

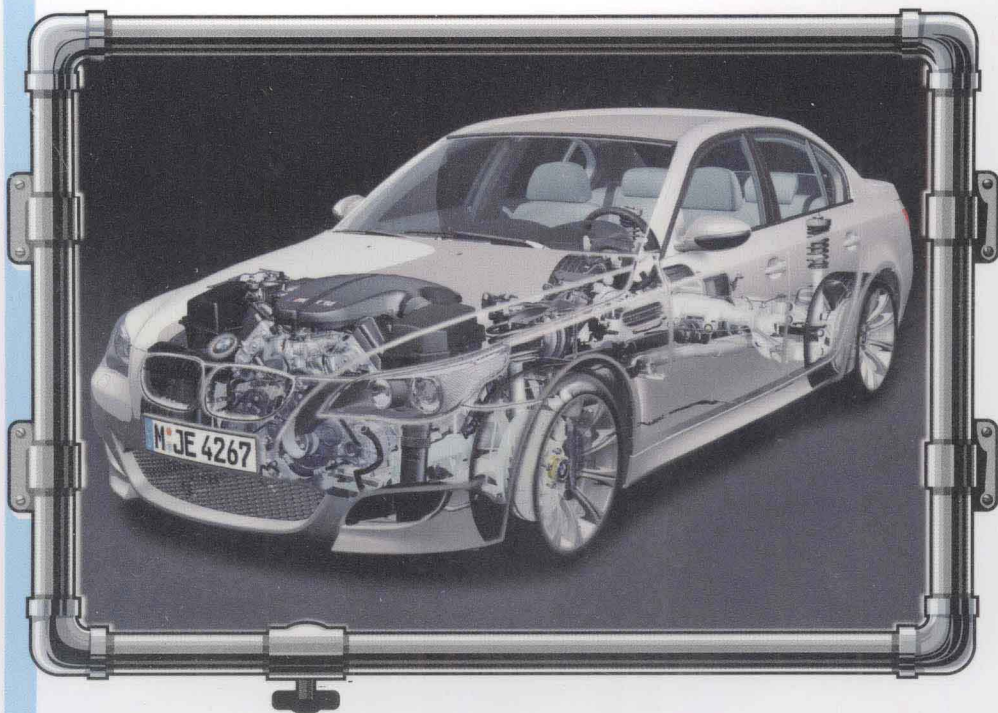


21世纪全国高等院校汽车类**创新型**应用人才培养规划教材

汽车振动学基础及其应用

潘公宇 主编

- ✔ 系统介绍汽车振动的基本理论
- ✔ 详细阐述汽车振动系统的特性
- ✔ 总结分析汽车振动的控制方法



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

汽车振动学基础及其应用

主 编 潘公宇
副主编 任萍丽



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了汽车振动理论的相关基础知识,汽车各典型振动系统的特性及控制方法。主要包括:振动学的基本概念,单自由度系统的振动,二自由度系统的振动,多自由度系统的振动,随机振动的基本理论,汽车发动机的激励与振动,路面的输入特性和模型,汽车的车身单自由度振动,车身车轮的二自由度振动,整车系统的四自由度和七自由度振动,汽车的减振技术,半主动控制技术和主动控制技术以及 MATLAB 和 ADAMS 软件在汽车振动分析中的应用。

本书可作为高等院校车辆工程专业的本科生、研究生学习汽车振动学的教材,也可作为从事车辆专业的技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

汽车振动学基础及其应用/潘公宇主编. —北京:北京大学出版社, 2013. 6

(21 世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978 - 7 - 301 - 22583 - 7

I. ①汽… II. ①潘… III. ①汽车—振动理论—高等学校—教材 IV. ①U467. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 116875 号

书 名: 汽车振动学基础及其应用

著作责任者: 潘公宇 主编

策划编辑: 童君鑫

责任编辑: 黄红珍

标准书号: ISBN 978 - 7 - 301 - 22583 - 7/TH · 0350

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电子信箱: pup_6@163.com

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 13.25 印张 306 千字

2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 29.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010 - 62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

随着汽车工业的快速发展,汽车已逐步进入人们的家庭生活,成为人们社会生活中不可缺少的一部分。作为重要的交通工具,人们对汽车的乘坐舒适性提出了更高的要求。但汽车的高速化和自身质量的减轻使得振动问题日益突出。本书从振动学的观点研究汽车行驶过程中所出现的各种振动现象,讨论汽车振动的振源,各振动系统的特性,以及用于汽车振动控制的方法和效果。

