高等学校教学用書

數學分析簡明教程

下册

А. Я. 辛 欽著

高等教育出版社

高等学校教学用書

數學分析簡明教程

下册

A. Я. 辛欽 著
北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室 譯
許寶騄 校

高等教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的阿·雅·辛欽(А. Я. Хинчин)所著“数学分析簡明教程”(Краткий курс математического анализа)1953年第一版譯出，并根据原著1955年第二版修訂的。原書經苏联文化部高等教育总署审定为綜合大学与师范学院力学数学系与物理数学系数学分析課程的教科書。

本書中譯本分上下兩册出版。此为下册，內容包括無窮級数，微分学的进一步發展与积分学的进一步發展等三篇，及結束語历史簡述。另附中文索引。

本書由北京大学数学力学系数学分析与函数論教研室集体翻譯。并經許宝騄教授校訂。

数学分析簡明教程

А. Я. 辛欽著

北京大学数学力学系数学分析与函数論教研室譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 · 新华書店發行

統一書号13010·134 開本850×1168 1/32 印張12 5/16 字數309,000 印數78001—83000

1954年12月第1版 1959年11月北京第13次印刷 定價(6)¥1.40

下册目錄

第四篇　無窮級數

第五篇 微分學的進一步發展

第六篇　積分學的進一步發展

第四篇　無窮級數

第十八章　無窮的數值級數

§ 67. 基本概念

在每一個精確自然科學的領域中，除了用一些篇幅來闡明該領域中最重要的概念與規律之外，同時還要有一些章節來從事研究和建立某些專門工具，這樣我們才能够很好地掌握我們的研究對象。這些用來研究和建立專門工具的章節在理論上的意義不如它在技術上的意義那麼大。但是，儘管如此，它們在方法論上的重要性有時却是這樣大，以致於如果我們不對這些專門工具作系統的說明，就不可能建立任何完整的理論。例如，在熱學中，除了那些闡明熱學的基本原則理論的章節之外，還必須有講解溫度計的章節，換句話說，還必須有說明測量溫度的方法與工具的章節。

無窮級數的理論，就它跟數學分析的基本概念與規律的關係來說，就正是居於這樣一種輔助性的技術工具的地位；不過，儘管如此，由於它在數學分析本身以及立脚在數學分析之上的大量實用科學中的許許多多不同的應用，使得這個理論在現代數學方法的武庫中佔據着一個最重要的位置。所以，任何一本數學分析教程都不能不系統地說明關於無窮級數的理論。

無窮級數的基本概念是比較初等的，本來很早就可以講了，比方說，在講完極限和實數理論之後，就已經可以講了。我們之所以延遲到

現在才講，有兩個原因：首先是因為有必要讓讀者儘可能地早一些知道本書的基礎概念——微分與積分；其次，因為它對於進一步研究微分學與積分學是必不可少的，只有放在這裏講了以後，讀者才能够完全領會我們接下去就要講的幾章關於微分與積分理論的進一步更深刻的發展。

無窮級數的概念是很簡單的，大家在中學教科書裏已經知道得很清楚：已知一個遞減的幾何序列：

$$a, ar, ar^2, \cdots, ar^n, \cdots, \tag{1}$$

（其中 $0<|r|<1$, a 是任意實數）應該如何來求它的各項之和；這樣一種求和本身就正好完全表達出無窮級數概念。把序列（1）的前 n 項之和記作 s_n，則

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1} ar^k=\frac{a-ar^n}{1-r},$$

當 $n\to\infty$ 時，s_n 有一個極限：

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a}{1-r},$$

這個極限稱為幾何序列(1)的"一切"項之和，記作：

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k=\frac{a}{1-r}.$$

因此，在幾何序列的情形下，一系列無窮個數值有所謂它的"一切"項之"和"，這個和是這樣做成的：先求得這一系列數值的前 n 項之和 s_n（很明顯，s_n 是 n 的函數），然後再研究當 $n\to\infty$ 時 s_n 的動態。如果 s_n 趨向於一個確定的極限 s，我們就很自然地把 s 算作是這個系列的一切項之和。

