中学生文库精选 ● ZHONGXUESHENGWENKU JINGXUAN

从$\sqrt{2}$谈起

CONG $\sqrt{2}$ TANQI

上海教育出版社

中学生文库精选

从 $\sqrt{2}$ 谈起

张景中

上海教育出版社

中学生文库精选　从 $\sqrt{2}$ 谈起
张景中

上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
各地新华书店经销　江苏太仓印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4　字数 83,000
1985 年 8 月第 1 版　1996 年 10 月第 6 次印刷
印数:96,501—98,520 本

ISBN 7-5320-2579-9/G·2514　定价:3.80 元

写在前面

这本书的名字叫《从 $\sqrt{2}$ 谈起》.

但是,读者更希望马上知道,在谈起之后,向哪里谈过去,谈到什么地方为止?

$\sqrt{2}$ 是人们最早认识的无理数之一. 也是中学生最早知道的最简单的无理数. 从 $\sqrt{2}$ 谈起,自然会谈到其它的无理数. 比如:除了 $\sqrt{2}$,还有哪些常见的无理数? 怎样证明一个数是无理数? 无理数都可以用根式表示吗? 是无理数多还是有理数多?

$\sqrt{2}=1.414\cdots$. 它是无穷不循环小数. 怎样把它算得更精确一些呢? 会算 $\sqrt{2}$,会不会算 $\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[5]{2}$ 呢? $\sqrt{2}$ 是方程 $x^2-2=0$ 的根,那末,更高次代数方程的根怎么计算呢? 能不能利用初中代数里学过的知识,计算高次方程的根呢?

除了 $\sqrt{2}$ 之外,还有哪些又古老又常用的无理数呢? 我们将介绍一下和"黄金分割"有关的"无理数三兄弟". 关于它们,有着耐人寻味的故事和游戏.

最后,还将简单地谈谈你所熟悉的 π 和不大熟悉的 e,以及实数系的最基本的性质. 书中用到的知识,大部分是初中里学过的. 读者既可以从头看起,也可以直接看中间的几节。

目　　录

一、从 $\sqrt{2}$ 谈起

（$\sqrt{2}$ 是人类最早发现的无理数之一．早在公元前500年左右，人们就会证明 $\sqrt{2}$ 是无理数了．）

边长为1的正方形，它的对角线的长度是多少？

如果你已经学过勾股定理，马上就能算出它的长度是 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．（图1）

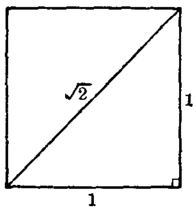

图 1

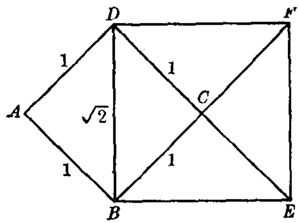

图 2

不用勾股定理，也能算出这个对角线的长．如图2所示，正方形 $ABCD$ 边长为1，面积为1．而正方形 $BEFD$ 的面积是 $ABCD$ 面积的两倍，也就是说，

$$\overline{BD}^2=2,$$

于是，

$$\overline{BD}=\sqrt{2}.$$

显然，若正方形边长为 a，则对角线长为 $\sqrt{2}a$．即对角线长是边长的 $\sqrt{2}$ 倍．

我们知道，记号 $\sqrt{2}$ 代表这样的一个正数 x，它的平方

等于2. 换句话说，$\sqrt{2}$ 是二次方程 $x^2-2=0$ 的正根，通常把它叫做2的算术平方根.

很明显，$\sqrt{2}$ 不是整数. 因为1的平方比2小，2的平方又比2大，所以 $\sqrt{2}$ 应当在1与2之间.

在1与2之间，分数多得很. 要多少，有多少，而且看来是密密麻麻地拥挤在一起. 那么，其中有没有那么一个分数，它自乘之后恰巧等于2呢？看来似乎应当有. 可是，你找几个试试看？你一定找不到. 不是太大，就是太小. 尽管能找到平方很接近2的分数，但要想恰巧等于2，却难了.

