面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

全国历年考研试题
分类全解分析预测

考研数学
试题分类精解

经济类 数学三至四

COLLEGE MATHEMATICS

黄光谷 郑 列
李 刚 万荣国 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

经济类
数学三至四

考研数学试题分类精解

全国历年 考研试题 分类全解 分析预测

黄光谷 郑 列
李 刚 万荣国 编

湖南大学出版社
2001年·长沙

内 容 提 要

本书汇集了1987~2001年全国硕士生入学统一考试经济数学三和四的全部试题，并按照2001年考研数学考试大纲数学三的考试内容和考试要求的顺序编目，重新分类编排且逐题给出了精练解答，第一篇包括微积分(上册)的极限与连续，一元函数微、积分，共三章；第二篇包括多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程等三章；第三篇是线性代数；第四篇是概率论与数理统计. 对于数学四的考生，加 * 号的内容可暂时跳过. 第五篇给出了数学三或四历年考研试题的分类统计、分析及预测；第六篇是附录，给出了当年数学三和四的试题、解答及评分标准，供读者模拟测试.

本书既适宜各财、经、管理相应于经济数学三和四各专业一、二年级大学生与相应课程教学进度同步学习和复习备考，也特别适宜高年级大学生和考研者复习、备考，还可供教师教学、拟题查阅和参考.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学试题分类精解．经济类/黄光谷等编．—长沙：湖南大学出版社，2001.6

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

ISBN 7-81053-368-X

Ⅰ.考… Ⅱ.黄… Ⅲ.经济数学—研究生-入学考试—解题 Ⅳ.F224.0-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第033627号

考研数学试题分类精解 经济类 数学三至四

Kaoyan Shuxue Shiti Fenlei Jingjie

黄光谷 朱晓平 李 刚 郑 列 编

□责任编辑 李立鹏 李刚 王海鹰

□总 策 划 龙 挺

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 9 □字数 234千

□版次 2001年6月第1版 □2001年6月第1次印刷

□印数 1-5 000册

□书号 ISBN 7-81053-368-X/O·24

□定价 14.00元

前　言

历年全国统一研究生入学试题及解答是一个知识宝库，也是指导新课教学的指挥棒. 本书汇集了(1987～2001)年全国硕士生入学统一考试经济数学三和四[①]的全部试题，并按照2001年部颁考研数学考试大纲中数学三和四的考试内容和考试要求的顺序编目(这顺序与微积分、线性代数、概率统计各课程的新课教学顺序基本上是一致的)，并重新分类编排分为四篇且逐题给出了精练解答. 这样编排既便于考研生循序渐进地进行复习、备考，也便于新学这几门课程的低年级在校生与新课进度同步学习和复习. 在第五篇给出了编者对1987～2000年数学三和四试题的统一分类、统计、分析及预测，第六篇是2001年数学三和四的试题、解答及评分标准，供读者模拟测试.

在各章、节的试题及解答中，按年号及数学三至四的顺序编排，其中的重复试题亦按此顺序优先非重复选入(即去掉了顺序在后的重复题). 题号1. Ⅲ、99、一、(1)、(3′)的意思依次是：某(章)节的第1题，取自数学三、1999年的第一大题的第(1)小题，(3′)系指本题满分3分；其余类似. 其中画______者为填空题；留[　　]者为选择题；留(　　)者为判断是非题.

许多试题是综合题，为了便于新学者学习，对综合题基本上是按逆序编排，而非按照用到的主要知识排列. 例如某题既用到闭区间上连续函数的性质，又用到微分中值定理和变上限积分，则按照逆序将该题编入微积分基本定理这一节中. 所以某些章节的试题较少或没有，不是该节内容不重要，而是其知识较前、它是基础，而多次出现在后面章节的综合题中. 有些综合题既用到微积分，又用到线性代数和概率统计知识的，也按照逆序选列在后面的某章节

---

① 1987～1996年的数学二为原数学三，数学三、四为原数学四、五.

之中.

本书的题量较大，从综合分析及预测可看出大致趋势，可供读者备考参考. 熟读此书，触类旁通，具有“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟”的功效，使临考胸有成竹，重点明确，胜卷在握.

参加本书编写工作的，还有李美珍、黄青、李杨、蔡晓英、黄东等同志.

编写本书的初衷，与素质教育并不矛盾. 因为一方面，许多考研试题，本身就体现了数学素质及综合素质方面的要求，阅读这些题解，有利于提高读者的素质；另一方面，阅读本书，可以帮助许多读者顺利地通过考试，可使读者把更多的时间和精力用到提高素质方面去.

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能会有错误或缺点，恳请读者和同行批评指正，以便再版时修改.

