

004116

* * * * *
*
* 简 明 量 子 场 论 *
*
* * * * *



目 录
≈≈≈≈≈≈

1. 多粒子表示	(2)
2. 经典场	(9)
3. 场算子	(14)
4. 简例二则	(18)
5. 相互作用绘景	(23)
6. 不变 Δ 函数	(28)
7. 荷电介子	(33)
8. 费米子	(39)
9. 光子I	(52)
10. 光子II	(58)
11. 相互作用	(64)
12. 散射矩阵	(73)
13. S矩阵的展开	(77)
14. 费曼图	(83)
15. 康普顿散射	(90)
16. 库仑散射	(100)
17. 辐射修正	(104)
18. 费米子自能	(109)
19. 真空极化	(119)
20. 顶角修正	(123)
21. 电子反常磁矩	(126)
22. 重整化	(128)
附录: 狄拉克方程	(135)

前 言

写这样一本简明量子场论的目的，是想提供一本浅显易读的读物。用意有二：阐明场量子化的基本思想和让读者熟习量子场论中近代微扰论的处理方法。所以，将主要集中于说明达朗和费曼的优美思想：在相互作用绘景中的散射矩阵微扰展开，以及它的图形说明。微扰理论的这种图形表示非常有助于复杂数学的具体化，而它的极其有用性，在物理学的所有分支中现在已被公认。当然，我们将只限于量子场论，主要是量子电动力学，讨论一些“有限”过程和辐射修正。

由于本书的介绍性特点，在表达方式上，每个地方都作了考虑。哈密顿形式是我们的出发点，并认为读者已熟习了这种形式的非相对论的量子力学。不要求知道更抽象的形式，其中之一，如 Schwinger 的作用量原理，尽管后者在其名著中有很多论述。此外，我们准备对重整化理论作完整的论述。不论在任何情况下，最好是用最近的非微扰论方法去做，其原先的目的是想处理强相互作用，但直至目前，所得成果仍然是很有限的。

假定读者已具备了很好的经典物理、非相对论量子力学、狭义相对论以及狄拉克电子理论的知识。狄拉克电子理论的有关部分，已扼要写于附录中。

.....

* 作者写于 1959 年，当时系统的规范理论尚未形成。

第1章 多粒子体系

本书研究的主要问题是两个场或粒子系的相互作用。例如，介子和核子，或者光子和电子。我们将要讨论的是这样一些过程。象光子被电子散射（康普顿散射），或者 π 介子被核子散射；产生光子的带电粒子间的弹性散射；以及电子—正电子对的湮没。因此我们必须发展一种适合于描述这些过程的方法，包含了粒子的产生和消失，象在韧致辐射中那样。

让我们考虑一个典型的这种过程：康普顿散射。描述这个过程当然是应用波包。但是，正象通常非相对论的散射理论一样，理想的数学工具是应用平面波。然而，我们常常又以不使用“波包”一词去具体化问题为好。可以认为初态是这样的态：电子和光子相距很远，它们没有相互作用，电子有动量 \vec{p} 和自旋 s ，而光有动量 \vec{k} 和极化矢量 $\vec{\epsilon}$ 。散射发生过后，电子和光子又离得很远。末态由相应的量 \vec{p}' , s' , \vec{k}' , $\vec{\epsilon}'$ 所表示。这种描述是一个典型的微扰论方法，它是贯穿全书的基础。假定体系的总哈密顿可分成三部分：两个无相互作用体系的哈密顿和一个相互作用项。初态和末态用哈密顿的无相互作用部分的本征态来表示。相互作用部分只是引起散射，也即从初态到末态的改变。

现在，表示一个态的方法是显而易见的。对每一种类型的粒子，我们列出单粒子态的完全集。表明了每个态上的粒子数后（这叫单粒子态的占有数）也就是给予多粒子系的完全描述。如果没有相互作用，占有数保持恒定。由于相互作用的结果，它们将随时间变化，这相应于散射，粒子产生等等。

