

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

全国历年考研试题
分类全解分析预测

考研数学 试题分类精解

COLLEGE MATHEMATICS

经济类

数学三至四

黄光谷 郑 列 编
李 刚 万荣国

湖南大学出版社

面向 21 世纪高等学校数学系列辅导教材

经 济 类
数学三至四

考研数学试题分类精解

全国历年 考研试题 分类全解 分析预测

黄 光 谷 郑 列 编
李 刚 万 荣 国

湖 南 大 学 出 版 社

2001 年·长沙

内 容 提 要

本书汇集了1987~2001年全国硕士生入学统一考试经济数学三和四的全部试题,并按照2001年考研数学考试大纲数学三的考试内容和考试要求的顺序编目,重新分类编排且逐题给出了精练解答,第一篇包括微积分(上册)的极限与连续,一元函数微、积分,共三章;第二篇包括多元函数微积分,无穷级数,微分方程与差分方程等三章;第三篇是线性代数;第四篇是概率论与数理统计.对于数学四的考生,加*号的内容可暂时跳过.第五篇给出了数学三或四历年考研试题的分类统计、分析及预测;第六篇是附录,给出了当年数学三和四的试题、解答及评分标准,供读者模拟测试.

本书既适宜各财、经、管理相应于经济数学三和四各专业一、二年级大学生与相应课程教学进度同步学习和复习备考,也特别适宜高年级大学生和考研者复习、备考,还可供教师教学、拟题查阅和参考.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学试题分类精解. 经济类/黄光谷等编. —长沙:

湖南大学出版社, 2001.6

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

ISBN 7-81053-368-X

I. 考… II. 黄… III. 经济数学—研究生—入学

考试—解题 IV. F224.0-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第033627号

考研数学试题分类精解 经济类 数学三至四

Kaoyan Shuxue Shiti Fenlei Jingjie

黄光谷 朱晓平

李刚 郑列 编

□责任编辑 李立鹏 李刚 王海鹰

□总策划 龙挺

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 9 □字数 234千

□版次 2001年6月第1版 □2001年6月第1次印刷

□印数 1-5 000册

□书号 ISBN 7-81053-368-X/O·24

□定价 14.00元

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

前 言

历年全国统一研究生入学试题及解答是一个知识宝库,也是指导新课教学的指挥棒.本书汇集了(1987~2001)年全国硕士生入学统一考试经济数学三和四^①的全部试题,并按照2001年部颁考研数学考试大纲中数学三和四的考试内容和考试要求的顺序编目(这顺序与微积分、线性代数、概率统计各课程的新课教学顺序基本上是一致的),并重新分类编排分为四篇且逐题给出了精练解答.这样编排既便于考研生循序渐进地进行复习、备考,也便于新学这几门课程的低年级在校生与新课进度同步学习和复习.在第五篇给出了编者对1987~2000年数学三和四试题的统一分类、统计、分析及预测,第六篇是2001年数学三和四的试题、解答及评分标准,供读者模拟测试.

在各章、节的试题及解答中,按年号及数学三至四的顺序编排,其中的重复试题亦按此顺序优先非重复选人(即去掉了顺序在后的重复题).题号1.Ⅲ、99、一、(1)、(3')的意思依次是:某(章)节的第1题,取自数学三、1999年的第一大题的第(1)小题,(3')系指本题满分3分;其余类似.其中画_____者为填空题;留[]者为选择题;留()者为判断是非题.

许多试题是综合题,为了便于新学者学习,对综合题基本上是按逆序编排,而非按照用到的主要知识排列.例如某题既用到闭区间上连续函数的性质,又用到微分中值定理和变上限积分,则按照逆序将该题编入微积分基本定理这一节中.所以某些章节的试题较少或没有,不是该节内容不重要,而是其知识较前、它是基础,而多次出现在后面章节的综合题中.有些综合题既用到微积分,又用到线性代数和概率统计知识的,也按照逆序选列在后面的某章节

① 1987~1996年的数学二为原数学三,数学三、四为原数学四、五.

