高等学校试用教材

数学分析

上册

武汉大学数学系编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数 学 分 析

上 册

武汉大学数学系编

人民教育出版社

20b900

高等学校试用教材

数 学 分 析

上 册

武汉大学数学系编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印刷

*

开本787×1092 $\frac{1}{32}$　印张12 $\frac{1}{2}$　字数300,000

1978年9月第1版　1979年3月湖北第1次印刷

书号 13012·0199　定价0.91元

编者的话

本书是由武汉大学数学系《数学分析》课的讲义改写而成的．原讲义曾试用过多次；在这次改写过程中，我们根据 1977 年全国高等学校理科教材编写会议上制定的《数学分析》编写大纲，对教材内容作了重大的修改和补充．改写的执笔者：1—3 章为熊全淹同志．4—6 章为吴厚心同志，以后各章为路见可同志．另由黄象鼎同志负责整理练习题及其解答．

为了适应加强基础课教学的需要，编写本书时，我们力求贯彻理论联系实际、少而精、由浅入深、便于自学等原则．在大多数章节的适当部位，还安排了一定数量的"思考题"和练习题，希望有助于提高教学效果．但由于我们的理论、业务水平有限，时间仓促，实际上很难达到主观的愿望，书中必定还会有不少的缺点和错误．我们恳切希望使用本书的师生和读者随时提出批评指正，以便有机会时加以改进．

根据《数学分析》编写大纲的要求，本书有些章节是用小号字排印的．这些部分可根据实际情况选用．

本教材由四川大学、上海师大主审，中山大学、南开大学、华中师院也参加了审查工作，使本书质量得到不少的提高，特此致谢．

编　者

1978 年 6 月

目　录

第四章　极限理论基础

第五章　一元函数微积分学续论

第一章　函数与极限

§1　数、变量与函数

1.1　实数系　恩格斯指出:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,……”①,而研究空间形式时也须通过数量来进行,因此他又说:“数学是数量的科学;它从数量这个概念出发.”②在数学分析里,我们主要研究反映事物运动的数量关系. 这样,我们的讨论就从对“数系”(数所构成的系统)的简括说明开始.

在算术中,我们已经熟悉了自然数(即正整数)和分数,以后我们又接触到负整数、负分数. 所有这些数,再把零包括在内,统称为有理数. 我们知道:对任意两个有理数作加、减、乘、除(零作除数在外)运算,结果还是一个有理数;此外,凡有理数写成小数形式时,一定是有穷位小数或循环小数. 反过来,这种小数也一定是有理数.

我们也已熟悉把有理数标记在一根数轴上:取一直线 Ox(图 1-1),指定某方向作为正向(例如通常向右),并在直线上取定一点 O 作为原点,取定一线段 $\overline{OU}$ 作为单位长度,那末任一有理数 r 都可用数轴上的一点 P 来表示,当 r 为正数时,P 在 O 点的右方,且 $\overline{OP}=r$;当 r 为负数时,P 在 O 的左方,且 $\overline{OP}=-r$. 在这种

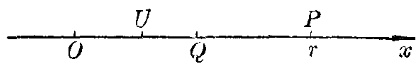

图　1-1

① 见恩格斯著《反杜林论》第 35 页,人民出版社 1970 年 12 月第一版.

② 见恩格斯著《自然辩证法》第 235 页,人民出版社,1971 年,8 月第一版.

表示下，有理数的大小关系表现为数轴 Ox 上点的位置的顺序关系；对于任意不同的有理数，表示较小数的点在左，表示较大数的点在右，十分直观．数轴上表示有理数的点我们就称为有理点．

任何两个不同的有理数 a 与 b 之间必定还有别的有理数，例如 $\frac{a+b}{2}$；因此，也必定有无穷多个有理数存在其间(为什么?)．这样看来，有理点在 Ox 轴上到处都密布着．我们自然要问：在数轴上除掉这些密密麻麻的有理点外，是不是还有别的点？换句话说，在数轴上，除掉全部有理点外，还有没有"空隙"？答案是肯定的：还有．例如，我们如果以 $\overline{OU}$ 为边长，作一正方形，在 Ox 上自 O 向右取 $\overline{OQ}$ 等于这正方形的对角线的长$\sqrt{2}$，则 Q 就不是一个有理点，因为$\sqrt{2}$不是一个有理数．下面我们用反证法来证明这一事实．