本书系统介绍了汽车振动的基础理论,汽车各振动系统的特性。全书共分12章。第1章介绍了振动学的基本概念,包括振动系统的基本要素,振动的研究方法,振动系统的分类和表示方法。第2章介绍了单自由度系统的振动,包括单自由度系统的自由振动、强迫振动以及汽车车身单自由度系统的振动。第3章介绍了二自由度系统的振动,包括二自由度系统的自由振动、强迫振动以及汽车车身车轮的二自由度系统的振动,二轴汽车的振动。第4章介绍了多自由度系统的振动,包括多自由度系统对初始条件的响应及对一般激励的响应,汽车的四自由度及七自由度振动系统模型,传动系统的扭转振动模型。第5章介绍了随机振动的基本理论,包括随机振动系统的统计分析,随机振动系统的随机响应计算。第6章介绍了汽车发动机的振动,包括发动机的干扰力,发动机的隔振分析和发动机悬置系统。第7章介绍了路面的输入特性和模型。第8~10章分别介绍了汽车的减振技术、半主动控制技术和主动控制技术,第11、12章分别介绍了MATLAB和ADAMS在汽车振动分析中的应用。

本书涵盖了汽车振动理论的相关基础知识,汽车各典型振动系统的特性及控制方法。为高等院校汽车专业师生及从事汽车专业的技术人员提供了一本较全面系统介绍有关汽车振动理论与应用的参考书。

本书由江苏大学汽车与交通工程学院潘公宇教授任主编,常州机电职业技术学院任萍丽讲师任副主编。在编写过程中参考了国内外学者公开出版的相关教材、专著及相关研究论文,在此向这些资料的著作者们表示衷心的感谢。

编写过程中,得到了江苏大学汽车与交通工程学院的研究生黄宇、范方强、严友等的热情帮助,在此表示感谢。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2013年2月

目 录

第 1 章 振动的基本概念	1	5.2 随机振动的统计特性	62
1.1 引言	2	5.3 线性振动系统的随机响应	
1.2 振动系统的基本要素	3	计算	67
1.3 振动的研究方法	4	5.4 随机振动在汽车振动分析中的	
1.4 振动的分类和表示方法	6	应用	71
复习题	11	复习题	73
第 2 章 单自由度系统的振动	12	第 6 章 汽车发动机的振动分析	74
2.1 单自由度系统的自由振动	13	6.1 发动机振动的干扰力和力矩	75
2.2 单自由度系统的强迫振动	17	6.2 发动机振动的隔振分析	81
2.3 非简谐激励下的强迫振动	23	6.3 发动机悬置系统及其优化设计	84
2.4 汽车车身单自由度系统的振动	28	复习题	96
复习题	30	第 7 章 人体对振动的反应和	
第 3 章 二自由度系统的振动	31	路面输入	97
3.1 二自由度系统的运动微分方程	32	7.1 人体对振动的反应	98
3.2 无阻尼二自由度系统的振动	32	7.2 路面不平度的统计特性	102
3.3 有阻尼二自由度振动系统	35	7.3 路面输入模型	105
3.4 汽车的二自由度系统的振动	36	复习题	108
复习题	42	第 8 章 汽车的减振技术	109
第 4 章 多自由度系统的振动	43	8.1 减振技术的概述	110
4.1 多自由度振动系统的运动微分		8.2 动力传动系统的减振措施	111
方程	44	8.3 悬架系统的减振器	113
4.2 固有振型的正交性、模态坐标和		8.4 动力减振器	116
正则坐标	46	复习题	123
4.3 多自由度系统的响应	49	第 9 章 汽车振动的半主动控制	
4.4 拉格朗日方程在振动分析中的		技术	124
应用	50	9.1 半主动控制技术概述	126
4.5 汽车多自由度振动模型	52	9.2 半主动的控制策略	128
复习题	58	9.3 阻尼可调式阻尼器	130
第 5 章 随机振动理论	60	9.4 半主动悬架的性能	141
5.1 随机振动概述	61	复习题	145



第 10 章 汽车振动的主动控制技术	146
10.1 主动控制技术概论	148
10.2 主动控制理论	151
10.3 主动悬架的控制算法	156
10.4 主动悬架系统的性能	158
复习题	163
第 11 章 MATLAB 软件在汽车振动分析中的应用	164
11.1 MATLAB 软件及其特点	164
11.2 MATLAB 语言程序设计	169
11.3 MATLAB 在汽车振动分析中的应用实例	179
复习题	185
第 12 章 ADAMS 软件在汽车振动分析中的应用	186
12.1 ADAMS 软件简介	186
12.2 汽车整车模型的建立	188
12.3 具有半主动悬架的整车模型的建立	192
12.4 整车模型的联合仿真	194
复习题	201
参考文献	203

第 1 章

振动的基本概念



本章教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识
振动系统的基本要素	理解质量、弹性、阻尼的基本概念；掌握振动系统中的惯性力、弹性力、阻尼力的产生机理	振动系统中各要素的国际单位。扭转振动系统中的广义力矩、转动惯量、角位移、角速度、角加速度等
振动的研究方法	掌握振动系统理论分析和实验研究的基本步骤，包括建立模型、模型求解及结论分析等	振动系统的简化，汽车的车身单质量系统，车身车轮二自由度系统，汽车整车系统的简化
振动的分类和表示方法	了解振动系统的分类方法；掌握一般振动及简谐振动的表示方法	简谐振动的矢量表示及复数表示