但是，在1和2之间的分数既然是无穷多个，那就不可能一个一个地都试一下. 既是不能都试一下，又怎能断定没有一个分数，它的平方等于2呢？

这个问题，早在两千多年前就解决了. 可以用逻辑推理的方法来证明这个

〔命题1〕 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证法一 用反证法证明. 先假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，如果从这一假设出发推出矛盾，便说明这个假设错了，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

若 $\sqrt{2}$ 是有理数. 由于有理数只包含正、负整数、正、负分数和0，而 $\sqrt{2}>0$，故必然有两个正整数 n、m，使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

而且 n 和 m 没有大于1的公约数，即互质.

根据 $\sqrt{2}$ 的定义，有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2, \tag{1}$$

也就是

$$n^2=2m^2. \tag{2}$$

这个式子右端是偶数,故左端的 n^2 也是偶数,因而 n 是偶数,$n=2k$,于是得 $4k^2=2m^2$,即 $2k^2=m^2$. 这推出m是偶数,这说明 n 和m有大于1的公约数,与假设相矛盾.

这个证明还可以说得更简单些:不必假定 n 和m没有大于1的公约数. 直接观察(2)式,它的右端所含2的因数有奇数个,而左端含2的因数又为偶数个,这就有了矛盾.

证法二 仍用反证法证明. 设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$,n 和m都是正整数,而且没有大于1的公约数. 由(2)式

$$n^2=2m^2,$$

在十进制下,整数的平方的个位数字只能是0、1、4、5、6、9中之一,二倍之后只能是0、2、8之一. 所以,(2)式左端的个位数字是0、1、4、5、6、9中之一,而右端末位数字是0、2、8中之一. 即两端的个位都是0,这说明 n 和m有公因子5,于是推出了矛盾.

在数学中,反证法很有用. 尤其是要证明一个数是无理数——不是有理数时,更少不了用反证法. 上面介绍的第一个证法,曾出现在两千多年前希腊几何学家欧几里得(Euclid,公元前300年左右)所写的«几何原本»一书中. 这说明早在两千多年前,人们就知道 $\sqrt{2}$ 不是有理数,而且会用反证法来进行逻辑推理了.

«几何原本»这部名著,是欧几里得总结、整理了当时他所

收集到的资料而写成的．并非都是他一人的研究成果．就拿“$\sqrt{2}$不是有理数”来说，这个事实是比欧几里得更早一些的毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前500年左右)学派的人们发现的．

毕达哥拉斯学派有一个基本观点，叫做“万物皆数”．在他们的心目中，数就只有正整数，而且正整数也就是组成物质的基本粒子——原子．因此他们认为，一切量都可以用整数或整数的比来表示．他们觉得，一条线段就好比一串珍珠，这珍珠就是一个一个的点，不过又小又多罢了．按这种看法，两条线段长度之比，就应当是它们各自包含的小“珍珠”的个数之比，当然应当是可以用整数之比来表示的了．

据说，毕达哥拉斯学派的一个青年人，名叫希勃索斯(Hippasus，公元前五世纪左右)的，第一个发现了正方形的边和对角线长度之比不能用整数之比来表示．用现在的话说，就是$\sqrt{2}$不是有理数．这个发现直接和毕达哥拉斯学派的错误信条“万物皆数”相抵触．使这个学派的许多人大为惶恐和恼怒．据传说，希勃索斯在海船上向学派的其它成员讲述这个发现时，受到了激烈的反对．由于他坚持自己所发现的真理，竟被抛入海中淹死了．

但是，真理是不会被永远淹没的．随着数学的向前发展，无理数终于在人们心目中取得了合法的地位，被广泛使用于科学研究、技术应用和人们的社会生活之中．

顺便提一下，用“$\sqrt{\ }$”来表示平方根，是在十六世纪由解析几何的创始人笛卡儿(Descartes，1596—1650)首先采用的．那时，离$\sqrt{2}$的被发现已有两千年，不少数学家已开始承认象$\sqrt{2}$这类不能用分数表示的数了．

至于把整数和分数叫做"有理"数，据有人考证，倒是由于一开始翻译时的讹误．原来，"有理数"中的"有理"一词，英文是Rational．这个词本来有两个含义，其一是"比"，其二是"合理"．照数学上的原义，分数可以表成两整数之比，把"有理数"叫做"比数"是很确切的．可是，日本学者在十九世纪翻译西方的数学书时，把这个词译成了"有理数"．①日本语言中是用了很多汉字的．后来，在中日文化交流中，中国又从日本引进了"有理数"和"无理数"这两个词，长期应用到现在，没法改，也不必改了．