假定$\sqrt{2}$是个有理数，于是它一定可写成既约分数的形式，即

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

其中 p, q 是两个没有公约数的正整数．因此，

$$2=\frac{p^2}{q^2} \quad 或 \quad p^2=2q^2$$

由于上式右边是偶数，所以 p 不可能是奇数，因此可设 $p=2r$，这 r 也是一正整数．以此代入上式，得

$$4r^2=2q^2 \quad 或 \quad q^2=2r^2$$

根据同样道理，q 也必是一个偶数．这样一来 p、q 都是偶数了．这和我们上面申明过的它们没有公约数发生矛盾．这一矛盾的产生，说明我们一开始假定$\sqrt{2}$为有理数是错误的．可见$\sqrt{2}$的确不是一个有理数，点 Q 的确不是一个有理点．

数轴上除点 Q 外，还有许许多多点都不是有理点(参看本段练习题)．我们规定，数轴上凡是不代表有理数的点，就叫做无理点；

每一个无理点代表一个无理数. 和有理点一样，位于数轴上原点右侧的无理点代表正无理数，位于原点左侧的无理点代表负无理数. 一个无理数写成小数时，必是一个不循环的无穷位小数. 反之，我们认为任意一个不循环的无穷位小数必代表唯一的无理数(点).

有理数与无理数统称为实数. 两实数的大小次序仍然是根据其代表点在数轴上的位置在右在左来确定.

由于所有实数与数轴上的点之间有一一对应关系，即每个实数恰好对应数轴上一个点，反过来，数轴上每个点恰好对应一个实数，实数与点可以互相代表. 因此，以后我们常常把实数 a 和在数轴上代表它的点不加区别，后者常说成点 a (或 a 点). 代表数轴上一个点的实数又叫做这点的坐标.

实数的代数运算法则和有理数的运算法则一样，我们就不在这里详细说明了.

除实数外，我们知道，还有所谓复数，即形如 $a+bi$ 的数，其中 a, b 为实数，而 $i^2=-1$. 复数是实数的一种重要扩充. 不过在本书中，除非特别声明，我们讲的数都是指实数.

今后我们常常要谈到由若干有限个或无限多个实数组成的总体. 数学上把由某些实数组成的一个总体叫做集合，有时也叫做数集. 例如，由 0, 1 两个数组成一个集合，由所有实数也组成一个集合. 因为数可以代表点，所以数集又常常叫做点集. 组成数集的数或组成点集的点都叫做该集合的元素[①].

一个集合通常用一个大写字母表示，如常说集合 A，集 E 等等. 对于最常用的某些数集，我们设有专门的记号去表示，例如由所有实数组成的实数集常记为 $\boldsymbol{R}$. 又，"x 是集合 A 的元素" 和 "x

---

① 我们约定：数集中元素是互不相等的. 就是说，相等的实数组成集合时，只作一个元素看待，例如由 0, 1, 0 三个数组成的集只有两个元素：0 和 1.

不是集合 A 的元素"这两句话，常常分别记作 $x\in A$ 和 $x\bar{\in}A$. 例如我们可以写

$$0\in \boldsymbol{R},\qquad \sqrt{2}\in \boldsymbol{R},\qquad i\bar{\in}\boldsymbol{R}$$

练　　习

1. 把本段课文中所述的对角线放到数轴上去，使其一个端点落在一有理点 r 上，另一端点落于一点 M 上，问：M 是无理点还是有理点？

2. 证明：满足 $x^2<2$ 的有理数 x 的集合中不存在最大数.

1.2　不等式与绝对值运算　在数学分析中经常要用到不等式. 不等式的运算，读者已比较熟悉. 我们在这里只提出应该注意的几件事：

1. 在含有>(或<)的不等式中，两边同时加或减一个数时，不等式记号方向不变，因而在不等式中，可以自由地"移加作减，移减作加". 例如，已知

$$a+b<c$$

则必

$$a<c-b$$

2. 在含有>(或<)的不等式中，两边同时以一正数相乘或除时，不等式记号方向不变，两边同时以一负数相乘或除时，不等式记号反向. 因此在不等式中，"移乘作除，移除作乘"时，不等式记号的方向必须遵守上述原则. 例如已知 $a<b$，两边同时乘 -1，则应得 $-a>-b$.