导入案例

振动的危害及预防

振动对人体的影响分为全身振动和局部振动。全身振动是由振动源(振动机械、车辆、活动的工作平台)通过身体的支持部分(足部和臀部)，将振动沿下肢或躯干传布全身引起，以间接振动为主。局部振动主要以手接触振动为主，振动通过振动工具、振动机械或振动工件传向操作者的手和臂等。

人体是一个极复杂的系统，振动的作用不仅可以引起机械效应，更重要的是可以引起生理和心理的效应。人体接受振动后，振动波在组织内传播，由于各组织的结构不同，传导的程度也不同，其大小顺序依次为骨、结缔组织、软骨、肌肉、腺组织和脑组织，40Hz 以上的振动波易为组织吸收，不易向远处传播；而低频振动波在人体内传播得较远。



人体是一个弹性体,各器官都有它固有的频率,当外来振动的频率与人体某器官的固有频率一致时,会引起共振,因而对那个器官的影响也最大。全身振动的共振频率为3~14Hz,在该种条件下全身振动作用最强。

接触强烈的全身振动可能导致内脏器官的损伤或位移,周围神经和血管功能的改变,可造成各种类型的、组织的、生物化学的改变,导致组织营养不良,如足部疼痛、下肢疲劳、足背脉搏动减弱、皮肤温度降低;一般人可发生性机能下降、气体代谢增加。振动加速度还可使人出现前庭功能障碍,导致内耳调节平衡功能失调,出现脸色苍白、恶心、呕吐、出冷汗、头疼头晕、呼吸浅表、心率和血压降低等症状。晕车晕船即属全身振动性疾病。全身振动还可造成腰椎损伤等运动系统影响。

振动的频率、振幅和加速度是振动作用于人体的主要因素,气温(寒冷是促使振动致病的重要外界条件之一)、噪声、接触时间、体位和姿势、个体差异、被加工部件的硬度、冲击力及紧张等因素也很重要。

资料来源:韩文书.振动的危害及预防.劳动保护,2000(3):38.

1.1 引言

振动是指系统中运动量位移、速度、加速度等的振荡现象。说得更具体一些,振动是相对已知的参考系,系统中的一个随时间变化的运动量与其平均量相比,时大时小交替变化的现象。振动存在于自然界的各个方面。例如,汽车、火车、轮船等交通工具在行驶过程中由路面不平引起的振动和产生的振动;锻压机械工作时产生的振动;建筑物受风作用产生的振动;地球内部压力变化产生的振动(地震)等。在许多情况下,振动是有害的。它影响机械设备的工作性能和寿命,产生有损于建筑物的动载荷和不利于工作的噪声,影响交通工具的乘坐舒适性。对于精密加工机械(微电子行业)来说,很小的微振动都会影响产品的质量和性能。因此,对于大多数振动来说,应该将其振动量控制在允许的范围內。

汽车本身作为一个复杂的振动系统,内部各部分具有不同的固有频率。其在行驶过程中因路面不平、车速和运动方向的变化,车轮、发动机和传动系统的不平衡等各种外部和内部的激振作用而产生整车或局部的振动。这些振动使得汽车的动力学得不到充分发挥,经济性变坏;同时也影响着汽车的通过性、操纵稳定性;特别是使驾驶员产生疲劳,影响汽车的安全行驶;使乘员感觉不舒服,影响平顺性;有的甚至损坏汽车的零部件和运载的货物,缩短汽车寿命。

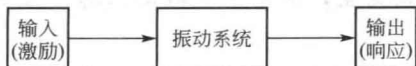


图 1.1 振动系统模型框图

汽车的振动问题和一般机械的振动问题一样,可用图 1.1 所示的框图来表示。

图 1.1 中的振动系统是指所研究的对象。对于汽车振动而言,它可以是汽车中的某个零件、某个部件、某个子系统或整车系统,如传动轴、曲轴、悬架系统、发动机悬置系统、传动系统、轮胎系统、人体座椅系统、整车振动系统。从振动理论来说,图 1.1 中振动系统表示研究对象的振动特性,输入(或激励)表示初始干扰和激振等外界因素对系统的作用,输出

(或响应)是表示系统在输入或外界激励作用下的动态响应。汽车振动这门学科就是要分析系统、激励和响应三者之间的关系,探讨系统各参数对振动响应的影响,提出控制振动的方法。

