工 程 数 学

线性代数与复变函数

王日爽　张福渊　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 9　千字 187

1984 年 9 月第 1 版　1985 年 3 月第 1 次印刷

印数　1—110,000

书号: 13300·27　　定价: 1.25 元

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　复变函数与拉氏变换

第一篇　线性代数

引　言

线性代数是数学中的一个古老分支，它同微积分有着同样的地位、同等重要．这不仅是因为它在实际中有着许多直接的应用，而且还因为它常被间接地引用，为数学的其它许多分支以及别的学科所借鉴．因此，学好线性代数就能为学好专业打好基础，就能掌握一种非常有用的数学工具．

其实，对线性代数我们并不陌生，在中学数学中就已接触过．例如，解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=c_1 & (1) \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2 & (2) \end{cases}$$

在解析几何中我们知道，方程(1)与(2)在 xOy 坐标平面上各代表一条直线．一般地说，这两条直线有唯一的交点．用二阶行列式可以把交点的坐标写出来，即

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{12} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

其中$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$．但是，在系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$$

的情形下，情况就不那么简单了. 此时，从几何上看，由方程(1)和(2)所代表的两条直线平行或重合. 何时平行？何时重合？这可分别由所给的两个方程的系数及常数项之间的关系来判别：在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

的情形下，两条直线平行，从而无交点，也就是说方程组(1)—(2)无解；在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{c_1}{c_2}$$

的情形下，两条直线重合，说明方程组(1)—(2)有无穷多组解，即重合的直线上的所有点的坐标都是解.

兹再举一例：已知 xOy 坐标平面上有三点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 和 (x_3, y_3)，欲通过这三点作一条对称轴平行于 y 轴的抛物线，问此抛物线的方程如何？

我们知道，这种抛物线方程的一般形式为

$$y=ax^2+bx+c \tag{3}$$

而所要求的抛物线，就是在满足问题的条件下，确定出方程(3)中的系数 a, b 和 c. 为此，将已知的三点代入(3)式，即有

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2+bx_1+c \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c \\ y_3=ax_3^2+bx_3+c \end{cases} \tag{4}$$

现在把 a, b 和 c 视作未知数，由(4)式的改写形式，即三元一次联立方程组

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b + 1\cdot c = y_1 \\ x_2^2 a + x_2 b + 1\cdot c = y_2 \\ x_3^2 a + x_3 b + 1\cdot c = y_3 \end{cases} \tag{5}$$

中解出来(也就是待定系数). 我们引用三阶行列式解方程组(5)的法则，有

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ b &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ c &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned} \tag{6}$$

其中方程组(5)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

我们指出，将不难证明：如果给定的三点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)和(x_3, y_3)不共(直)线，当它们的x坐标互不相等时，即(7)式成立，那么过这三点有唯一的一条抛物线(3)，其系数a, b和c分别由(6)式给出，当它们的x坐标有相等的时，(7)式将不成立，即

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

那就没有过这三点而对称轴平行于y轴的抛物线存在；如果给定的三点共(直)线，且它们的x坐标互不相等时，那么方程组(5)中的第一个未知数$a=0$，此时方程(3)退化成直线方程，从而通过这三点的抛物线也不存在，当给定的三点中有两点以上重合时，则有无数条抛物线合乎要求．从几何上看，这些情况都是十分明显的．

以上介绍的实例都是线性代数中经常遇到的最基本课题．换句话说，解n元一次联立方程组，以下简称为线性方程组，是线性代数中最普遍的内容之一．同时我们强调，学习线性代数必须着重于几何直观背景，这是以后学好比较抽象的线性代数的一条主要途径．

习　　题(引　言)

1．试用行列式解下列线性方程组，并在xOy坐标平面上用直线表示各方程，用点表示方程组的解：

(1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+y=9 \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$

2. 试证:

(1) $$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$$

(2) $$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}$$

并由此说明: 当以上两式右端的值为 0 时, (1)与(2)的几何意义.

第一章 行列式

§1·1 二、三阶行列式的复习

我们已经学过二阶行列式和三阶行列式, 为了能把它们推广到更一般的情形, 首先对它们进行复习是有必要的. 然后我们从中找出规律, 引出 n 阶行列式.