今讨论一个质量为 m ，自旋为0，并且不带电的，无相互作用的粒子系（称它为介子）。在这个简单的情况下，介子的动量 \vec{k} 足以完全表明它的态。它的能量 ω_k 相对论性地表示为：

$$\omega_k^2 = m^2 + k^2 \quad (1.1)$$

（我们总是采用自然单位： $\hbar = c = 1$ ）相对论的波方程按通常的方法，可以由(1.1)得到。即将 ω_k 和 k 看作算子，作用在波函数 $\phi(\vec{x})$ 上。据此求得克莱—哥登(Klein-Gordon)方程。

$$(\square^2 - m^2) \phi(x) = 0 \quad (1.2)$$

对矢量，我们应用如下符号。四矢量 w_λ , $\lambda = 1, \dots, 4$, 有空间分量 w_1, w_2, w_3 和虚的时间分量 $w_4 = iw_0 = it$ 。空间的三分量矢量的分量将用拉丁字母下标 l, m, \dots 表示，而四分量矢量的分量则用希腊字母指标 $\lambda, \mu, \nu \dots$ 表示。标积

$$\sum_{\lambda=1}^4 \bar{b}_\lambda w_\lambda$$

将简写作 $\bar{b}_\lambda w_\lambda$ ，也即在一个含有乘积式中，重复的希腊字母指标表示求和。在不会引起混淆的情况下，常常将四分量矢量的指标略去而写作 w （如 (1.2) 式那样），而 $\bar{b}w$ 作为标积。最后，在 (1.2) 式中

$$\square^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial w_\lambda \partial w_\lambda} \quad (1.3)$$

为了得到克莱—哥登方程本征解的完全集，必须要指明边界条件。较方便的是把系统置于体积 $V = L^3$ 的立方盒子里，并使它在盒子的表面上满足周期性边界条件。这样，得到的正交本征解的完全集为

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i k \cdot x} \quad (1.4)$$

根据周期性条件，矢量 \vec{k} 必须是下列值之一。

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (v_1, v_2, v_3) \quad (1.5)$$

其中 v_1, v_2, v_3 是整数。我们认为这些就是许可的动量。(1.4) 式中的 k_0 ，对每一个许可的动量 \vec{k} ，由 (1.1) 式的动量—能量关系给出。

$$k_0 = \omega_{\vec{k}} = +\sqrt{(m^2 + \vec{k}^2)} \quad (1.6)$$

现在，我们讨论许可动量 \vec{k} 和由 (1.6) 式能量关系表示的 k_0 ，以后常写成四矢量 $k \equiv (\vec{k}, ik_0)$ 。

现在以某一确定的次序列举许可动量 $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_i \dots$ ，相应的单粒子态为 $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ 。一个没有相互作用的多粒子系，完全

可以用 ϕ_1 态中的介子数 n_1 , ϕ_2 态中的介子数 n_2 , ϕ_i 态中的介子数 n_i 等等来表征。我们用一态矢量来表示多粒子系的这个信息。

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \equiv \Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \quad (1.7)$$

它与单粒子理论中的波函数相类似。说态矢量 (1.7) 提供了多粒子系的一个完全描述, 就等于说我们已做了量子力学的假定, 粒子是不可区分的。这里, 态矢量可能是一个更抽象的概念。它的含义和如何掌握它, 以后会变得稍为清楚一点。但是, 现在对 (1.7) 式不再作更多的说明。特别是, 不可把 $\Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots)$ 设想成是位置矢量, 粒子的动量, 或者任何其他什么量的函数。

我们用态矢量 (1.7) 的集合去组成无限维矢量空间的一个正交基。定义任意态矢量 (1.7) 对的标积为

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | n_1', n_2', \dots, n_i', \dots \rangle \\ = (\Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots), \Phi(n_1', n_2', \dots, n_i', \dots)) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \delta(n_i, n_i') \end{aligned} \quad (1.8)$$

这里 $\delta(a, b)$ 是 δ 符号 $\delta_{a,b}$ 。

一般的时间有关的态, 用态矢量 $\Phi(t)$ 表示, 它是基矢 (1.7) 的线性组合, 其系数是时间的函数。

$$\Phi(t) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} c_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}(t) \Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \quad (1.9)$$

$|c_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}(t)|^2$ 是 t 时刻在 ϕ_i ($i=1, 2, \dots$) 上找到 n_i 个粒子的几率。写成 (1.9) 式时, 我们用的是薛定格表象。它用态矢量时间的发展来描述体系的发展。