根据图 1.1,可把振动问题归纳为以下几类。

(1) 响应分析:已知输入和系统的参数,求系统的响应。通过对系统振动位移、振动速度和振动加速度响应的分析,判断系统是否满足强度、刚度、允许振动水平的要求。

(2) 动态设计:已知系统的激励,设计合理的系统参数,满足预定要求的动态响应。

(3) 系统识别:在已知输入和输出的情况下求系统参数;对已有的系统进行激振,测得激振下的响应,然后识别系统的结构参数。

(4) 环境预测:已知系统的输出和系统的参数,确定系统的输入,以判别系统的环境特性。

1.2 振动系统的基本要素

机械系统之所以产生振动是因为它本身具有质量和弹性,而系统中的阻尼则使振动受到抑制。从能量的观念来看,质量可储存动能,弹性可储存势能,阻尼则消耗能量。当外界对系统做功时,系统的质量就吸收动能,使质量获得速度;弹簧获得势能,具有了使质量回到原来位置的能力。这种能量的不断转换导致系统的振动,如果系统没有外界不断地输入能量,在系统阻尼的作用下,振动现象将逐渐消失。因此,质量、弹性、阻尼是振动系统的三要素。

1. 质量

在力学模型中,质量被抽象为不变形的刚体。根据牛顿第二定律,若对质量施加一作用力 F_m ,则该质量获得一与此力方向相同、大小成正比的加速度 \ddot{x} 。 F_m 表示为

$$F_m = m\ddot{x} \quad (1-1)$$

式中, m 为刚体质量,是惯性的一种量度。

对于扭转系统,广义力为扭矩 M ,广义加速度为角加速度 $\ddot{\varphi}$,则扭矩与加速度成正比,表示为

$$M = J\ddot{\varphi} \quad (1-2)$$

式中, J 为刚体绕其旋转中心轴的转动惯量。

在上述两式中,质量和转动惯量是表示力(力矩)和加速度(角加速度)关系的元件。

2. 弹性

在力学模型中,弹簧被抽象为无质量而具有线性弹性的元件。弹性元件在振动系统中提供使系统恢复到平衡位置的弹性恢复力。恢复力与弹性元件两端的相对位移的大小成正比。

$$F_k = -k(x_2 - x_1) \quad (1-3)$$

式中,负号表示弹性恢复力 F_k 与相对位移的方向相反; k 为比例常数,通常称为弹簧常数或刚度。

扭转弹簧产生的是恢复力矩,扭转弹簧的位移是角度。



3. 阻尼

在力学模型中, 阻尼器被抽象为既无质量又无弹性的阻尼力模型。在振动系统中, 阻尼器提供系统运动的阻尼力, 其大小与阻尼器两端相对速度成正比的阻尼器为线性阻尼器, 阻尼力大小为

$$F_c = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1-4)$$

式中, 负号表示阻尼力的方向与阻尼器两端相对速度的方向相反; c 为比例常数, 称为阻尼系数。

实际振动系统中, 除了以上的粘性阻尼外, 还有结构阻尼、摩擦阻尼等。

在国际单位制(SI)中, 质量的单位为千克(kg); 转动惯量的单位为千克·米²(kg·m²); 力的单位为牛顿(N); 位移的单位为米(m); 扭矩的单位为牛·米(N·m); 速度的单位为米/秒(m/s); 直线弹簧刚度的单位为牛/米(N/m); 扭转弹簧刚度的单位为牛·米/弧度(N·m/rad); 阻尼系数的单位为牛·秒/米(N·s/m)。

1.3 振动的研究方法

解决振动问题的方法, 不外乎通过理论分析和实验研究, 二者是相辅相成的。在大量实践和科学实验基础上建立起来的理论, 反过来对实践起指导作用; 而从理论分析得到的每一个结论都必须通过实践来验证它是否正确。

1.3.1 理论分析

在振动问题的理论分析中, 一般可分为下列几个步骤。

1. 建立力学模型

实际的振动系统往往很复杂, 为便于分析和计算, 必须抓住主要因素, 而略去一些次要因素, 将实际系统简化和抽象为动力学模型。简化的程度取决于系统本身的复杂程度, 要求计算结果的准确性等。

图 1.2 表示了几种汽车沿道路行驶时的车身振动的力学模型。图 1.2(a)所示为单自由度车身振动模型, 该模型中仅仅考虑悬架的刚度和阻尼对车身振动的影响; 图 1.2(b)所示为车身车轮二自由度振动模型, 与车身振动的单自由度模型相比, 该模型还考虑了轮胎的刚度和非悬挂质量; 图 1.2(c)所示为考虑前后悬架不同输入的车身二自由度系统, 与车身车轮二自由度模型相比, 该模型考虑了前后悬架的不同输入, 其响应可反应车身的垂直振动和俯仰运动; 图 1.2(d)和图 1.2(e)分别表示车身的四自由度振动模型和七自由度振动模型。显然, 建立的力学模型与实际系统越接近, 则分析的结果与实际情况越接近。