二阶行列式和三阶行列式的一般形式可分别记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

和 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots$称为行列式的元素. 这样的记法有好处,

例如，一看 a_{32} 就知道它处在行列式中的第 3 行、第 2 列的位置．我们应记住：在行列式中横的称为行，竖的称为列，带有两个下标的元素，其第 1 个下标表示所在的行序号，第 2 个下标表示所在的列序号．

我们早已知道，二、三阶行列式定义的是一个数值，它们是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

以及

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

并且不难直接验证以下诸性质(以三阶行列式为例)：

1° 转置行列式其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2° 交换任意两行其值改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3° 在任一行中可以提取公因子，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4° 任两行成比例，其值为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0$$

特别是，当行列式中有两行相同，或有一行为零，则其值为零.

5° 某一行是两项的和，可拆成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6° 一行乘以一数加到另一行，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 1°易见，性质 2°—6°对列也成立.

有了这些性质，我们将能简化行列式的计算.

例 1 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

这可由三阶行列式的定义得知，此行列式称为上三角行列式；还有所谓下三角行列式，它是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1 列、第 2 列分别乘以 1 加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由第 1 列提取公因子 6}} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1 行乘以}(-1)\text{分别加到第 2、3 行}}$$

$$6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 2 行乘以 1 加到第 3 行}} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由例 1}} 6[1\times 1\times(-3)] = -18$$

习　题(1.1)

1. 由三阶行列式的定义，断定下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 由行列式的性质，断定下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ k\cdot d & k\cdot e & k\cdot f \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{21} & a_{31}+a_{22} \end{vmatrix}$

3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$

5. 试证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§1·2 n阶行列式

回顾二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

及三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

我们发现它们有两个特点:

(1) 二阶行列式是 $2! = 2$ 项的代数和, 其中每一项是取自不同行、不同列的两个元素的乘积; 三阶行列式是 $3! = 6$ 项的代数和, 其中每一项是取自不同行、不同列的三个元素的乘积.

(2) 代数和中每一项的符号, 取决于各元素所在的位置, 即行和列的下标. 以三阶行列式为例说明之: 一般项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

这里(i_1, i_2, i_3)表示列的下标, 它是数码(1, 2, 3)的一个全排列. 我们规定以自然数顺序为序, 若在一个全排列(i_1, i_2, i_3)中, 从左至右有数码违反自然顺序的次数, 则称此次数为逆序数. 当逆序数为偶数时, 就称它为偶逆序; 当逆序数为奇数时, 就称它为奇逆序. 例如(3, 1, 2)的逆序数为 2, 是偶逆序,

$(3,2,1)$的逆序数为 3，是奇逆序．于是我们可以说，一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 中列下标的全排列 (i_1, i_2, i_3) 为偶逆序时，此项在代数和中取"+"号，(i_1, i_2, i_3)为奇逆序时，此项在代数和中取"－"号．例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 取"+"号，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 取"－"．

根据以上两点，我们又可把二、三阶行列式分别记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

其中"+"、"－"号的选取，分别取决于全排列(i_1, i_2)和(i_1, i_2, i_3) 的逆序是偶数还是奇数，偶数逆序取"+"号，奇逆序取"－"号．读者不妨与前述的定义印证之．

推而广之，我们可以定义 n 阶行列式如下：

定义 n^2 个数排成 n 行、n 列，以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之，称为 n 阶行列式．它代表一个数，此数是取自上表示式中的不同行、不同行的 n 个元素乘积的代数和，此代数和共有 $n!$ 项，每项的符号取决于一个全排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$的奇、偶逆序，奇者为"－"，偶者为"+"．即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

根据这个定义，我们可以计算几个特殊的行列式:

例 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

特别需要指出的是，对于 n 阶行列式 同样具有 §1.1中所述的性质1°—6°. 并且依此进行 n 阶行列式的计算很方便.

例 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{②+③+④+①} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&4&1&2\\1&3&4&1\end{vmatrix}\xlongequal[④-①]{②-①\ ③-①}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-1&-1\\0&2&-2&-2\\0&1&1&-3\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\2&-2&-2\\1&1&-3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{交换}①、③}-10\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②+(-2)\times①,③+①}-10\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&4\\0&0&-4\end{vmatrix}$$

$$=-10[1\cdot(-4)(-4)]=-160$$

在行列式中，若 $a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称其为对称行列式；若 $a_{ij}=-a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称其为反对称行列式.

例 5 试证奇数阶反对称行列式之值为零.

证 设 n 为奇数，且

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

则由性质 1°，有

$$D=\begin{vmatrix}0&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&\cdots&-a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

再由性质 3°，有