一般, 一个体系的占有数是可变的。例如, 一个介子从动量态 \vec{k}_1 散射到 \vec{k}_2 , 则 n_1 要减少 1 而 n_2 要增加 1。(为了实现这一点, 自然要求有相互作用, 即散射)。现在必须要说明, 矢量空间中的算子, 它将一个态矢量转换成另一态矢量, 与之对应的是粒子数的改变。基本算子是让单态粒子数改变 1 的那些算子。对于每个许可的动量 \vec{k}_1 , 定义一个吸收 (或称消灭) 算子 $a(\vec{k}_1)$, 它以如下方式转换一个

一般的基矢:

$a(\vec{k}_i) \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) = \sqrt{n_i} \Phi(n_1, \dots, n_i - 1, \dots) \quad (1.10)$
 即 $a(\vec{k}_i)$ 使第 i 个态的粒子数减少 1, 而其余态的粒子数不变。定义中的 $\sqrt{n_i}$ 因子是因为物理解释的需要。

从 (1.10) 式立刻可得 $a(\vec{k}_i)$ 的矩阵表示, 同时伴随算子 $a^+(\vec{k}_i)$ 遵从

$$a^+(\vec{k}_i) \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) = \sqrt{(n_i + 1)} \Phi(n_1, \dots, n_i + 1, \dots) \quad (1.11)$$

因此, $a^+(\vec{k}_i)$ 是一个产生算子: 它使第 i 个态上的粒子数增加 1, 而所有其他态上粒子数不变。

从定义 (1.10-11) (或相应的矩阵表示) 式可直接证明两个重要的结论:

$$(I) \quad a^+(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i) \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) = n_i \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) \quad (1.12)$$

即基矢 $\Phi(n_1, \dots, n_i, \dots)$ 是算子 $a^+(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i)$ 的本征函数, 其本征值 n_i 是第 i 个态上的粒子数。由此我们称 $a^+(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i)$ 为第 i 个态的粒子数算子。这些本征态的线性叠加, 如 (1.9) 式, 当然已不再是一个本征态。

(II) 产生和消灭算子遵从对易关系。

$$\begin{aligned}
 [a(\vec{k}_i), a(\vec{k}_j)] &= [a^+(\vec{k}_i), a^+(\vec{k}_j)] = 0 \\
 [a(\vec{k}_i), a^+(\vec{k}_j)] &= \delta(\vec{k}_i, \vec{k}_j)
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

(将矢量 \vec{k}_i 的分量写成 $k_{i,m}$ ($m=1, 2, 3$), 后一方程的 δ 符号实际上是 $\prod_m \delta(k_{i,m}, k_{j,m})$)。

我们用 Φ_0 表示真空态, 它在理论中起重要作用。它代表这样的态, 在那里, 所有单粒子态都空着。(即所有 $n_i = 0$) $\Phi_0 = \Phi(00\dots)$ 。因此, 从这个态不可能消灭粒子。数学上表示, 对所有的 \vec{k}_i 有

$$a(\vec{k}_i) \Phi_0 = 0 \quad (1.14)$$

这个方程与我们先前的定义 (1.10) 是一致的, 而且事实上也是必须的。因为 (1.10) 式并没有定义 $a(\vec{k}_i) \Phi_0$, 它的右方在这个情况下是没有意义的。

相应的产生算子的相继应用，我们可以从真空态得到所有的基矢 $\Phi(n_1 \dots n_i \dots)$ 。因而，只有一个介子动量是 \vec{k}_i 的态表示为 $a^+(\vec{k}_i)\Phi_0$ 。根据 (1.13) 式对易关系可知此态正好是归一的。类似的，可写出有任意两个介子的态为 $a^+(\vec{k}_i)a^+(\vec{k}_j)\Phi_0$ 。从对易关系 (1.13) 可知，此态对粒子交换（即 $\vec{k}_i \leftrightarrow \vec{k}_j$ ）是对称的。因此我们的公式描述了一个遵从玻色—爱因斯坦统计的多粒子系。由此，同样可知，态中的粒子数 n_i 可以取所有值 $0, 1, 2, \dots$ ，这是玻色子（遵从玻色—爱因斯坦统计的粒子）的特性。费米子（遵从费米—狄拉克统计的粒子）遵从泡里不相容原理。在一个态中最多只允许有一个粒子；粒子数 n_i 只可能取 0 或 1 。因此，若将上面的公式应用于费米子，要作根本性的修改。

