



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



FOCUS
聚焦图书

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 曹显兵
编 著

陈文灯讲数学的七个强调：

强调基础	强调系统
强调题型	强调训练
强调速度	强调方法
强调技巧	

2008版
(经济类)

兴界图书出版公司



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全心
文灯教育集团

考研数学

复习指南 (经济类)

陈文灯 黄先开 编 著
曹显兵

2008版

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯等编著. —13 版. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2004. 1

ISBN 978-7-5062-5213-3

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014885 号

数学复习指南(经济类)

(2008 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

副 主 编: 施明存 殷先军

责任编辑: 安秋明

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 33. 25

字 数: 532 千字

版 次: 2007 年 2 月第 13 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5213-3/O · 334

定价: 47. 80 元

服务热线: 010 - 88861708



文登教育集团是陈文灯教授 1995 年创办的,在“高质量、高水平、高信誉”的办学宗旨下,汇聚了全国顶尖考研辅导名师,分别组成了文登数学冠军团队、文登英语功勋团队、文登政治明星团队。文登教育集团务实求真,不押题胜似押题,连续七年全国文理科数学状元的摇篮,受到社会的广泛赞誉。在 1999 年被授予《先进培训机构》的光荣称号,在众多的考研辅导学校中,文登是唯一获得此光荣称号的考研培训学校;2006 年又被民政局授予《自律与诚信先进单位》。

2008 年考研 - 文登学校 07 年春季提高班课程安排

地点 期别	城建礼堂	城建礼堂	学院路	都市网景 E 座	都市网景 E 座
时间	3 月中旬	3.31 - 5.7 (双休日)	5.4 - 5.7 5.12 - 6.3 (双休日)	4.9 - 5.24 (周 1、2、3、4 晚上)	5.12 - 6.3
班别类型	英语词汇班	数学提高一班	数学提高二班	数学提高三班(录播)	英语提高班(直播)

2008 年考研 - 文登学校 07 年暑期强化班课程安排

地点 期别	北邮科学会堂	城建礼堂	中央财经大学	都市网景 E 座	对外经贸大学
第一期	7.15 - 8.4	7.21 - 8.10	7.21 - 8.10	7.21 - 8.5	7.21 - 8.1
班别类型	上午数学一期一班 下午数学一期二班	上午英语一期一班 下午数学一期四班	上午数学一期三班 下午政治一期二班	上午政治一期一班	上下午数学集中
时间	8.5 - 8.25	8.11 - 8.21	8.6 - 8.21	8.6 - 8.21	8.2 - 8.9
班别类型	上午数学二期一(三)班 下午数学二期二(四)班	上下午数学集中班	下午英语二期二班	上午英语二期一班(面) 下午政治二期一班(录播)	上下午政治集中

2008 年考研 - 文登学校考前串讲考点评班课程安排

地点 期别	城建礼堂	城建礼堂	城建礼堂	城建礼堂	都市网景 E 座
时间	12 月 1、2 日	12 月 15、16 日	12 月 5 日晚	元月中旬	12 月 22、23 日
班别类型	理工类冲刺	英语冲刺一班	理工类模考	英语作文班	英语冲刺二班(录)
时间	12 月 8、9 日	12 月 22、23 日	12 月 12 日晚	元月中旬(北邮)	
班别类型	经济类冲刺	政治冲刺	经济类模考	政治精讲班	