3. 注意不等式

$$a<b<c$$

与

$$b>a\quad 或\quad b<c$$

有区别. 前者表示 b 既大于 a，同时又小于 c，即 b 在 a,c 之间；后者表示 b 大于 a 或者是 b 小于 c. 又不等式 $a\leqslant b$ 意味着 $a<b$ 或 $a=b$，即 $a\not>b$. 上面性质 1,2 对于这种不等式也同样成立.

前面已经讲过，一数 a，在数轴上恰有一点 a 相对应. 不论数 a 为正为负，点 a 到原点 O 的距离 $\overline{Oa}$ 常常记作 $|a|$，称为数 a 的绝对值. 换句话说，数 a 的绝对值就是这个数去掉正、负号后的值；零的绝对值为零：$|0|=0$. 因此总有 $|a|\geqslant 0$，并且可以这样写：

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时} \end{cases}$$

还请注意下面二个常用的恒等式：

$$|-a|=|a|, \quad \sqrt{a^2}=|a|$$

在数学分析中，也经常要用到与绝对值有关的一些不等式.

首先注意，

$$|a|<b \quad \text{与} \quad -b<a<b$$

等价（即从前式可以推得后式，从后式又可推得前式）. 这从数轴上看是很清楚的，建议读者自己说明.

其次下面几个性质也必须注意：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，　　(2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$

(3) $|ab|=|a||b|$，　　(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$

先证明性质(1). 当 a,b 的符号相同（包括零）时，等号显然成立；当 a,b 的符号相反时，$a+b$ 的大小会由 $|a|$ 与 $|b|$ 相互抵消一部分，从而不等号成立. 例如

$$|-5-3|=|-5|+|-3|, \quad |-5+3|=|-2|<|-5|+|3|.$$

我们还可以用下法来证明. 由

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|, \quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

相加，就得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

这就是(1).

性质(2)可由性质(1)推得. 因为

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

所以
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

即(2)成立.

性质(3),(4)是明显的. 性质(1),(3)还可以推广为

$$|a_1+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+\cdots+|a_n|,\quad |a_1\cdots a_n|=|a_1|\cdots|a_n|,$$
$$|a^n|=|a|^n$$

其中 n 为任意正整数.

思 考 题

1. $\sqrt[n]{a^n}=|a|$, 对吗?
2. 如果在 $|a|>b$ 中去掉绝对值记号, 应该怎样写?

练 习

1. 求证: (1) $|x+y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$; (2) $|x^2-y^2|\geqslant x^2+y^2-2|x||y|$
2. 解下列不等式:
   (1) $|2x-1|\leqslant3$; (2) $|3x+1|>2$;
   (3) $x^2+x>2$; (4) $|x(x-1)|<0.1$
3. 化简
$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$$
4. 化简(去开方号)
   (1) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$; (2) $\sqrt{a^2-2|ab|+b^2}$
5. 试证: 当 $x>-1$ 时, $(1+x)^n\geqslant1+nx$, 其中 n 是正整数.
6. 假定分数 $\frac{m}{n}$ 是 $\sqrt{2}$ 的一个近似值, 证明 $\frac{m+2n}{m+n}$ 是 $\sqrt{2}$ 的一个更精确的近似值.

1.3 常量与变量 一切事物都处在运动和发展之中. 当我们考察某个自然现象或生产过程时, 常常会遇到许多不同的量, 其中有些在过程进行中都保持一定的数值, 这种量我们叫做常量, 另

外有些量在过程进行中取不同的数值，这种量我们叫做变量.

我们知道，事物的运动是绝对的，而静止是相对的. 因此，说某个量是常量，总是相对于一定的问题或在一定的条件下讲的. 比如飞行中飞机的海拔高度 h 一般是个变量，但如果飞机正作严格的水平飞行，那么这时量 h 就成了一个常量. 还有，如果一个量在所讨论的问题中只有极微小的变化，而这种变化所产生的影响又是微不足道的，我们为了使问题简化，就宁可把它当作常量处理. 由于常量的相对性和变量的绝对性，今后我们把常量当作一种特殊形式的变量来看待. 这样我们就把“不变”统一在“变化”之中.