之中。

本书的题量较大,从综合分析及预测可看出大致趋势,可供读者备考参考。熟读此书,触类旁通,具有“熟读唐诗三百首,不会吟诗也会吟”的功效,使临考胸有成竹,重点明确,胜卷在握。

参加本书编写工作的,还有李美珍、黄青、李杨、蔡晓英、黄东等同志。

编写本书的初衷,与素质教育并不矛盾。因为一方面,许多考研试题,本身就体现了数学素质及综合素质方面的要求,阅读这些题解,有利于提高读者的素质;另一方面,阅读本书,可以帮助许多读者顺利地通过考试,可使读者把更多的时间和精力用到提高素质方面去。

由于我们水平有限,加上时间仓促,书中可能会有错误或缺点,恳请读者和同行批评指正,以便再版时修改。

编者

2001年2月

目 次

第一篇 微积分(上)

第一章 函数、极限、连续

§ 1 函数、预备知识	(1)
§ 2 极限的定义与性质	(2)
§ 3 极限运算法则	(3)
§ 4 极限存在准则与两个重要极限	(5)
§ 5 无穷小的比较	(5)
§ 6 函数的连续性与连续函数的运算	(6)
§ 7 闭区间上连续函数的性质	(7)

第二章 一元函数微分学

§ 1 导数概念及其经济意义	(9)
§ 2 求导法则、高阶导数	(14)
§ 3 隐函数的导数	(17)
§ 4 函数的微分	(17)
§ 5 微分中值定理	(18)
§ 6 洛必达法则	(23)
§ 7 函数的单调性与凸性的判别方法	(27)
§ 8 函数的极值与最大、最小值	(29)
§ 9 一元函数微分学在经济中的应用	(36)

第三章 一元函数积分学

§ 1 原函数与不定积分的概念与性质	(44)
§ 2 不定积分的换元积分法	(44)
§ 3 不定积分的分部积分法	(46)
§ 4 定积分的概念及性质	(49)
§ 5 微积分基本定理	(50)
§ 6 定积分的换元法与分部积分法	(56)
§ 7 定积分的应用	(59)
§ 8 反常积分	(67)

第二篇 微积分(下)

第四章 多元函数微积分学

§ 1 多元函数,偏导数	(70)
§ 2 全微分	(70)
§ 3 复合函数的求导法则	(72)
§ 4 隐函数的求导法	(75)
§ 5 多元函数的极值	(77)
§ 6 二重积分的概念、性质和计算	(82)

第五章 无穷级数

§ 1 常数项级数的概念与基本性质	(91)
§ 2 正项级数及其审敛法	(94)
§ 3 绝对收敛与条件收敛	(95)
§ 4 幂级数	(96)
§ 5 泰勒级数	(97)
§ 6 函数的幂级数展开式的应用	(99)

*第六章 常微分方程与差分方程

§ 1 可分离变量的微分方程	(100)
§ 2 一阶线性微分方程	(101)
§ 3 可用变量替换法求解的一阶微分方程	(103)
§ 4 二阶常系数线性微分方程	(105)
§ 5 差分方程	(106)

第三篇 线性代数

第一章 行列式

§ 1 行列式的基本概念和性质	(108)
§ 2 行列式按行(列)展开	(110)

第二章 矩阵

§ 1 矩阵概念	(112)
§ 2 矩阵的运算	(112)
§ 3 逆矩阵	(117)
§ 4 矩阵分块法	(124)

第三章 向量

§ 1 向量组的线性相关性	(127)
§ 2 矩阵与向量组的秩	(136)

第四章 线性方程组

§ 1 克莱姆法则	(140)
§ 2 线性方程组的解	(141)
§ 3 线性方程组的解的结构	(147)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

§ 1 矩阵的特征值和特征向量	(157)
§ 2 相似矩阵	(165)

*第六章 二次型

§ 1 二次型及其标准形	(172)
§ 2 正定二次型	(175)

*第四篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

§ 1 样本空间、随机事件	(179)
§ 2 频率与概率	(180)
§ 3 等可能概型(古典概型)	(182)
§ 4 条件概率	(183)
§ 5 独立性	(188)

第二章 随机变量及其概率分布

§ 1 离散型随机变量的概率分布	(191)
§ 2 随机变量的分布函数	(195)
§ 3 连续型随机变量的概率密度	(196)
§ 4 随机变量的函数的分布	(201)

第三章 二维随机变量及其概率分布

§ 1 二维随机变量	(205)
§ 2 边缘分布, 条件分布	(207)
§ 3 相互独立的随机变量	(208)
§ 4 两个随机变量的函数的分布	(209)

