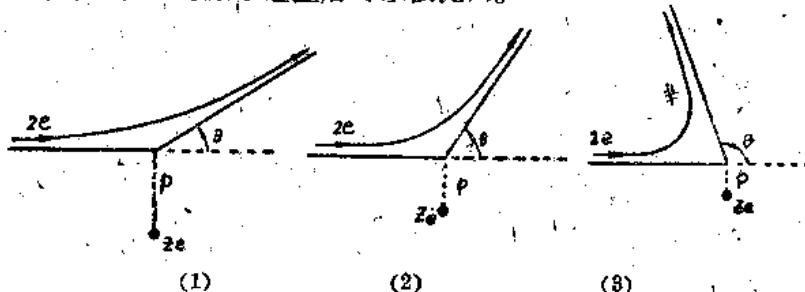


图 1.6. 在不同瞄准距离 p 下， α 粒子散射的情形。

(1.9) 式不能直接用实验来验证，因其中的 p 不能度量；但我们可以从此式算出沿某一角度散射的 α 粒子数目，这正是可以用实验来测定的。

设有平行的一束 α 粒子垂直射入金属箔片，其厚度为 t ，单位体积内含有的原子数为 n ，这个箔片在单位面积内所含有的原子数，也就是原子核数，为 nt 。由(1.9)式可知当一 α 粒子与一核的瞄准距离等于和小于 p 时，则它的偏轉角将等于和大于 θ ；也就是说当 α 粒子射到以核为圆心，以 p 为半徑的圆靶内时，将产生 $\geq \theta$ 的偏轉角。这一圆靶的面积 πp^2 叫做散射的有效截面。若在金属箔片内以每一原子核为中心都画上这样的圆靶，则在箔片的单位面积内为这些圆靶所占面积的总和为 $\pi p^2 nt$ 。一个 α 粒子打中这些圆靶而产生 $\geq \theta$ 的偏轉角的几率可以用面积 $\pi p^2 nt$ 与单位面积之比来表示：

$$f = \pi p^2 nt = \frac{1}{4} \pi n t r_0^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.10)$$

微分上式，即可得到一 α 粒子散射后偏轉角在 θ 与 $\theta + d\theta$ 间的几