2. 建立数学模型

应用物理定律对所建立的力学模型进行分析, 导出描述系统特性的数学方程。通常振动问题的数学模型可表示为微分方程的形式。

3. 方程的求解

为得到描述系统振动的数学表达式, 需要对数学模型进行求解。通常这种数学表达式是位

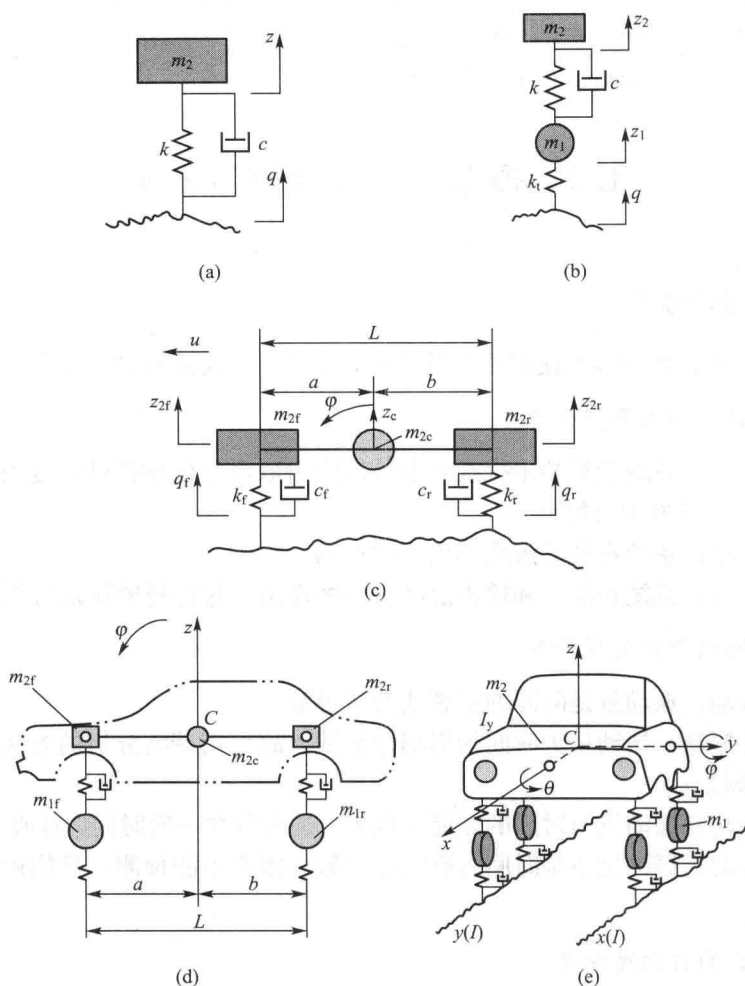


图 1.2 汽车车身振动的几种力学模型

移、速度、加速度等振动响应量的时间函数。它表明系统响应与系统特性、激励等的关系。

4. 分析结论

根据方程的解提供的规律和系统的工作要求及结构特点，可以作出设计和改进，以获得问题的最佳解决方案。

1.3.2 实验研究

实验研究通常进行两方面的工作：一方面，直接测量振动系统的响应，并分析系统的振动特性；另一方面，用已知的振源去激振研究对象，并测取振动响应，以把握系统的振动特性。实验研究的振动测试和分析的过程可用如图 1.3 所示的框图表示。



图 1.3 振动试验系统框图



振动问题的研究离不开理论分析和实验研究，理论分析的结果需要通过实验来验证；通过实验的方法识别出的系统的特性，需要用理论模型进一步分析。只有通过理论分析与实验验证相结合，才能更好地研究振动问题。

1.4 振动的分类和表示方法

1.4.1 振动系统的分类

按照系统输入、响应和系统特性等的不同，振动系统可进行如下分类。

1. 根据系统的输入类型分类

(1) 自由振动：系统受初始干扰或原有外激励力取消后仅在弹性恢复力作用下所产生的振动，也称为系统的固有振动。

(2) 强迫振动：系统在外界激励作用下的振动。

(3) 自励振动：系统在输入和输出之间有反馈作用，并有能量补充而产生的振动。

2. 根据系统的输出类型分类

(1) 简谐振动：振动量是时间的正弦或余弦函数

(2) 周期性振动：振动量为时间的周期性函数，故可用谐波分析的方法，展开为一系列简谐振动的叠加。

(3) 瞬态振动：振动量为时间的非周期函数，通常仅在一定时间内存在。

(4) 随机振动：振动量不是时间的确定性函数，因而不能预测，只能用概率统计的方法来研究。

3. 根据系统的自由度分类

(1) 单自由度系统：用一个独立坐标就可确定系统的振动。

(2) 多自由度系统：用多个独立坐标才能确定系统的振动。

(3) 弹性体振动系统：需用无限多个独立坐标才能确立系统的振动，也称无限多自由度振动系统，用于区别单自由度和多自由度振动系统。

4. 根据描述系统的微分方程分类

(1) 线性振动系统：用常系数线性微分方程来描述，它的质量不随着运动参数的变化而变化，而且系统的弹性力与阻尼力可以简化为线性模型，即弹性力和阻尼力分别与位移和速度的成正比。