练 习 题 一

1．若 a、b 是两个有理数，试证明一定有一个有理数 x，满足 $a<x<b$．

2．若 a 是有理数，b 是无理数，问 ab 什么时候是有理数，什么时候是无理数？

3．求证：$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt[3]{2}$ 都不是有理数．

4．若 a、b是两个有理数，试证明一定有一个无理数 y，满足 $a<y<b$．

5．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是不是有理数？为什么？

6．若 a、b 都是无理数，$a+b$ 是否一定是无理数？

7．若 $a+b$，$a-b$ 都是有理数，a 和 b 是否一定是有理数？

8．已知线段 AB 之长为 1，试利用直尺和圆规，画出长度为 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{11}$ 的线段．

---

① 这种说法流传颇广，例如项武义著《微积分大意》中就有这样的看法．但也有人认为"理"字是"ratio"之音译，意即指"比率"．而且考证出"有理数"、"无理数"最早出现于中国，并非由日文转译，可参看《初等数学论丛》(5) (53—55页)（上海教育出版社出版）。

二、庞大的无理数家族

（无理数也是无穷无尽的．它们比起有理数来要多得多．）

除了 $\sqrt{2}$，还有哪些无理数呢？

从 $\sqrt{2}$ 出发，就可以造出无穷多个无理数，如 $1+\sqrt{2}$、$2+\sqrt{2}$、$3+\sqrt{2}$，……，它们都是无理数．

$2\sqrt{2}$、$3\sqrt{2}$、$4\sqrt{2}$、……，也都是无理数．

$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，$3-2\sqrt{2}$，$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$，……，仍是无理数．

我们不必一个一个地去证它们不是有理数，而采取一网打尽的方法来解决问题．

〔命题2〕 如果 r 和 s 是有理数，$r\neq0$，并且 a 是无理数，那么 $ra+s$ 是无理数．

证明 用反证法．若 $ra+s=q$，q 是有理数，则 $q-s$ 是有理数，$\frac{1}{r}(q-s)$ 也是有理数．由 $ra+s=q$ 解出

$$a=\frac{1}{r}(q-s),$$

于是推出 a 是有理数，这和假设相矛盾．

这一来，只要有一个无理数 a，便可以造出无穷无尽、密密麻麻的无理数来．当 $a=\sqrt{2}$ 时，由命题2可知，上面提到的 $1+\sqrt{2}$、$2+\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$、$3\sqrt{2}$、$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$、……都

是无理数.

无理数是不是都要带个 $\sqrt{2}$ 呢？当然不是. 就在人们发现 $\sqrt{2}$ 不是有理数之后不久，希腊数学家塞阿多斯(Theodorus，公元前470年左右)就证明了 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、…、$\sqrt{17}$ 都是无理数. 于是，象 $3+2\sqrt{5}$、$\frac{5}{4}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$……这类的数，也都是无理数.

无理数开平方，象 $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ 是不是无理数呢？是的.

〔命题3〕 若 a 是无理数，k 是正整数，则 $\sqrt[k]{a}$ 不是有理数.

证明 用反证法. 若 $\sqrt[k]{a}=q$ 是有理数，则 $a=q^k$ 是有理数，与假设相矛盾.

用类似于证明命题2和命题3的方法，很容易证明：若 a 是无理数，则 $\frac{1}{a}$ 也是无理数. 进一步可以证明，若 a 是无理数，α、β、γ、δ 是有理数，则当 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ 时，比值 $(\alpha a+\beta)/(\gamma a+\delta)$ 也是无理数. 我们把这些留给读者作为练习.

两个无理数相加，可不一定是无理数了. 例如 $3+\sqrt{2}$ 和 $3-\sqrt{2}$，这两个无理数之和为6，是有理数. 类似地，两无理数的差、积、商，可能是无理数，也可能是有理数. 但是，象 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 这类数，却是无理数. 请看

〔命题4〕 若 a、b 是正的有理数，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 是无理数，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 也是无理数. 如果 $a\neq b$，则 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 也是无理数.

证明 用反证法. 设 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=r$ 是有理数，而且设 $r\neq 0$，则 $\pm\sqrt{b}=r-\sqrt{a}$. 两端平方得

$$b=r^2+a-2r\sqrt{a}$$

解出 $$\sqrt{a}=\frac{r^2+a-b}{2r},$$

于是推出 $\sqrt{a}$ 是有理数，这和假设相矛盾.