北京文登会员卡：1850 元

会员卡办理办法：1. 两张一寸彩色免冠照片

2. 学生证或身份证

会员服务：1. 可听文登考研公共课所有课程。

2. 漏课、缺课可免费补课。

3. 听完一遍后，想重新温习的话，可申请重复听。

4. 学习过程中遇到问题可优先给予答复。

5. 可提供相关学校的考研及报考信息。

文登考研报名组合优惠多多！咨询报名请登陆：www.wendeng.com.cn

详细咨询：

北京文登 电话：010 - 62155566 62289409

文登分校联系方式：

北京工业大学	电话：67396107	唐山文登	电话：0315 - 2253766
天津文登	电话：022 - 23502358	哈尔滨文登	电话：0451 - 87511440
西安文登	电话：029 - 82337418	杭州文登	电话：0571 - 85664290
南京文登	电话：025 - 83204395	沈阳文登	电话：024 - 23886166
昆明兴华	电话：0871 - 5176205	太原文登	电话：0351 - 6018800
上海文登	电话：021 - 65038405	济南高联	电话：0531 - 86555307
合肥学府	电话：0551 - 2817433	成都文登	电话：028 - 85503737
武汉文登	电话：027 - 87858720	青岛文登	电话：13864864813
石家庄文登	电话：0311 - 86216928	锦州文登	电话：0416 - 2665518
长春文登	电话：0431 - 85912188	大庆文登	电话：13351096285
大连文登	电话：0411 - 84784019	烟台(威海)文登	电话：13235358080
福建文登	电话：0591 - 87892856	贵阳文登	电话：0851 - 6781645
内蒙古文登	电话：0471 - 6291835	新疆文登	电话：0991 - 4361165
徐州文登	电话：0516 - 3885047	衡阳文登	电话：0734 - 6234600
兰州文登	电话：0931 - 7663858	佳木斯文登	电话：0454 - 6888875
郑州文登	电话：0371 - 67580234	燕郊文登	电话：13581921655
南昌文登	电话：0791 - 3802787	青海文登	电话：13119789062
长沙文登	电话：0731 - 8627118	芜湖文登	电话：0553 - 3833359
保定文登	电话：0312 - 7521399	邯郸文登	电话：0310 - 4665928
镇江文登	电话：13775542525	邢台文登	电话：0319 - 3366078
苏州文登	电话：13013802702	衡水文登	电话：0318 - 6018630
秦皇岛文登	电话：0335 - 8079998	桂林文登	电话：0773 - 3979178
重庆文登	电话：023 - 65127581		

前言

数学统考从 1987 年至今经历了 21 个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

(1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

(2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

(3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

(4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

(5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

(6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十二载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈灯

2007 年元月

目 录

第一篇 微积分

篇要 微积分的四种思维定势	1
第一章 函数·极限·连续	6
第1节 函数	6
知识点精讲	6
题型归纳及思路提示	9
第2节 极限及连续性	16
知识点精讲	16
题型归纳及思路提示	21
精选习题一	38
参考答案	40
第二章 导数与微分	41
第1节 导数与微分	41
知识点精讲	41
题型归纳及思路提示	43
第2节 高阶导数	50
知识点精讲	50
题型归纳及思路提示	50
精选习题二	53
参考答案	54
第三章 一元函数积分学	55
第1节 不定积分	55
知识点精讲	55
题型归纳及思路提示	67
精选习题三(1)	77
参考答案	78
第2节 定积分	79
知识点精讲	79
题型归纳及思路提示	86
精选习题三(2)	110
参考答案	111
第3节 反常积分	112

知识点精讲	112
题型归纳及思路提示	113
精选习题三(3)	115
参考答案	115
第四章 微分中值定理	116
知识点精讲	116
题型归纳及思路提示	116
精选习题四	125
参考答案	126
第五章 一元微积分的应用	127
第1节 函数的单调性	127
知识点精讲	127
题型归纳及思路提示	127
第2节 极值与最值	129
知识点精讲	129
题型归纳及思路提示	129
第3节 方程的根	135
题型归纳及思路提示	135
第4节 函数的图形性质	140
知识点精讲	140
题型归纳及思路提示	141
第5节 微元法	145
知识点精讲	145
题型归纳及思路提示	146
精选习题五	149
参考答案	151
第六章 多元函数微分学	152
第1节 二元函数	152
知识点精讲	152
题型归纳及思路提示	152
第2节 二元函数的极限及连续性	153
知识点精讲	153
题型归纳及思路提示	154
第3节 二元函数的偏导数、全导数及全	