(2) 非线性振动系统：用非线性微分方程来描述，即微分方程中有非线性项。

1.4.2 振动的表示方法

从运动学的观点看，振动是系统的位移、速度、加速度在某一数值附近随时间的变化规律。这种规律如果是确定的，则可用函数关系式

$$x=f(t) \quad (1-5)$$

来描述其运动,也可用函数图形来表示。图 1.4 就是以时间 t 为横坐标,位移 x 为纵坐标表示的几种典型的振动。图 1.4(a)和图 1.4(b)表示在相等的时间间隔内做往复运动,称为周期运动。运动往复一次所需要的时间间隔称为周期 T ,其单位以秒(s)计。周期振动可用时间的周期函数表示为

$$f(t) = f(t + nT) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

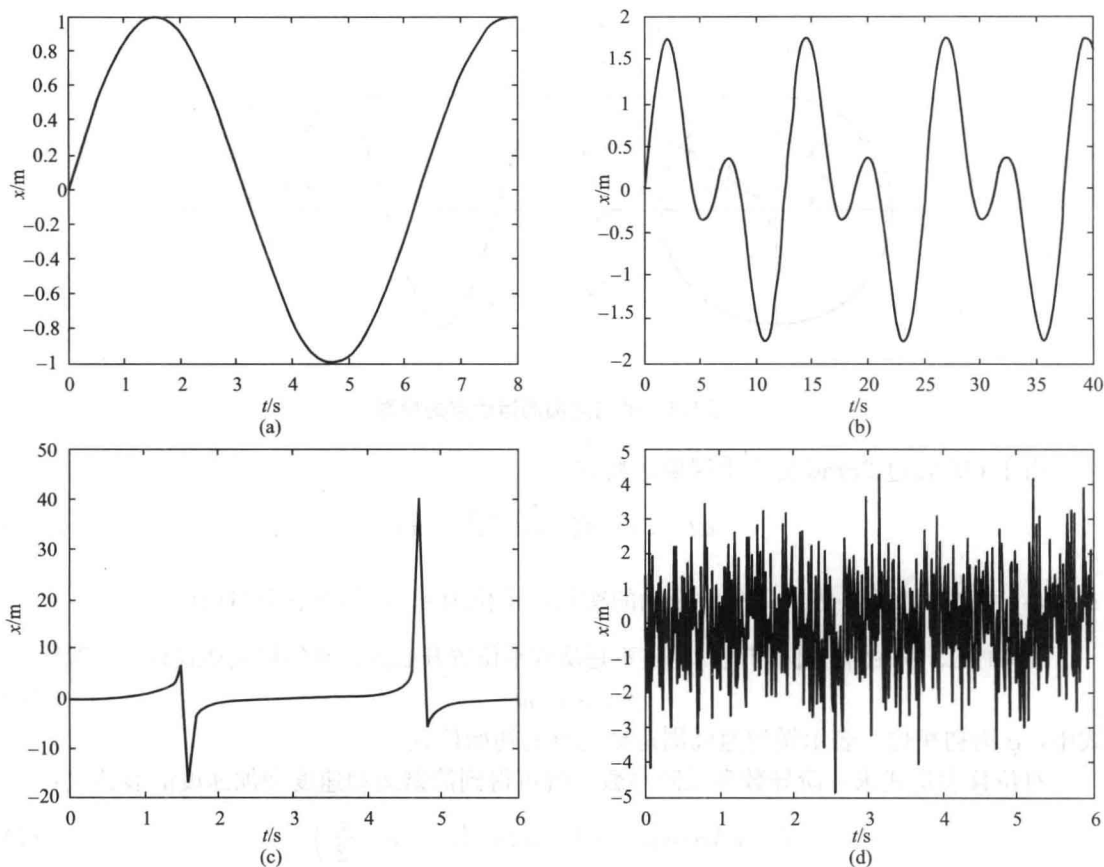


图 1.4 几种典型的振动形式

以一定周期持续进行的等幅振动称为稳态振动,而最简单的周期振动是如图 1.4(a)所示的简谐振动。

图 1.4(c)表示系统受到冲击后产生的振动,这种振动没有一定的周期,故不能用周期函数来表示,称为非周期振动。它往往经过一定的周期后逐渐消失,故又称瞬态振动。

图 1.4(d)表示系统在随机激励下产生的振动,这种运动不能用时间函数来描述,称为随机振动。

1. 简谐振动

简谐振动是最简单的周期振动。其振动位移可用下面正弦函数(或余弦函数)来表示:

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (1-7)$$

式中, T 为周期; A 为振幅。



这种按时间的正弦函数所做的运动称为简谐振动。简谐振动常用做匀速圆周运动的点在铅垂线上的投影来表示,如图 1.5 所示。一长度为 A 的线段 OP , 由水平位置开始, 以等角速度 ω 绕 O 点沿逆时针方向转动, 任一瞬时 t , P 点在铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin \omega t \quad (1-8)$$