现在我们已经知道了，从整数出发，反复进行有限次的+、−、×、÷、开平方这五种运算，可以得到许多无理数. 这样得到的无理数，可以说是最简单的无理数了. 从长度为1的线段出发，使用圆规和直尺，可以画出长度等于这类无理数的线段来，这是因为：

(1) 有了长为 a、b 的两条线段，容易作出长为 $a+b$、$a-b$ 的线段来.（你会作吗？）

(2) 有了长为 a、b 的两条线段，又有了长为1的线段，可以作出长为 ab 的线段来.（提示：如图3，$PQ\perp MN$，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{PO}=a$，$\overline{QO}=b$，$\overline{MO}=1$，则 $\overline{NO}=ab$.）

(3) 在图3中，如果取 $\overline{PO}=1$，$\overline{QO}=b$，$\overline{MO}=a$，那么易知 $\overline{NO}=\frac{b}{a}$.

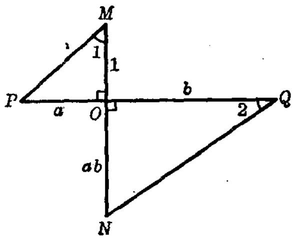

图 3

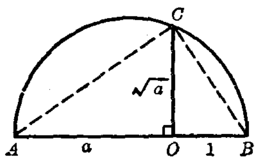

图 4

(4) 有了长为 a 的线段和长为1的线段，可以作出长为 $\sqrt{a}$ 的线段来. 方法是，先作出长为 $a+1$ 的线段 AB，在 AB 上取 O 使 $\overline{AO}=a$，$\overline{BO}=1$. 以 AB 为直径作半圆，再过 O 作

AB 的垂线与半圆交于 C, 因半圆的圆周角 $\angle ACB$ 是直角, 故知 $\triangle AOC \backsim \triangle COB$, 从而推出 $\overline{CO}=\sqrt{a}$.

这样, 从有理数出发, 经过多次开平方、四则运算而得到的无理数, 不妨叫做尺规可作的无理数.

有没有尺规不可作的无理数呢? 有. 事实上, 尺规可作的无理数, 不过是庞大的无理数家族中小小的一支而已.

在人们比较熟悉的尺规不可作的无理数当中, 最古老的大概要算 $\sqrt[3]{2}$ 了. 它和有名的古代三大几何难题中的二倍立方体问题紧密联系在一起. ①

所谓二倍立方体问题, 早在公元前 300 年左右就提出来了. 传说那时某个地方的人遭到瘟疫之灾, 去找巫神想办法. 巫神说, 要把正方体的祭坛的体积加倍, 才能使瘟疫不再流行. 所谓祭坛体积加倍, 就是要做一个新的正方体的祭坛, 使它的体积是原来正方体祭坛的二倍. 那么, 新祭坛的棱长, 就应当是原祭坛棱长的 $\sqrt[3]{2}$ 倍.

于是, 问题归结为: 有了长为 1 的线段, 能不能用直尺、圆规画出长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段?

人们经过两千多年的研究, 证明了这是不可能的. 也就是说, $\sqrt[3]{2}$ 不但是无理数, 而且是尺规不可作的无理数.

一般说来, 整数的高次方根, 如果不是整数, 就一定是无理数. 证明并不难. 我们把它写作命题 5 的推论.

这样, 象 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$, $2-\frac{3}{4}\sqrt[6]{8}$, ……, 又是一大批无

---

① 另两个是三等分任意角问题和化圆为方的问题. 这三个问题到十九世纪才被彻底解决——数学家证明了, 用直尺、圆规是不能完成这三个作图的.

理数. 这些带有高次方根号的无理数，中间有不少是尺规不可作的无理数。

从有理数出发，经过有限次的四则运算和开方运算所得的无理数，我们把它叫做可用根式表示的无理数. 这是更大一些的无理数家族，它包含了尺规可作的无理数小家族.

有没有不能用根式表示的无理数呢？有.

我们学过二次方程的求根公式 若 x 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根，则

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \quad (a\neq 0,\ b^2-4ac\geqslant 0)$$

当 a、b、c 是整数时 x 或者是有理数(当 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是整数时)，或者是可用根式表示的无理数(而且是尺规可作的！).