对于自然界的每个量，我们通常用某个符号(如字母 $x, \alpha, \cdots$ 等)来表示. 由于数学侧重研究的是量的数值表现，抽掉量的其他属性，字母表示的实际上是量的数值，所以变量有时又叫做变数. 一个变量(变数)可想象为数轴上的一个动点；而一个常量(常数)就是一个定点.

一变量能取到的全部数值组成的集合，叫做这个变量的变化范围或变域. 在数学分析里，经常要谈到的变域是这样那样的区间. 假定 a、b 是两个定数，$a<b$. 一切适合不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，叫做一个闭区间，记为 $[a, b]$. 一切适合不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合，叫做一个开区间，记为 (a, b). 仿此不难理解半开区间 $[a, b)$ 以及无限区间 $[a, +\infty)$ 等记号的含义. 各种区间的几何意义是很明白的. 例如，闭区间 $[a, b]$ 代表数轴上点 a 和点 b 之间的一个线段，端点 a, b 包括在内；而半开区间 $[a, b)$ 则是上述线段去掉右端点后的线段. 常量作为变量的特例它的变域就是一个点.

1.4 函数概念

1. 函数 在一个自然现象或生产问题中往往出现多个变量.

各个变量之间也不是彼此孤立的，它们相互联系，相互依赖．我们在数学分析里讨论的，主要是变量之间，而首先是两个变量之间的一种确定的依赖关系，即所谓**函数关系**．下面是函数的定义．

定义 设 x, y 是同一变化过程中的两个变量．如果对于变量 x 在它的变域 D 内所取的每一个值，根据某一规律，变量 y 有一个唯一确定的值相对应，我们就说，变量 y 是变量 x 的一个函数．这时变量 x 称为自变量，y 又称为因变量．自变量的变域 D 称为函数的定义域，因变量取值的范围(即 y 的变域) M 称为函数的值域．

"y 是 x 的函数"这个事实，我们通常用符号记作

$$y=f(x) \qquad (x\in D)$$

注意，在函数记号 $f(x)$ 中，括号前的字母 f 是表示把 y 与 x 联系起来的那个对应规律，也就是函数关系．因此，如果我们同时考虑 x 的几个函数(不同的函数关系)，那末在括号前应分别使用不同的字母．例如我们可以写 $y=f(x)=x+1$，$z=\varphi(x)=x^2$ 等等．

自变量 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的对应值叫做 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值，记作 $f(a)$．

例 1 物体在时刻 $t=0$ 时从高度为 h 处自由落下．设时间 t 时落下的距离为 s，则 s 是 t 的函数：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度(是常数)．区间 $\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$ 就是这个函数的定义域，因为当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时，物体已达地面．对于自变量 t 的每个值 t_0，因变量 s 的值 $s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$．

例 2 某地区的气温 T 是时间 t 的函数 $T=f(t)$．对于 t 的每个值，从气温记录器描出的曲线上可以读出 T 的值(图 1-2)．

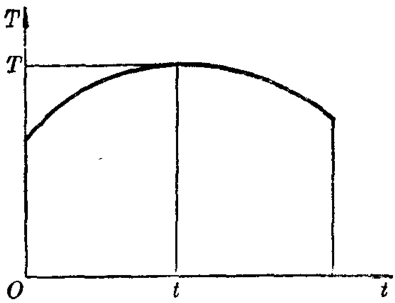

图 1-2

应该指出，在例 2 中，如果是恒温室内的温度 $T=T_0$，它仍然是时间 t 的函数，因为每给出一时间 t 的值，仍恰有一温度 T_0 与它相对应. 一般来说，常量总可以看作某自变量的函数.

通常一个函数都可以用坐标平面上的曲线表示出来. 以自变量的数值为横坐标、因变量的相应值为纵坐标的点所描出的轨迹，称为函数的图形. 这种图形能够醒目地表达出变量之间的函数关系.