第四章 随机变量的数字特征

§ 1 数学期望	(212)
----------------	-------

§ 2	方差	(220)
§ 3	几种重要随机变量的数学期望和方差	(225)
§ 4	协方差及相关系数	(226)
第五章 大数定律和中心极限定理		
§ 1	大数定律	(232)
§ 2	中心极限定理	(232)
*第六章 数理统计的基本概念		
§ 1	抽样分布	(235)
*第七章 参数估计		
§ 1	点估计	(238)
§ 2	估计量的评选标准	(238)
§ 3	区间估计	(239)
§ 4	单个正态总体均值与方差的区间估计	(240)
*第八章 假设检验		
§ 1	正态总体均值的假设检验	(242)
第五篇 历年考研全国统一数学试题的统计、分析及预测		
一、历年考研统一数学试题情况统计		(243)
二、历年考研统一数学试题情况分析和展望		(251)
三、命题情况和今后几年考研数学试题的预测		(255)
第六篇 附录 2001 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学(三)至(四)试题、参考解答及评分标准		
(一)、数学(三)试题、参考解答及评分标准		(261)
(二)、数学(四)试题、参考解答及评分标准		(272)

第一篇 微积分(上)

第一章 函数、极限、连续

§1 函数、预备知识

1. III、90、二、(1)、(3') 设函数 $f(x) = x \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是 []

- (A) 偶函数; (B) 无界函数;
(C) 周期函数; (D) 单调函数.

解 选(B). 显见 $x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}$ 时, $\tan x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$ 是无界函数, 故选(B).

又 $x \rightarrow 3\pi^-/2$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 结合上述知 $f(x)$ 不是单调函数, 排除(D);

显见 $f(-x) = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$, 可排除(A);

$f(x)$ 中的因子 x 不是周期函数, $f(x)$ 也不是周期函数, 可排除(C), 故应选(B).

2. IV、92、一、(3)、(3') 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\arcsin(1-x^2)$; $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. 由题设,

$$f[\varphi(x)] = \sin[\varphi(x)] = 1 - x^2 \Rightarrow \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2);$$

再由 $|1 - x^2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$,

故 $\varphi(x)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

§ 2 极限的定义和性质

1. III、87、一、(1)、(2') $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \infty$ (判断是非题). ()

解 (非) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 1 / \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/|x|} = 0$;

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty \neq 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$ 不存在, 也不是无穷大(量).

2. III、00、二、(1)、(3') 设对 $\forall x$, 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ []

(A) 存在且等于零;

(B) 存在但不一定为零;

(C) 一定不存在;

(D) 不一定存在.

解 选(D). 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$ 时, 由夹逼准则知, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 由此还可否定(C). 或者举例说明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 可能不存在, 例如, 由重要不等式, 得

$$|\sin t| \leq |t| \leq |\tan t| \left(|t| < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \leq \left| \tan \frac{1}{x} \right| \quad (|x| > \frac{2}{\pi}),$$

$$\text{取 } \varphi(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|, \quad g(x) = \left| \tan \frac{1}{x} \right|, \quad f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|,$$

$$\text{显见 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0.$$

由此还可否定(B). 但符合题设条件的 $f(x)$, 还有可能使 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在, 由此还可否定(A)、(B).

例如, 不妨设 $x > 0$, 有 $x - \frac{1}{x} < x < x + \frac{1}{x}$, 取 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}$,

$f(x)=x$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$, 显见 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (不存在). 故选 (D).

§ 3 极限运算法则

1. III、88、一、(1)、(2') 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在. ()

答 (非). 反例如下: 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos \frac{1}{x}$, 虽然

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0 \text{ (无穷小乘有界量)}$$

都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

2. III、90、一、(1)、(3') 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$
= _____.

解 2. 先乘共轭因式有理化, 再求极限:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3} \sqrt{n} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} \sqrt{n} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3. III、94、二、(1)、(3') 曲线 $y=e^{1/x^2} \arctan \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 []

(A) 1 条; (B) 2 条; (C) 3 条; (D) 4 条.

解 选(B). 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$; 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{令 } t=1/x}{e^2 \arctan \frac{1+t-t^2}{1-t-2t^2}} = \frac{\pi}{4},$$

所以 $y=\pi/4$ 与 $x=0$ (y 轴) 是由此曲线的水平与铅直渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \frac{\pi}{2}e, \quad \lim_{x \rightarrow 2} y = \frac{\pi}{2}e^{1/4},$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot 0 = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \frac{\pi}{4},$$

可见 $x=-1$ 与 $x=2$ 不是 y 的铅直渐近线, 除了 $y=\pi/4$ (水平渐近线) 以外, y 别无斜渐近线, 故 y 仅有 $y=\pi/4$ 与 $x=0$ 两条渐近线, 故选(B).

4. IV、91、二、(2)、(3') 设数列的通项为

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ 1/n, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

(A) 无穷大量; (B) 无穷小量;

(C) 有界变量; (D) 无界变量.

解 选(D). 显见 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = +\infty$, 所以 $\{x_n\}$ 既非无穷大, 亦非无穷小, 也非有界量, 排除(A)、(B)、(C); 是无界量, 应选(D).