由于在态 \vec{k}_i 中的一个粒子的能量是

$$\omega(\vec{k}_i) = +\sqrt{(m^2 + \vec{k}_i^2)} \quad (1.15)$$

位于态 $\Phi(n_1 \dots n_i \dots)$ 的多粒子系的能量是

$$\sum_i n_i \omega(\vec{k}_i) \quad (1.16)$$

由于介子没有相互作用，根据 (1.12) 式我们认为多粒子系的哈密顿算子是

$$H = \sum_i a^+(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i) \omega(\vec{k}_i) \quad (1.17)$$

它的本征函数是 $\Phi(n_1 \dots n_i \dots)$ ，本征值是 (1.16) 式。

用类似于单粒子量子力学的方法，可以得到体系的运动方程为

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H \Phi(t) \quad (1.18)$$

其哈密顿函数为 (1.17) 式。这个方程给出了体系的时间发展。它的能量本征态由

$$\Phi(t) = \Phi(n_1 \dots n_i \dots) e^{-iEt} \quad (1.19)$$

代入 (1.18) 式可得

$$(H - E) \Phi (n_1 \dots n_i \dots) = 0 \quad (1.20)$$

$$E = \sum n_i \omega(\vec{k}_i) \quad (1.21)$$

正如所料，无相互作用时，粒子数是运动常数。同样还可得知，粒子数算子

$$a^\dagger(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i) \quad (1.22)$$

和哈密顿 (1.17) 是可对易的。

上面用分立的具有一定性质 (如动量) 的单个粒子来描述体系只是可能的方式之一。例如，在描述经典电磁场时，也可以不用这一术语。我们可以把矢量 \vec{E} 和 \vec{H} 表示成时空点 x 的函数，或者表成四矢量 $A^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, 4$ 。因此一个电子被它自身的电磁场所包围；用粒子的术语来讲，就是电子被光子云所包围。类似的，两电子的相互作用，在马克威理论中是经过中间场发生的；而现在则认为是两光子云之间交换光子的结果。这里，我们也遇到了通常量子力学中波粒二象性。

这种波粒二象性同样也发生在零自旋的介子情况下。唯一的差别是这里更简单 (无自旋、无规范不变性等等)，只要一个场 $\phi(x)$ 就足以完全描述介子系，而光子场则要求两个矢量场 \vec{E} 和 \vec{H} 。介子场所起的作用完全类似于光子场。而非电磁原因引起的核力就是由介子场所描述的。用粒子的术语，它们是由于每个核子周围的介子云之间交换介子所引起的。这个假设的有力说明是核子之间的力是短程力，其力程是 π 介子的康普顿波长的数量级。其波长是 1.4×10^{-13} 厘米。这就是为了说明核力的短程性，汤川提出有一种适当质量的粒子存在，它以上述方式发挥作用的理由。

保持这种波粒二象性的理论，必定是量子化的场的理论。这种理论可以用不同的方法得到。这里应用的方法有若干不足之处。特别是它将时间与空间坐标单独分开，这样就避开了理论的相对论不变性，而这将妨碍理论的进一步发展。然而，我们将首先采用这一方法，因为它有与通常量子力学中应用的方法非常相似的效力，使得读者很容易去领会它。这一方法是先用哈密顿形式构成经典场理论，然后按照通常的对哈密顿体系的假定，去量子化这个理论。经典理论的导出以

及它的量子化构成以后两章的内容。

习 题

1. 从 (1.10) 式导出 (1.11) 式。

2. 从 (1.10—1.11) 式导出 (1.12) 式

3. 从 (1.10—1.11) 式导出对易关系 (1.13) 式

第 2 章 经 典 场

我们这一章的目的是用哈密顿形式去发展经典场的理论。只是对理论的极少数结论，它是第三章量子化方法中所需要的，在这里加以推导。我们将只关心于得到一组共轭变量的完备集。其方法与经典力学密切相关。假设有一个拉氏函数，场方程可以由作用量，根据变分原理得到。从拉氏函数可以得到原始场变量的共轭动量，而过渡到量子化理论，是由假定场变量与其共轭动量之间适合一定的对易关系来达到的。尤其要注意的是与经典粒子力学比较，我们这里所处理的是一个具有不可数自由度的体系。