编者

2001 年 2 月

目　　次

第二篇　微积分(下)

第四章　多元函数微积分学

第五章　无穷级数

*第六章　常微分方程与差分方程

第三篇　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩阵

第三章　向量

第一篇　微积分(上)

第一章　函数、极限、连续

§1　函数、预备知识

1. Ⅲ、90、二、(1)、(3′)　设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$是　　　[　　]

(A)偶函数；　　　(B)无界函数；

(C)周期函数；　　　(D)单调函数.

解　选(B). 显见 $x\to\frac{\pi^{\mp}}{2}$时，$\tan x\to\pm\infty$，$f(x)\to\pm\infty$是无界函数，故选(B).

又 $x\to 3\pi^{-}/2$ 时，$f(x)\to+\infty$，结合上述知 $f(x)$不是单调函数，排除(D)；

显见 $f(-x)=x\tan xe^{-\sin x}\neq f(x)$，可排除(A)；

$f(x)$中的因子 x 不是周期函数，$f(x)$也不是周期函数，可排除(C)，故应选(B).

2. Ⅳ、92、一、(3)、(3′)　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$______的定义域为______.

解　$\underline{\arcsin(1-x^2)；[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$. 由题设，

$$f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=1-x^2\Longrightarrow\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)；$$

再由　$|1-x^2|\leqslant 1\Longrightarrow -1\leqslant 1-x^2\leqslant 1\Longrightarrow |x|\leqslant\sqrt{2}$，

故 $\varphi(x)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

§2 极限的定义和性质

1. Ⅲ、87、一、(1)、(2′) $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x}=\infty$（判断是非题）. ( )

解 （非） $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/x}=1/\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/|x|}=0$;

而
$$\lim_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty\neq 0,$$
所以 $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x}$ 不存在，也不是无穷大（量）.

2. Ⅲ、00、二、(1)、(3′) 设对 $\forall\, x$，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ [ ]

(A) 存在且等于零； (B) 存在但不一定为零；

(C) 一定不存在； (D) 不一定存在.

解 选(D). 当 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$ 时，由夹逼准则知，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，由此还可否定(C). 或者举例说明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 可能存在，例如，由重要不等式，得

$$|\sin t|\leqslant|t|\leqslant|\tan t|\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)\Longrightarrow$$
$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\tan\frac{1}{x}\right|\left(|x|>\frac{2}{\pi}\right),$$

取 $\varphi(x)=\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$，$g(x)=\left|\tan\dfrac{1}{x}\right|$，$f(x)=\left|\dfrac{1}{x}\right|$，

显见
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0,$$
且
$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0.$$
由此还可否定(B). 但符合题设条件的 $f(x)$，还有可能使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，由此还可否定(A)、(B).

例如，不妨设 $x>0$，有 $x-\dfrac{1}{x}<x<x+\dfrac{1}{x}$，取 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x}$，

$f(x)=x$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$,显见 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$,且

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$(不存在).故选(D).

§3 极限运算法则

1. Ⅲ、88、一、(1)、(2′) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 均存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在. ( )

答 (非).反例如下:设 $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos\dfrac{1}{x}$,虽然

$$\lim_{x\to0}x^2=0,\text{及}\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0(\text{无穷小乘有界量})$$

都存在,但 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

2. Ⅲ、90、一、(1)、(3′) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$ $=$_______.

解 $\underline{2}$.先乘共轭因式有理化,再求极限:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}$$

$=2.$

3. Ⅲ、94、二、(1)、(3′) 曲线 $y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 [ ]

(A)1 条; (B)2 条; (C)3 条; (D)4 条.

解 选(B). 因为$\lim\limits_{x\to 0}y=+\infty$；又

$$\lim_{x\to\infty}y\xlongequal{\text{令 } t=1/x}\lim_{t\to 0}e^{t^2}\arctan\frac{1+t-t^2}{1-t-2t^2}=\frac{\pi}{4},$$

所以 $y=\pi/4$ 与 $x=0$(y 轴)是由此曲线的水平与铅直渐近线，又

$$\lim_{x\to -1}y=\frac{\pi}{2}e,\ \lim_{x\to 2}y=\frac{\pi}{2}e^{1/4},$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{4}\cdot 0=0,\ b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\frac{\pi}{4},$$

可见 $x=-1$ 与 $x=2$ 不是 y 的铅直渐近线，除了 $y=\pi/4$(水平渐近线)以外，y 别无斜渐近线，故 y 仅有 $y=\pi/4$ 与 $x=0$ 两条渐近线，故选(B).

4. Ⅳ、91、二、(2)、(3′) 设数列的通项为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\ 1/n, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$$

则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是

(A)无穷大量； (B)无穷小量；

(C)有界变量； (D)无界变量.

解 选(D). 显见$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=+\infty$，所以$\{x_n\}$既非无穷大，亦非无穷小，也非有界量，排除(A)、(B)、(C)；是无界量，应选(D)，

5. Ⅳ、93、一、(1)、(3′)

$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$______.