然而，遞減的幾何序列遠非唯一的一個上面所說的這種類型的系列，比如說，系列

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \cdots \tag{2}$$

就也同樣地具有所說的性質，事實上，因為

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

所以，對系列(2)來說，我們有：

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} s_n=1.$$

根據同樣的理由，既然我們已經認為 $\frac{a}{1-r}$ 是幾何序列(1)的“一切”項的和，那麼現在我們當然可以說系列(2)的“一切”項的和就等於 1，因而可以寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

另一方面，也很清楚，絕不是任何一系列無窮個數値都可以用以上所說的辦法來求和。例如，對系列

$$1,1,1,\cdots,1,\cdots$$

來說，我們就有 $s_n=n$；當 $n\to\infty$ 時，和數 s_n 無限增大，因而 s_n 就不可能有極限。其實，就算 s_n 保持有界，同樣的情形也還可以發生。例如，對系列

$$1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$$

來說，當 n 是偶數時，s_n 等於 0。而當 n 是奇數時，s_n 却等於 1；於是當 $n\to\infty$ 時，和數 s_n 雖然保持有界，但是却很明顯地不趨向於任何極限。

現在，我們可以轉到一般的定義了。假定我們有一系列無窮個實數

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots; \tag{3}$$

令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

s_n 稱爲系列(3)的部分和。假定

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

存在，則我們說系列(3)是收斂的，而 s 是它的和；假定當 $n\to\infty$ 時，部分和 s_n 不趨向於任何極限，則我們說系列(3)是發散的，並且我們算它沒有和。

雖然把收斂級數(即收斂系列——譯者按，在原文中“系列”“級數”兩個詞是同一個字 ряд，本來沒有區別，如果直譯應一律譯成“系列”，但遵從習慣仍改稱級數。但在這兒以前仍只能譯作“系列”，才符合作者的文意。）的和了解成爲它的一切項的和是很自然的事情，但是大家還是要相當小心：決不要忘記，求無窮級數(即無窮系列)的和，精確地說來，跟求有限和並不一樣；在無窮級數的求和的過程中，參與了一個新的運算，即極限的運算。因此，決不能沒有經過專門的考慮研究，就把有限和所具有的性質硬搬到無窮級數的和上來；事實上，我們在下面就會看到，這種搬移絕不是在一切情況下都可能的。

如果級數(3)收斂，而且它的和等於 s，則我們寫：

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果當 $n\to\infty$ 時，$s_n \to +\infty$，則有時也寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty;$$

不過，在這種情形，我們從一般定義知道，這個級數是發散的，因而它並沒有和。

有時，我們就用 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 或者 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 來代表級數(系列)(3)本身，不管它收斂還是不收斂。例如，我們可以說級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ 收斂；級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ 發散（參考上面的例子）等等。

當級數(3)收斂時，它的和與部分和之差 $r_n=s-s_n$ 稱為它的餘項；從收斂性的定義本身就立刻知道：

$$r_n\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

換句話說，當 $n\to\infty$ 時，收斂級數的餘項是一個無窮小量(當然，發散級數沒有餘項，因為它沒有和)。因為

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots,$$

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

所以我們很自然地希望會有：

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+\cdots+u_{n+k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}=\sum_{l=n+1}^{\infty}u_l$$

這個等式在有限和的情形顯然是對的，但是我們沒有理由不經過任何證明就認為它在無窮級數的情形也準對。不過證明起來倒是很簡單的，下面便是證明：令

$$\sum_{k=1}^{r}u_{n+k}=\sigma_r \qquad (r=1,2,\cdots);$$

很明顯，$\sigma_r=s_{n+r}-s_n$；因為當 $r\to\infty$，同時 n 保持不動時，$s_{n+r}\to s$；所以當 $r\to\infty$ 時，σ_r 的極限存在並且等於 $s-s_n=r_n$；但是根據 σ_r 的定