在上一章，我们把粒子与满足克莱—哥登方程的单个场 $\phi(x)$ 相对应。现在我们讨论有若干场 $\phi^\alpha(x)$ $\alpha = 1, \dots, N$ 的普遍情况，它们是为表明体系所需要的。这个推广并不使分析复杂化，但实际上所遇到的大多数情况却是这样。指标 α 可以是标志一个场的分量，（如光子场，用四矢势 A_α 来描述， α 即从 1 到 4；对标量场 $\phi(x)$ ，如第一章所说，只有一个分量），或者可看作是不同完全独立的场。我们假定，场 ϕ^α 是实数。如果出现复场，它必定可分成两个实场。

现在，我们限定经典场理论是这样的，它能够从作用量根据变分原理来得到。就是说，假定有一个拉氏函数密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \phi^\alpha_{,\mu}) \quad (2.1)$$

这里，已用了缩写

$$\phi^\alpha_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (2.2)$$

拉氏函数密度 (2.1) 只与场量及其一阶导数有关，并不表示是最一般的情况，对于后者，理论也是能发展的，但是前者处理了所有的实际情况，并且使理论大为简化。

我们定义四维连续时空任一区域 Ω 的作用量积分 $I(\Omega)$ 为

$$I(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi^\alpha, \phi^\alpha_{,\mu}) \quad (2.3)$$

其中 d^4x 表示四维积分元 $dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = d^3x dt$

现在假定体系的运动方程（即场方程）可以用与经典力学中的哈密顿原理极其相似的变分原理得到。如果对任意区域 Ω ，场 $\phi^a(x)$ 发生改变， $\phi^a(x) \rightarrow \phi^a(x) + \delta\phi^a(x)$ ，由于在区域的边界面 Γ 上，这个改变是零，则作用量积分（2.3）式有稳定值，即

$$\delta I(\Omega) = 0 \quad (2.4)$$

根据（2.3）式算得

$$\begin{aligned} \delta I(\Omega) &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}^a} \delta\phi_{,\nu}^a \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}^a} \right) \right\} \delta\phi^a \\ &\quad + \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}^a} \delta\phi^a \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

后一等式是由分部积分所得，并注意到，

$$\delta\phi_{,\nu}^a = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta\phi^a \quad (2.6)$$

（2.5）式中的最后一项是一个四维散度的四维体积分。根据高斯定理，它可以变换成在 Γ 面上的面积分。

$$\int_{\Gamma} d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}^a} \delta\phi^a \right\} \quad (2.7)$$

$d\sigma_{\nu}$ 是 Γ 上的面积元。由于 Γ 面上 $\delta\phi^a = 0$ ，（2.7）式的面积分为零。如果对任意改变 $\delta\phi^a$ ， $I(\Omega)$ 场为零，从（2.5）式即可得如下方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}^a} \right) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

这就是场 $\phi^a(x)$ 遵从的微分方程。称之为变分问题（2.4）的尤拉方程，它与经典力学中的拉格朗日方程相当。理论的相对论不变性要求作用量积分在洛伦兹变换下保持不变。从（2.3）式可得拉氏密度必须是标量，它在洛伦兹变换下不变。

为了用通常量子力学方法量子化经典场理论，我们必须先复习一下哈密顿形式。对于具有连续数目自由度的体系，它常常要加以发展。我们处理的是一个具有不可数的无限多自由度的体系，它相应于场 ϕ^α 在空间 ω 每一点的值，每个自由度是时间的函数。因此，必须应用极限过程。

在一个确定时刻 t 讨论体系，把三维空间（即 $t = \text{常数}$ 的平直类空曲面）分割为许多小的体积元 $\delta \vec{\omega}^{(s)}$ ，用指标 $s = 1, 2, \dots$ 来标志。现在体系是用一个可数的变量来表示了。

$$q_s^\alpha = \phi^\alpha(s, t) \quad (\alpha=1 \dots N; s=1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