式中, ω 为圆频率, 单位为 rad/s 。

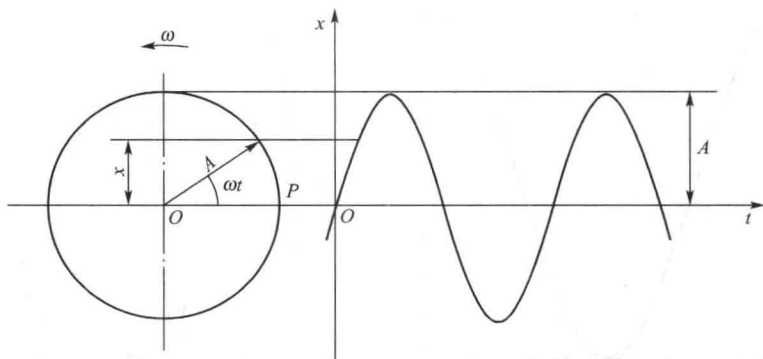


图 1.5 做匀速圆周运动点的投影

由于 OP 转过 $2\pi \text{rad}$ 为一个周期, 故有

$$\omega t = 2\pi \quad \text{或} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1-9)$$

式中, $f = \frac{1}{T}$ 为频率, 表示每秒钟振动的次数, 单位为 s^{-1} , 称为赫兹(Hz)。

如果图 1.5 中做匀速圆周运动的点不是从水平位置开始的, 其位移表达式具有一般形式

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-10)$$

式中, φ 为初相位, 表示做匀速圆周运动的点的初始位置。

对位移表达式求一阶导数和二阶导数, 就可得到简谐运动速度和加速度的表达式:

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-11)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1-12)$$

由此可见, 只要位移是简谐函数, 则速度和加速度也是简谐函数, 而且与位移具有相同的频率, 但速度和加速度的相位分别比位移超前了 $\pi/2$ 和 π (图 1.6)。

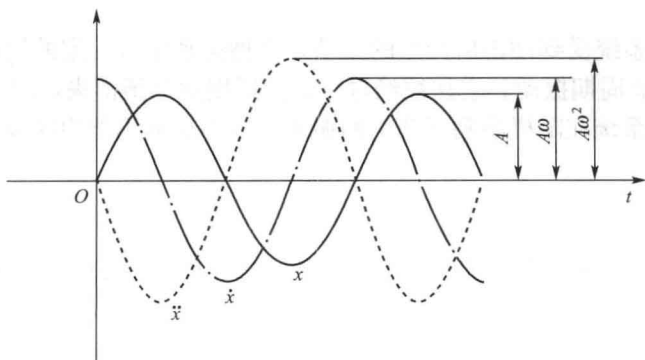


图 1.6 位移、速度和加速度之间的关系

另外, 对比式(1-10)和式(1-12)可知:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1-13)$$

这表明在简谐运动中, 加速度的大小与位移成正比, 而其方向与位移相反。

2. 简谐振动的矢量及复数表示法

在复平面上的一个矢量 \overrightarrow{OP} 代表复平面上的复数 Z , 如图 1.7 所示。如果使复矢量 \overrightarrow{OP} 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转, 就成为一复数旋转矢量。其复数表达式为

$$Z = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi) \quad (1-14)$$

式中, i 为 $\sqrt{-1}$; $A\cos(\omega t + \varphi)$ 为复数 Z 的实部, 记为 $R_e Z$; $A\sin(\omega t + \varphi)$ 为复数 Z 的虚部, 记为 $I_m Z$ 。

也就是说, 同样可以用一复数旋转矢量在复平面的实轴 R_e 上或虚轴 I_m 上的投影来表示简谐振动。复数旋转矢量 \overrightarrow{OP} 在虚轴上的投影为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) = I_m Z = I_m [Ae^{i(\omega t + \varphi)}] \quad (1-15)$$

对矢量 Z 进行一次微分, 则得

$$\dot{Z} = i\omega Ae^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega Z \quad (1-16)$$

再对 \dot{Z} 进行一次微分, 则得

$$\ddot{Z} = (i\omega)^2 Ae^{i(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 Z \quad (1-17)$$

矢量 Z , \dot{Z} , \ddot{Z} 三者的关系如图 1.8 所示。图中表示, 速度矢量 \dot{Z} 是位移矢量 Z 的 ω 倍, 相位超前了 $\pi/2$ 。加速度矢量 \ddot{Z} 是位移矢量 Z 的 ω^2 倍, 相位超前了 π 。