解 $\sqrt{2}/2$.【对这类无理式，像前面第 2 题一样，常采用乘以共轭因式有理化的办法去掉“未定性(式)”，再求极限.】

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+n)n}+\sqrt{\frac{1}{2}(1+n-1)(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Ⅳ、99、一、(1)、(3′) 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]}{n^2}=$______.

解 $\underline{\ln a/2}$. 由指数与对数函数的性质，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a^1\cdot a^2\cdots a^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\ln a$$

$$=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\frac{\ln a}{2}.$$

§4 极限存在准则与两个重要极限

1. Ⅲ、87、五、(4′) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{1/x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{e^x}=e^1=e.$

2. Ⅲ、89、三、(1)、(5′) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{x/2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{x/2}$

$$\xlongequal{t=1/x}\lim_{t\to 0}\left[(1+\sin 2t)^{\frac{1}{\sin 2t}}\right]^{\frac{\sin 2t}{2t}}=e^1=e.$$

3. Ⅲ、93、一、(1)、(3′) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$______.

解 $\underline{\dfrac{6}{5}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\sin\dfrac{2}{x}\Big/\dfrac{2}{x}\right)\cdot 2$

$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{6}{5}.$$

§5 无穷小的比较

1. Ⅲ、89、二、(1)、(3′) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时

[ ]

(A)$f(x)$与 x 是等价无穷小量；

(B)$f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小量；

(C)$f(x)$是比 x 较高阶的无穷小量；

(D)$f(x)$是比 x 较低阶的无穷小量.

解 选(B). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}\right)$

$$=\ln 2+\ln 3 \triangleq C\neq 1,$$

所以 $f(x)$与 x 是同阶但非等价的无穷小，故选(B).

2. Ⅲ、92、二、(2)、(3′) 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量？ [ ]

(A)x^2； (B)$1-\cos x$；

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$； (D)$x-\tan x$.

解 选(D). 显见当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim x^2/2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim -x^2/2$，可见(A)、(B)、(C)都是同阶($x$ 的 2 阶)无穷小；下面剩下来验证(D). 由下章的洛必达法则易知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{2x\cos^2 x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot 1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

可见 $x-\tan x=o(x^2)$，故选(D).

*§6 函数的连续性与连续函数的运算

1. Ⅲ、87、二、(1)、(2′) 下列函数在其定义域内连续的是 [ ]

(A)$f(x)=\ln x+\sin x$； (B)$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0;\end{cases}$

(C)$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0;\end{cases}$ (D)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 选(A). A 中函数的定义域是 $x>0$,由初等函数在其定义区间上连续,显见应选(A). 又,显见(B)、(C)、(D)中函数在 $x\to0$ 时的极限均不存在,它们在点 $x=0$ 处均不连续,更谈不上在各自定义域(包含 $x=0$)上连续,应排除(B)、(C)、(D).

2. Ⅲ、98、二、(2)、(3′) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数 $f(x)$的间断点,其结论为 [ ]

(A)不存在间断点; (B)存在间断点 $x=1$;

(C)存在间断点 $x=0$; (D)存在间断点 $x=-1$.

解 选(B). 因为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x=-1,\\ 0, & |x|>1,\\ 1, & x=1,\\ 1+x, & |x|<1,\end{cases}$$

考察分段点 $x=\pm1$ 处 $f(x)$的极限或图象,显见,仅当 $x=1$ 时,$f(x)$间断,故选(B).

§7 闭区间上连续函数的性质

1. Ⅳ、92、八、(6′) 求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

证 存在性. 因为 $|q\cos x|\leqslant q<1$,即 $q\cos x$ 为有界量,记 $f(x)=x+p+q\cos x$,由

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+p+q\cos x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+p+q\cos x)=-\infty,$$

故$\exists$ $x_1<x_2$,使 $f(x_1)<0,f(x_2)>0$. 又显见 $f(x)\in C(\mathbf{R})$,在闭区间$[x_1,x_2]$上运用连续函数的介值性定理,知$\exists$ $\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f(\xi)=0$. 即方程 $f(x)=0$ 至少有一实根.

唯一性. 任意取 $x_1<x_2$，由重要不等式 $\sin u<u(u>0)$，有

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2-x_1+q(\cos x_2-\cos x_1)\\&=x_2-x_1-2q\sin\frac{x_2-x_1}{2}\sin\frac{x_2+x_1}{2}\\&>x_2-x_1-2\sin\frac{x_2-x_1}{2}>x_2-x_1-2\cdot\frac{x_2-x_1}{2}=0,\end{aligned}$$

可见 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，又 $f(x)\in C(\mathbf{R})$，它与 x 轴只可能有一个交点，即方程 $f(x)=0$ 只能有一个实根，得证.

注 学过下一章的导数后，更易知 $f'(x)=1-q\sin x>0$，可见 $f(x)$ 单调递增($x\in\mathbf{R}$).