给定了每个体积元中场量的值之后，体系就确定了。（自然，最后我们是要过渡到连续体的极限情况，即令每个体积元的体积趋于零），把相对于空间坐标的微分系数用相邻两体积元之间的差分系数代替，而体系的拉格朗日定为

$$L(t) = \sum_s \delta \vec{\omega}^{(s)} \mathcal{L}^{(s)}$$

其中 $\mathcal{L}^{(s)}$ 是拉氏密度 (2.1) 在体积元中的值。然后，定义 q_s^α 的共轭动量 p_s^α 为

$$p_s^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \phi^\alpha(s, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(s)}}{\partial \phi^\alpha(s, t)} \delta \vec{\omega}^{(s)} \quad (2.11)$$

点表示对于时间的微分。现在可以按通常方式，定义哈密顿函数 $H(t)$ 。

$$H = \sum_s p_s^\alpha \dot{q}_s^\alpha - L \quad (2.12)$$

为了实现 $\delta \vec{\omega}^{(s)} \rightarrow 0$ 的极限，我们定义 $\phi^\alpha(\omega)$ 的共轭场

$$\pi^\alpha(\omega) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\alpha} \quad (2.13)$$

则 (2.11) 式化为

$$p_s^\alpha = \pi^\alpha(s, t) \delta \vec{\omega}^{(s)} \quad (2.14)$$

哈密顿函数 (2.12) 式变为

$$H = \sum_s \delta^3(\vec{x} - \vec{s}) \{ \pi^\alpha(s, t) \dot{\phi}^\alpha(s, t) - \mathcal{L}(s, t) \} \quad (2.15)$$

如果实现 $\delta^3(\vec{x} - \vec{s}) \rightarrow 0$ 的极限, 哈密顿函数可写作

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t)(\vec{x}, t) \quad (2.16)$$

其中哈密顿密度是

$$\mathcal{H}(x) = \pi^\alpha(x) \dot{\phi}^\alpha(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.17)$$

例如, 讨论拉氏密度

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\nu}) = -\frac{1}{2} \left\{ \phi_{,\nu} \phi_{,\nu} + m^2 \phi^2 \right\} \quad (2.18)$$

立刻可以看出, 它的拉格朗日方程 (2.8) 式就是克莱—哥登方程 (1.2) 式。就是说, (2.18) 式的拉氏密度描述的是质量为 m 的无自旋介子。由此拉氏密度, 可得共轭场 (2.13) 式为

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) \quad (2.19)$$

而哈密顿密度 (2.17) 式为

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \pi^2 + \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right\} \quad (2.20)$$

现在就有可能从有分裂值的共轭变量 q_α, p_α 的哈密顿方程去获得共轭场 $\phi^\alpha(\vec{x}, t)$ 和 $\pi^\alpha(\vec{x}, t)$ 的哈密顿方程。在我们不需要这些方程时, 将略去它的推导。代之的, 在下一章, 我们将从共轭坐标 q_α, p_α 出发, 量子化经典共轭场 ϕ^α 和 π^α , 并且用这一方法回复到第一章的粒子描述。

习 题

1. 有拉氏密度

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

从变分原理 (2.4) 式导出四个场量 $A_\mu(x)$ $\mu = 1, \dots, 4$ 的尤拉方程。

2. 证明拉氏密度 $\mathcal{L}(\phi^a, \phi_{,\nu}^a)$ 若用

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial \phi_{,\nu}^a}$$

代替, 其中 $\lambda_1 \dots \lambda_4$ 是场 $\phi^a(x)$ 的函数, 则不改变场方程。

3. 根据场方程 (2.8) 式, 证明张量

$$T_{\mu\nu} = -\phi_{,\nu}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^a} + \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}$$

满足方程

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\nu=1, \dots, 4)$$

4. 对拉氏密度由 (2.18) 式表示的介子场, 算出张量 $T_{\mu\nu}$, 并且证明 $-T_{44} = \mathcal{H}$, 即为哈密顿密度 (2.20) 式。

5. 定义

$$P_\lambda(t) = -i \int d^3x T_{4\lambda}$$

证明:

当场 $\phi^a(\vec{x}, t)$ 在 $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ 时足够快地趋于零, 则 $P_\lambda(t)$ 是时间的常数, 并对结果加以说明。

6. 如果能动张量 $T_{\mu\nu}$ 是对称的, 证明

$$\frac{\partial \mu_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = 0$$

其中

$$\mu_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu} x_\nu - T_{\lambda\nu} x_\mu$$