義，這個極限就是級數 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ 的和；因此，這個級數收斂，並且它的和就是 r_n，這樣就證明了我們要證明的東西了。總之，在級數(3)收斂的時候對於任何 $n\geqslant 1$，我們都有

$$s=s_n+r_n,$$

其中

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}+\cdots.$$

根據級數(3)收斂的定義，收斂就等於要求部分和的序列

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \tag{4}$$

趨向於一個極限 s（這個 s 就稱爲級數的和）。因此，關於任何級數(3)的收斂性以及它的和的問題，都可以整個歸結到序列(4)的極限存在與它的極限值的問題。因而無窮級數理論的任何一個問題都可以用序列以及它的極限的術語來敍述。另一方面，也不難看出，級數理論與序列理論的這種聯系實際上是相互的關係。假定已經給出一個任意的實數序列(4)，令

$$u_1=s_1,\quad u_n=s_n-s_{n-1}\quad (n>1);$$

就很明顯地有：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=s_n\quad (n=1, 2, \cdots),$$

於是，關於序列(4)的極限存在以及它的極限値的問題，就可以完全歸結到級數(3)的收斂性以及它的和的問題。

序列與無窮級數之間的這種基本聯系使得我們往往在證明了這兩個範圍中的一個的某個命題之後，就可以不用再加任何新的證明，立刻把這個命題搬到另一個範圍中去。在§19（定理2）中，我們曾經證明了序列(4)極限存在的必要充分條件如下：序列(4)的極限存在的必要充分條件是：不管 $\varepsilon>0$ 怎樣小，對於充分大的 n 與任意的 $p>0$，我們都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$。但是如果數 s_n 就是級數(3)的部分和，則一方面

$$s_{n+p}-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}.$$

而另一方面，序列(4)的極限存在就等于説級数(3)收斂。所以我們已經得到了下列一般的級数收斂的必要充分条件:

定理 1. 級数(3)收斂的必要充分条件是:不管 $\varepsilon>0$ 怎样小,对于充分大的 n 与任意的 $p>0$, 我們都有:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

这个条件可以形式地說成是:級数的充分远的"片段"(長短不拘也即不管它所包含級数的項的数目)的絕对值可以任意地小,特别当 $p=1$ 时,对于每一个收斂級数(3), 只要 n 充分大,就可以有 $|u_n|<\varepsilon$; 换句話說,我們有下面的

推論. 如果級数(3)收斂,則当 $n\to\infty$ 时, $u_n\to 0$.

到现在为止，我們已經看到过的那些發散級数的例子中，都是当 $n\to\infty$ 时, u_n 不趋向于零的。因此,我們不免發生这样的疑問: 剛才所說的級数收斂的必要条件 $u_n\to 0$ (当 $n\to\infty$), 是否同时也是級数收斂的一个充分条件?不难知道,答案应該是否定的。事实上,假定級数(3)是这样構成的: $u_1=1$, u_2, u_3 都等于$\frac{1}{2}$, 再随后三項即 u_4, u_5, u_6 每項都等于$\frac{1}{3}$,这样下去以至無穷。于是很明显,一方面,当 $n\to\infty$ 时的确 $u_n\to 0$; 另一方面，从等于$\frac{1}{k}$的那一項开始的以后 k 項所構成的級数"片段"的和永远等于 1。但是因为 k 可以任意大,所以这个級数到达無論多么远都会有总和等于 1 的"片段"。因此这个級数不能滿足定理 1 的条件，所以它是發散的。

这类級数的一个典型例子是調和級数——这是一个很富有啓發性的在許多方面都很重要的級数:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{5}$$

它滿足条件 $u_n\to 0(n\to\infty)$, 但是級数"片段"

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}$$

包含了 $2^{k+1}-2^k=2^k$ 項，其中每一項都不小於它的最後一項 $\frac{1}{2^{k+1}}$；所以這個"片段"的值大於

$$2^k\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2};$$

但是因爲這種"片段"可以在無論多遠的地方找到（k 可以任意大），所以定理 1 的條件也不能滿足，因而級數(5)發散。

無窮級數的概念，正如一切帶有高度一般性的概念一樣，它的充分發展，要求我們的討論更加具體化；只有當我們轉向於研究各種按具體特徵進行分類的級數時，才可能了解其全部內容。在本節中，我們只研究無窮級數的一般概念，其餘的我們不打算多談。