类似地，三次和四次方程也有用根式表示的求根公式. 如果系数是整数，它们的实根或者是有理数，或者是可用根式表示的无理数.

五次和五次以上的代数方程，就没有一般的求根公式了. 整系数 $n(n\geqslant 5)$ 次代数方程的无理实根，只有一部分是可用根式表示的无理数. 如 $\sqrt[5]{7}$，它是五次方程 $x^5-7=0$ 的根. 哪些代数方程的根是无理数呢？我们有①

〔命题 5〕 若 a_1、a_2、…、a_n 都是整数，则 n 次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0=1) \quad (1)$$

的实根，不是整数，就是无理数.

---

① 判断代数方程的根是不是无理数的命题是很多的. 例如：若 a_0，a_1 及 $a_0+a_1+\cdots+a_n$ 均为奇数，则方程无有理根. 又如，若 $a_0=1$，$a_n=p_1p_2\cdots p_k$，p_1，…，p_k 为不同的质数，则方程也无有理根，还有著名的爱森斯坦法：若质数 p 不能整除 a_n，p 能整除其它 a_i，p^2 不能整除 a_0，则无有理根.

证明 假设方程有一个有理根 x，我们来证明 x 一定是整数。

如果 $x=0$，就不用证了．若 $x\neq0$，可把 x 写成 $\frac{b}{a}$，这里 $a\geqslant1$，a 和 b 都是整数，而且 a 与 b 没有大于 1 的公约数．把 $x=\frac{b}{a}$ 代入原方程(1)，得到

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n+a_1\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)+a_n=0, \qquad (2)$$

两边同乘以 a^{n-1}，再移项，得到

$$\frac{b^n}{a}=-[a_1b^{n-1}+a_2ab^{n-2}+a_3a^2b^{n-3}+\cdots$$
$$+a_{n-1}a^{n-2}b+a_na^{n-1}].$$

这个等式右端是整数，左端的 $\frac{b^n}{a}$ 显然也是整数．这说明 a 能够整除 b^n，所以 a 的每个素因子(就是能整除 a 的素数)都能整除 b．但已设 a 和 b 没有大于 1 的公约数，故只有 $a=1$．这证明了 $x=b$，即方程(1)的有理根都是整数，因而非整数的实根就是无理数．

方程 $x^n-m=0$ 是(1)的特例．当 m 是正整数时，它至少有一个实根 $\sqrt[n]{m}$．根据命题 5，$\sqrt[n]{m}$ 如果不是整数，就一定是无理数．这证明了前面提到的 $\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[5]{7}$、$2-\frac{3}{4}\sqrt[6]{8}$ 这类数都是无理数．

应用命题 5，对有些代数方程，不用求出它的根，就可以断定它的根是无理数．

〔例〕 代数方程 $x^5+x+1=0$ 的实根是无理数吗？

解 当 x 为 0 或正整数时，$x^5+x+1>0$．当 x 为负整数

时，$x^5+x+1<0$. 因此，方程没有整数根. 由命题5，可知它的实根是无理数.

所有整系数代数方程的根，都叫做“代数数”. 对代数数进行四则运算、开各次方，得到的仍是代数数. 以代数数为系数的代数方程，它的根仍是代数数.

有理数是一次整系数方程的根. 所以有理数也叫做一次代数数.

从二次整系数方程的根中，去掉那些一次代数数，剩下来的叫做二次代数数.

用类似的办法，你可以定义三次、四次……的代数数. 从 n 次整系数方程的根中，去掉那些低于 n 次的代数数，剩下的叫做 n 次代数数.

各次实代数数，除了一次的之外，都是无理数. 各次实代数数，都是无穷多的，都是密密麻麻的. 在任意两个不同的有理数之间，都有各次的实代数数.

尺规可作的无理数都是代数数.①

可用根式表示的无理数也都是代数数.

它们不过是全体实代数数中的一小部分. 二次以及二次以上的实代数数，组成更大的无理数家族!

除了高于一次的实代数数，还有别的无理数吗?

有! 无理数家族庞大得很，代数数在其中只占极小极小的一部分. 全体实数中，除掉代数数(包括有理数!)剩下的都叫做“超越数”. 超越数当然是无理数，它们是无理数家族中最大的一族.

说也奇怪. 超越数这么多，人们对它的认识却非常晚. 第

① 它们包括全体二次代数数和部分 2^k 次代数数.