在数学分析中，常常用一些数学表达式来表示函数关系. 如上面例 1 中 s 与 t 的函数关系就用数学式子 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来描述的. 但必须注意，函数不一定都能用数学式表达，例如在例 2 中，一般就找不到表示 T 的式子. 有的函数在其定义域的不同部分内可能要由不同的数学表达式来描写. 例如

例 3 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} -1+x^2 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ 1+x^2 & (x>0) \end{cases}$$

是定义在整个数轴上的一个函数，因为每给出一个 x 就有 $f(x)$ 的一个确定的值. 例如，$f(1)=2$，$f(0)=0$，$f(-2)=3$ 等等. 在 x 的不同范围内，这函数分别由三个不同的数学式子来表达.

2. 复合函数 在具体问题中出现的多个变量之间，常常会有一种所谓锁链式的依赖关系，例如变量 z 是变量 y 的函数，而变量 y 又是变量 x 的函数等等.

例如，设坐标平面上有一质点 P，从点 $(r,0)$ 开始沿着圆周

$$x^2+y^2=r^2$$

按角速度 ω 作匀速圆周运动. 设在时刻 t，动径 OP 的旋转角是 θ，质点 P 的横坐标是 x，我们有

$$a)\ x=r\cos\theta,\qquad b)\ \theta=\omega t$$

将 $b)$ 代入 $a)$，我们得到一个新的函数，它表达了质点的横坐标对时间的依赖关系：

$$c)\ x=r\cos\omega t$$

象这样通过变量 θ 作媒介，把函数 $b)$ 代入 $a)$ 得出新函数 $c)$ 的作法，称为**函数的复合**. 一般，由函数 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(t)$ 复合得到的**复合函数**，可写作 $y=f(\varphi(t))$，x 叫做**中间变量**. 这时函数 $y=f(x)$ 的定义域当然要求包含函数 $x=\varphi(t)$ 的值域.

一个本来是由自变量直接给出的函数，有时为了方便也可以适当地引进一些中间变量写成复合函数. 例如函数

$$y=\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

就可以看作是由函数

$$y=\ln t,\qquad t=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

复合得来的，记住这时后一函数的 x 的变域仍是 $(0,1)$ 而不是 $x>0$，$x\neq1$. 用这样的办法，可以把较复杂的函数拆为较简单的函数来研究.

3. 反函数及其图形 设有相互依赖的两个变量 x，y. 在建立它们的函数关系时，可以根据问题的需要选取其中 x 作为自变

量，y 作为因变量，得一函数关系

$$y=f(x) \tag{1}$$

我们假定它的定义域是 D，而值域是 M. 但是，有时根据另一需要，我们希望改用 y 作为自变量，而把 x 看作因变量. 如果对于 y 在 M 中的每个值，由关系式(1)恰可确定出 x 在 D 中的一个值，那末按照前述定义，x 就是 y 的一个函数，记作

$$x=g(y) \quad (y\in M) \tag{2}$$

这时 y 是自变量，x 是因变量，定义域为 M，而值域为 D，函数(2)称为函数(1)的反函数. 把式(2)代入(1)中就得到恒等式

$$y=f(g(y))$$

(1)，(2)两式事实上表达变量 x，y 之间的同一个对应关系，不过自变量与因变量互易罢了.

例 4 指数函数 $y=a^x\,(a>0)$ 的反函数是对数函数 $x=\log_a y$.

注意，有时会出现这种情况，即对于 y 的一个值可以确定出 x 的多个值，以致 x 成为 y 的"多值函数". 这时我们往往把这种函数分成若干个(单值的)反函数来考虑. 例如函数 $y=x^2$ 的反函数可以分为这样的两个单值的分支 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ (图 1-3). 这两个函数的定义域是原来函数 $y=x^2$ 的值域，而它们的值域 $[0,+\infty)$，$(-\infty,0]$ 合并就是原函数的定义域 $(-\infty,\infty)$ 了.

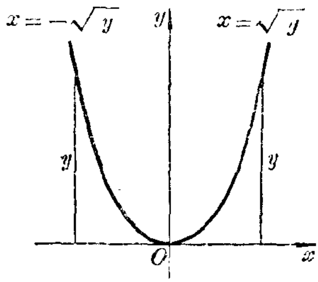

图 1-3

习惯上我们总是把自变量记作 x，因变量记作 y，所以常常把(2)中 x，y 对调，(1)的反函数(2)就可改写为

$$y=g(x) \quad (x\in M) \tag{3}$$

据此上面 $y=a^x$ 的反函数是 $y=\log_a x$，$y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$