假定我們給定了兩個級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots;$$

於是級數

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots \tag{6}$$

可以看作是這兩個給定的級數"逐項"相加（換句話說，第一個級數的每一項與第二個級數的具有相同號碼的項相加）的結果。假定兩個給定的級數都收斂，我們把它們的和分別記作 s 與 σ，它們的部分和記作 s_n 與 σ_n，於是

$$s_n\to s,\quad \sigma_n\to\sigma\quad (n\to\infty).$$

於是很明顯，級數(6)的前 n 項之和等於 $s_n+\sigma_n$，並且當 $n\to\infty$ 時，$s_n+\sigma_n\to s+\sigma$。所以，兩個收斂級數逐項相加永遠再給出一個收斂級數，並且這個新級數的和就等於原來兩個級數的和相加。很明顯，這個法則在兩個收斂級數逐項相減的情形也一樣成立（用同樣的方法證明）。

最後，如果我們用任意有限個收斂級數來代替上述的兩個收斂級

數，並逐項按任何組合法(當然對於一切項這個組合法要一樣)來組成它們的代數和，我們以上的論證在本質上不須要什麼改變就可以知道：這樣構成的級數還是永遠收斂，並且它的和就是這些已知級數的和的同一種代數和。因此，我們已經得到了下列命題：

定理 2. 假定級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{2,k},\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{m,k}$$

都收斂，又它們的和分別等於 $s_1, s_2, \cdots, s_m$。於是，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{1,k} \pm u_{2,k} \pm \cdots \pm u_{m,k})$$

(其中對於一切項都取同一組組合符號，換句話說，在每一個"±"號中都取定一個"+"號或"−"號)也收斂，並且它的和就等於

$$s_1 \pm s_2 \pm \cdots \pm s_m.$$

這個定理有一個重要推論，它說明一個簡單事實：改變一個收斂級數的任何有限項的數值，不會破壞該級數的收斂性(雖然，一般說來，它的和也改變了)。換句話說，我們有下面的

推論. 假定在級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \tag{7}$$

與

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v_{n+1} + \cdots \tag{8}$$

中，對於某一個 $n \geqslant 0$，我們有：

$$u_{n+1} = v_{n+1},\ u_{n+2} = v_{n+2},\ \cdots,\ u_{n+k} = v_{n+k},\ \cdots,$$

又假定這兩個級數中有一個收斂，則另一個一定也收斂。

為了證明這個推理，我們只消指出以下這一點就够了：比方說，級數(8)可以由級數(7)與級數

$$(v_1-u_1)+(v_2-u_2)+\cdots+(v_n-u_n)+0+0+\cdots$$

(這個級數顯然收斂)逐項相加來得到。

當然,從這個推論還立刻可以知道,只要級數(7)與級數(8)中有一個發散,則另一個也一定發散。

數値級數的另外一個一般性質是:

定理 3. 如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂,並且有和 s, 又如果 a 是一個任意常數;則級數

$$au_1+au_2+\cdots+au_n+\cdots$$

也收斂,並且它的和就等於 as。

爲了證明這個定理,只要指出下面這一點就够了: 如果用 s_n 與 σ_n 分別表示這兩個級數的前 n 項之和;則對於任意的 n, 都有 $\sigma_n=as_n$。

§ 67 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集, 第五章, 習題 1—3, 5, 11—12, 14—15, 21, 23, 24。

§ 68. 同號級數

我們前面已經指出過,爲了完全地揭露無窮級數概念的內容,我們現在應該集中注意於若干類具有某些特殊性質的級數, 這些特殊性質使得這些類級數成爲最重要的同時也是最便於研究的級數。無窮級數理論的歷史發展告訴我們,這些類級數中的重要的一類,是那些一切項的符號都相同的級數。因而,我們首先應該來着手研究這種"同號的"級數。爲了確定起見,我們永遠假定級數的每一項都是正的(說得更正確一些,每一項都是非負的,因爲在一般情形下, 允許有等於零的項存在是有好處的)。很明顯,根據對稱性負項級數 (更正確地說,非正項級數)應該具有完全類似於正項級數的那些性質。

如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$