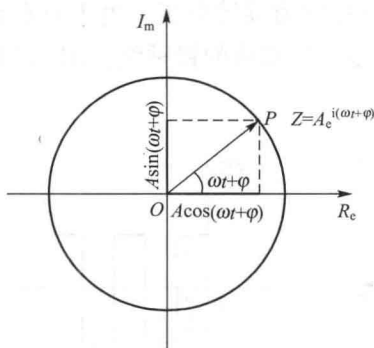


图 1.7 简谐振动的旋转矢量表示

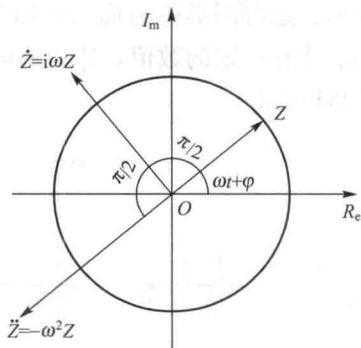


图 1.8 位移、速度及加速度的矢量表示

1.4.3 谐波分析

简谐振动是最简单的周期振动, 而实际问题中更多的是非简谐的周期振动或非周期振动, 如图 1.9 所示。

任何一个周期函数, 只要满足一定的条件, 都可以展开成傅里叶级数。把一个周期函数展开成一个傅里叶级数, 即展开成一系列简谐函数之和, 这个过程称为频谱分析或谐波分析。

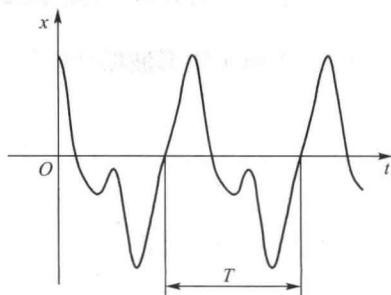


图 1.9 一般周期振动



设一周期函数为 $F(t)$ ，其周期为 T ，展开成傅里叶级数为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-18)$$

式中， $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为基频； a_0 ， a_n 和 b_n 均为待定常数，称为傅里叶系数。只要 $F(t)$ 是已知的，它们可从三角函数的正交性得到：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (1-19)$$

式(1-19)也可写成：

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-20)$$

式中，

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$$

可见，周期函数可用傅里叶级数展开为各阶谐波分量的叠加来表示。组成各谐波分量的频率是基频的整数倍，即 ω_0 ， $2\omega_0$ ， $3\omega_0$ ， \dots ， $n\omega_0$ ，而不含有其他频率的谐波分量。

为了把谐波分析的结果形象化，可把 A_n ， φ_n 与 ω_0 之间的变化关系用图来表示，如图 1.10 所示。这种图形称为周期函数的频谱，这种分析称为频谱分析。由于只有在 $n\omega_0$ 各点 A_n ， φ_n 才有一定的数值，所以周期函数的频谱图是一组离散的铅垂线。图 1.11 所示为矩形波的时域图。

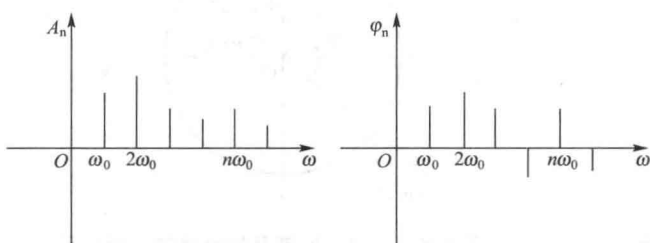


图 1.10 周期函数的频谱图

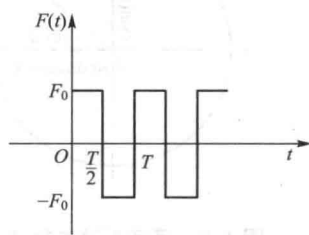


图 1.11 矩形波的时域图

图 1.11 所示矩形波振动信号的表达式为

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F_0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

根据式(1-19)可得

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 \cos n\omega_0 t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 \cos n\omega_0 t dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 \sin n\omega_0 t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 \sin n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{4F_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

由式(1-18)也可得矩形波的傅里叶级数为

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t = \frac{4F_0}{\pi} \left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$

矩形波的频谱图如图 1.12 所示。

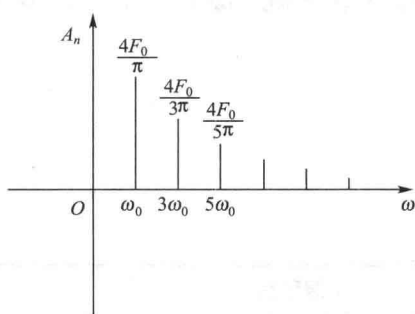


图 1.12 矩形波的频谱图

复 习 题

- 1-1 振动系统包括哪些基本要素?
- 1-2 怎样进行振动的研究分析?
- 1-3 按照系统输入、响应和系统特性等的不同,振动系统可怎样进行分类?
- 1-4 简谐振动的表示方法是什么?位移、速度、加速度之间的关系是什么?
- 1-5 什么是非周期振动的频谱表示法?