微分	155
知识点精讲	155
题型归纳及思路提示	157
第4节 多元函数的极值及应用	166
知识点精讲	166
题型归纳及思路提示	167
精选习题六	171
参考答案	172
第七章 二重积分	173
知识点精讲	173
题型归纳及思路提示	176
精选习题七	187
参考答案	188
第八章 无穷级数*	190
第1节 常数项级数	190
知识点精讲	190
题型归纳及思路提示	192
第2节 函数项级数与幂级数	197
知识点精讲	197
题型归纳及思路提示	200
第3节 无穷级数的求和	205
题型归纳及思路提示	205
精选习题八	212
参考答案	213
第九章 常微分方程及差分方程	214
第1节 常微分方程	214
知识点精讲	214
题型归纳及思路提示	218
第2节 差分方程*	228
知识点精讲	228
题型归纳及思路提示	229
精选习题九	233
参考答案	234
第十章 函数方程与不等式证明	235
精选习题十	244
参考答案	245
第十一章 微积分在经济中的应用	247
知识点精讲	247

题型归纳及思路提示	249
精选习题十一	255
参考答案	255

第二篇 线性代数

篇要 线代的八种思维定势	257
第一章 行列式	263
第1节 排列与逆序	263
知识点精讲	263
题型归纳及思路提示	263
第2节 行列式	264
知识点精讲	264
题型归纳及思路提示	267
精选习题一	277
参考答案	278
第二章 矩阵	279
第1节 矩阵	279
知识点精讲	279
题型归纳及思路提示	281
第2节 逆矩阵	286
知识点精讲	286
题型归纳及思路提示	289
精选习题二	301
参考答案	303
第三章 向量	306
第1节 向量	306
知识点精讲	306
第2节 向量的线性组合、线性表示及线性相关性	307
知识点精讲	307
题型归纳及思路提示	309
第3节 向量组的秩和矩阵的秩	318
知识点精讲	318
题型归纳及思路提示	321
精选习题三	327
参考答案	329
第四章 线性方程组	330
知识点精讲	330

题型归纳及思路提示	334
精选习题四	353
参考答案	355
第五章 特征值和特征向量	357
第1节 矩阵的特征值和特征向量	357
知识点精讲	357
题型归纳及思路提示	359
第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的对角化	365
知识点精讲	365
题型归纳及思路提示	367
精选习题五	377
参考答案	379
第六章 二次型	380
第1节 二次型	380
知识点精讲	380
题型归纳及思路提示	382
第2节 二次型的正定性及正定矩阵	389
知识点精讲	389
题型归纳及思路提示	390
精选习题六	394
参考答案	394

第三篇 概率论与数理统计

篇要 概率统计的九种思维定势

.....	395
第一章 随机事件和概率	403
第1节 随机试验和随机事件	403
知识点精讲	403
题型归纳及思路提示	405
第2节 条件概率与事件的独立性	412
知识点精讲	412
题型归纳及思路提示	414
精选习题一	419
参考答案	420
第二章 随机变量及其分布	421
第1节 一维随机变量与分布函数	421

知识点精讲	421
题型归纳及思路提示	424
第2节 多维随机变量与分布函数	434
知识点精讲	434
题型归纳及思路提示	438
精选习题二	452
参考答案	455
第三章 随机变量的数字特征	458
第1节 一维随机变量的数字特征	458
知识点精讲	458
题型归纳及思路提示	460
第2节 多维随机变量的数字特征	466
知识点精讲	466
题型归纳及思路提示	468
精选习题三	482
参考答案	484
第四章 大数定律和中心极限定理	485
第1节 切比雪夫不等式与大数定律	485
知识点精讲	485
题型归纳及思路提示	486
第2节 中心极限定理	488
知识点精讲	488
题型归纳及思路提示	489
精选习题四	492
参考答案	492
第五章 数理统计的基本概念*	493
第1节 总体、样本和统计量	493
知识点精讲	493
题型归纳及思路提示	494
第2节 抽样分布	496
知识点精讲	496
题型归纳及思路提示	498
精选习题五	500
参考答案	501
第六章 参数估计*	502
第1节 点估计	502
知识点精讲	502
题型归纳及思路提示	504

第一篇 微 积 分

篇要 微积分的四种思维定势

思维定势一:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 在某点处的导数值即 $f'(a) = k$ (a, k 均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把 $f(x)$ 在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设 $f(x)$ 可微, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$,试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$.