因此场的角动量是守恒的。

第 3 章 场 算 子

第二章讨论的经典哈密顿场论，可以很容易地进行量子化，即把共轭坐标 q_α 和 p_α 看作是满足通常的正则对易关系的算子。根据 (2.9) 和 (2.14) 式，可将它写成

$$\left. \begin{aligned} [\phi^\alpha(s, t), \phi^\beta(s', t)] &= 0 \\ [\pi^\alpha(s, t), \pi^\beta(s', t)] &= 0 \\ [\phi^\alpha(s, t), \pi^\beta(s', t)] &= i\delta_{\alpha\beta} \frac{\delta_{ss'}}{\delta \vec{x}^{(s)}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha, \beta &= 1, \dots, N \\ s, s' &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

假如现在令体积元趋向零 $\delta \vec{x}^{(s)} \rightarrow 0$ ，即可得到在同一时刻 t ，空间两点 \vec{x} 和 \vec{x}' 的场量的对易关系。直到现在，我还没有表明如何描述体系随时间的变化，所涉及的只是某一时刻 t 。现在，我们仍然应用薛定格绘景，在这里算子与时间无关。我们可以取 $t=0$ ，并把 $\phi^\alpha(\vec{x}, 0)$ 写作 $\phi^\alpha(\vec{x})$ 等等，则场的对易关系变为

$$\left. \begin{aligned} [\phi^\alpha(\vec{x}), \phi^\beta(\vec{x}')] &= [\pi^\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{x}')] = 0 \\ [\phi^\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{x}')] &= i\delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned} \right\} (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (3.2)$$

因为当 $\delta \vec{x}^{(s)} \rightarrow 0$ 时， $\delta_{ss'}/\delta \vec{x}^{(s)}$ 变成为三维 δ 函数 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ 点 \vec{x} ， \vec{x}' 仍分别在体元 s 和 s' 中。

为了和第 1 章中的粒子图象建立联系，我们需要对场算子 $\phi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 作福利哀展开。这里仅限于单一的实场，它遵从克莱—哥登方程，即由 (2.18—20) 式所描述的场。我们从经典场开始，把它分解为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{ \alpha(\vec{k}) e^{ikx} + \alpha^*(\vec{k}) e^{-ikx} \} \quad (3.3a)$$

从 (2.19) 式又得

$$\pi(\vec{x}) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{k_0}{2}} \{-a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\} \quad (3.3b)$$

其中求和遍及所有可能的动量 \vec{k} , k_0 是由 (1.6) 式表示的相应能量, 它也出现在指数的标积 $kx = \vec{k}\cdot\vec{x} - k_0 t$ 中。这里, 福利衰级数中的展开系数 $a(\vec{k})$ 和 $a^*(\vec{k})$ 不可和第一章中引入的产生和消灭算子混淆。其实, 马上可以看出, (3.3) 式中有因子 $(2k_0)^{-\frac{1}{2}}$ 我们可以用量子理论来构造这一恒等式。

现在, 我们把 $\phi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 看作是量子理论中薛定格绘景中的场算子, 对于这些算子的 (3.3) 式是

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \{ a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \} \quad (3.4a)$$

$$\pi(\vec{x}) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \{-a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\} \quad (3.4b)$$

这里已将动量为 \vec{k} 的介子的能量写作 $\omega_{\vec{k}}$, (1.6) 式。 $\phi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 的算子特性实际上反映在经典振幅 $a(\vec{k})$ 和 $a^*(\vec{k})$ 上, 现在把它看作是算子。相应地, 我们已将复共轭 a^* 用伴随子 a^\dagger 代替。这就保证了场算子 $\phi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 是厄密的, 正象原来定义 (3.3) 式是保证经典场是实数一样。

由场的对易关系 (3.2) 式, 把 (3.4) 式入; 可以得到 $a(\vec{k})$ 和 $a^\dagger(\vec{k})$ 的对易关系, 是

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta(\vec{k}, \vec{k}') \end{aligned} \quad (3.5)$$

我们又得到了产生和消灭算子的对易关系 (3.13) 式, 说明了前面我对算子 $a(\vec{k})$ 和 $a^\dagger(\vec{k})$ 的解释和术语的应用是正确的。反之, 也容易证明, (3.5) 式成立, 意味着由 (3.4) 式定义的算子 ϕ 和 π 的 (3.2) 式也成立。