5. IV、93、一、(1)、(3')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $\sqrt{2}/2$. 【对这类无理式, 像前面第2题一样, 常采用乘以共轭因式有理化的办法去掉“未定性(式)”, 再求极限.】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+n)n} + \sqrt{\frac{1}{2}(1+n-1)(n-1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

6. IV、99、一、(1)、(3') 设函数 $f(x)=a^x (a>0, a\neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\ln a/2$. 由指数与对数函数的性质,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(a^1 \cdot a^2 \cdots a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+\cdots+n) \ln a \\ &= \ln a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \frac{\ln a}{2}.\end{aligned}$$

§ 4 极限存在准则与两个重要极限

1. III、87、五、(4') 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+xe^x)^{1/x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{e^x} = e^1 = e$.

2. III、89、三、(1)、(5') 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{x/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{x/2}$
 $\stackrel{t=1/x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} [(1 + \sin 2t)^{\frac{1}{\sin 2t}}]^{\frac{\sin 2t}{2t}} = e^1 = e$.

3. III、93、一、(1)、(3') $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\frac{6}{5}$. 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+5}{5x^2+3x} \sin \frac{2}{x} / \frac{2}{x} \right) \cdot 2$
 $= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{6}{5}$.

§ 5 无穷小的比较

1. III、89、二、(1)、(3') 设 $f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

[]

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量;
 (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量;
 (C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量;
 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

解 选(B). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \right)$
 $= \ln 2 + \ln 3 \triangleq C \neq 1,$

所以 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价的无穷小, 故选(B).

2. Ⅲ、92、二、(2)、(3') 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个 是比其它三个更高阶的无穷小量? []

- (A) x^2 ; (B) $1 - \cos x$;
 (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$; (D) $x - \tan x$.

解 选(D). 显见当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -x^2/2$, 可见(A)、(B)、(C)都是同阶(x 的 2 阶)无穷小; 下面剩下 来验证(D). 由下章的洛必达法则易知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x \cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot 1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \end{aligned}$$

可见 $x - \tan x = o(x^2)$, 故选(D).

* § 6 函数的连续性与连续函数的运算

1. Ⅲ、87、二、(1)、(2') 下列函数在其定义域内连续的是 []

- (A) $f(x) = \ln x + \sin x$; (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ \cos x, & x > 0; \end{cases}$
 (C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0; \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 选(A). A 中函数的定义域是 $x > 0$, 由初等函数在其定义区间上连续, 显见应选(A). 又, 显见(B)、(C)、(D)中函数在 $x \rightarrow 0$ 时的极限均不存在, 它们在点 $x=0$ 处均不连续, 更谈不上在各自定义域(包含 $x=0$)上连续, 应排除(B)、(C)、(D).

2. Ⅲ、98、二、(2)、(3') 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为 []

- (A) 不存在间断点; (B) 存在间断点 $x=1$;
(C) 存在间断点 $x=0$; (D) 存在间断点 $x=-1$.

解 选(B). 因为

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x = -1, \\ 0, & |x| > 1, \\ 1, & x = 1, \\ 1+x, & |x| < 1, \end{cases}$$

考察分段点 $x = \pm 1$ 处 $f(x)$ 的极限或图象, 显见, 仅当 $x=1$ 时, $f(x)$ 间断, 故选(B).

§ 7 闭区间上连续函数的性质

1. Ⅳ、92、八、(6') 求证: 方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中 p, q 为常数, 且 $0 < q < 1$.

证 存在性. 因为 $|q \cos x| \leq q < 1$, 即 $q \cos x$ 为有界量, 记 $f(x) = x + p + q \cos x$, 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + p + q \cos x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \end{aligned}$$

故 $\exists x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$. 又显见 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上运用连续函数的介值性定理, 知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(\xi) = 0$. 即方程 $f(x) = 0$ 至少有一实根.

唯一性. 任意取 $x_1 < x_2$, 由重要不等式 $\sin u < u (u > 0)$, 有

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2 - x_1 + q(\cos x_2 - \cos x_1) \\ &= x_2 - x_1 - 2q \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \\ &> x_2 - x_1 - 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > x_2 - x_1 - 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} = 0, \end{aligned}$$

可见 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 又 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 它与 x 轴只可能有一个交点, 即方程 $f(x) = 0$ 只能有一个实根, 得证.

注 学过下一章的导数后, 更易知 $f'(x) = 1 - q \sin x > 0$, 可见 $f(x)$ 单调递增 ($x \in \mathbb{R}$).