【解】对定积分作变量代换 $x^2 - t^2 = u$,则

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du, \quad \text{且} \quad F'(x) = x f(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \quad (\text{以下利用导数 } f'(0) \text{ 的定义}) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 定义,且对定义域中任何 x, y 均满足方程 $f(xy) = f(x)f(y)$,且 $f'(1) = n$ ($n > 0$),求 $f(x)$.

【解】在方程中令 $x = y = 1$ 得 $f(1) = f(1) \cdot f(1)$,由此得 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

(1) 若 $f(1) = 0$,令 $y = 1$,由函数方程得 $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$,即 $f(x) \equiv 0$,但由 $f'(1) = n$ 知不合题意.

(2) 若 $f(1) = 1$,令 $y = 1 + h$,由函数方程得 $f(x + hx) = f(x) \cdot f(1 + h)$,则(设 $h \neq 0$)

$$\frac{f(x + hx) - f(x)}{hx} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$,对上式两边取极限,并由 $f'(1) = n$,得 $f'(x) = n \frac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程,解得 $f(x) = Cx^n$.由条件 $f'(1) = n$,得 $C = 1$,即 $f(x) = x^n, x > 0$.

思维定势二:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.



【例3】 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证

明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理,

于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例4】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{【另证】 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{令 } F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt,$$

$$\text{则 } F'(x) = bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x)$$

$$= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,

$$\text{故 } F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

思维定势三: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$



或 $f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例5】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x,$

则 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

于是 $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

故 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$

即 $\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$

【例6】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0.$ (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

于是 $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

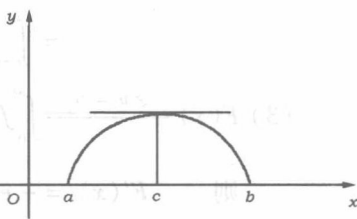
故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$

【例7】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数 (图形上

凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所



示, 而在 (a, c) 上 $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理,

当 $x \in [a, c]$ 时, $f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有



$$f(x) < f'_+(a)(c-a), x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c, b].$$

于是 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c],$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^c \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'_-(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]} [f'_-(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

思维定势四: 对定限或变限积分, 若被积函数或其大部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 8】 求下列函数的导数 (设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y) dx$, 求 $F'(y)$; (2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t) dt$, 求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt$, 求 $F'(x)$; (4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t) dt$, 求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

(2) $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du)$

$$= -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} uf(u) du,$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

(3) $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$

$$\text{则} \quad F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du$, 于是有 $F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$

$$\text{则} \quad F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$$



【例9】* 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u) du = -\int_0^{-x} uf(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} uf(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$

整理, 得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x),$

由 ①, ② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

①

②

第一章 函数 · 极限 · 连续

第 1 节 函数

① 知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

记住下列简单函数的定义域:

$y = \frac{1}{x},$	$D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[n]{x},$	$D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$
$y = \log_a x,$	$D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$
$y = \tan x,$	$D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \cot x,$	$D_f: x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x \text{)},$	$D_f: x \leq 1, \quad [-1, 1]$

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.



其中 x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

3. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为: $x = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为: $y = f^{-1}(x)$. 其定义域为 Z_f .

注 ① $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合; $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

4. 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

$$\textcircled{1} \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

② y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.

$$\textcircled{3} \text{ 狄利克莱 (Dirichlet) 函数 } y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

注 一般而言, 分段函数不是初等函数.

5. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的 只能用一个式子表示 的函数, 称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数: 幂函数: $y = x^\mu (\mu \in R)$; 指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 对数函数: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等; 反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数 (或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征: 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇 (或偶) 函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.