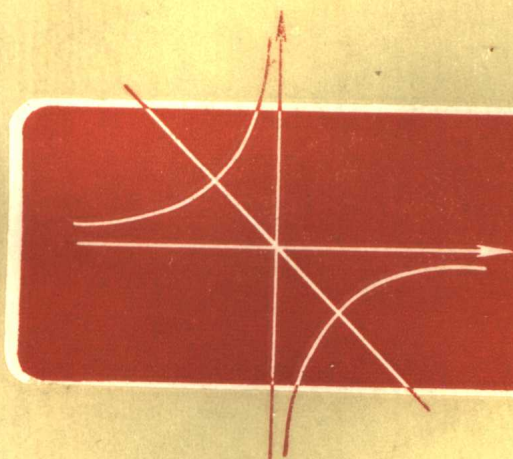


初中代数双基训练

主编 翟连林



中国农业机械出版社

数学自学丛书

初中代数双基训练

主编 程逢森

编者 章士藻 徐 松 袁梅芬

中国农业机械出版社

内 容 简 介

本书是“数学自学丛书”之一。前六章主要介绍实数、代数式、方程和方程组、不等式、指数和对数、一元函数和二元函数，比较全面、系统地归纳和总结了代数的基础知识，并通过各章典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法，在各关键处指出了易犯的错误以及应注意的事项。第七章为综合训练，可以帮助读者沟通各部分代数的知识，提高综合运用代数知识解决问题的能力。为便于自学者检查，最后一章提供了训练题的提示与解答。

本书可供自学青年、青年职工补课学习和复习初中代数使用，亦可供数学教师、师范院校学生参考。

数学自学丛书

初中代数双基训练

主编 翟连林

编者 章士藻 徐 松 袁梅芬

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32开 11.5印张 244千字

1983年6月北京第一版 1983年6月北京第一次印刷

印数：000,001—412,000 定价：1.05元

统一书号：7216 56

前 言

为了使我们的社会主义祖国，尽早地实现四个现代化的宏伟目标，需要培养和造就大批又红又专的各种人才。诚然，通过各级各类学校的教育是培养人才的主要渠道；但是，通过自学也是培养人才的一个不可忽视的重要途径。

为了帮助广大自学青年学好中学数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学数学教材、工农业余中学数学教材，结合青年自学的特点，编写了这套“数学自学丛书”。

这套丛书包括：《初中代数双基训练》、《高中代数双基训练》、《平面几何双基训练》、《立体几何双基训练》、《平面解析几何双基训练》、《平面三角双基训练》、《概率统计与逻辑代数双基训练》和《一元微积分双基训练》共八本。

青年自学时，一般没有教师指导，因此，我们在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题和综合训练题的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及运用数学来分析和解决实际问题的能力。为了便于自学，我们在书末还附有训练题的解答或提示。

这套丛书是由北京、福建、江苏、河北、河南、吉林等省、市的二十多位在大学讲授基础课的教授、讲师，在中学具有多年教学经验的数学教师和教研室的教研员共同编写的。

在这本《初中代数双基训练》的编写过程中，得到了蒋省吾、金成梁、岳荫巍三位老师的支持和帮助，在此表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，编写的时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

1982年7月

目 录

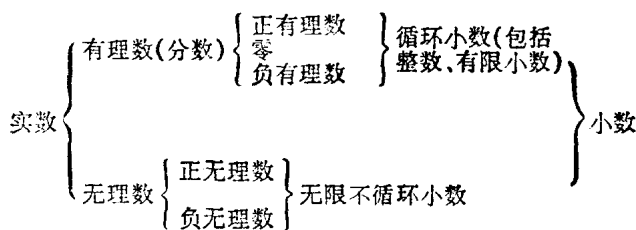
第一章 实数	1
一、有理数集	2
(一) 基础知识提要	2
(二) 基本训练举例	5
(三) 小结	9
(四) 训练题一	9
二、实数集	20
(一) 基础知识提要	20
(二) 基本训练举例	21
(三) 小结	24
(四) 训练题二	24
第二章 代数式	31
一、整式	32
(一) 基础知识提要	32
(二) 基本训练举例	38
(三) 小结	53
(四) 训练题三	54
二、分式	63
(一) 基础知识提要	63
(二) 基本训练举例	66
(三) 小结	74
(四) 训练题四	74
三、根式	79
(一) 基础知识提要	79

(二) 基本训练举例	81
(三) 小结	91
(四) 训练题五	91
第三章 方程和方程组	97
一、方程	99
(一) 基础知识提要	99
(二) 基本训练举例	105
(三) 小结	135
(四) 训练题六	136
二、方程组	144
(一) 基础知识提要	144
(二) 基本训练举例	147
(三) 小结	160
(四) 训练题七	161
三、列方程(组)解应用题	168
(一) 基础知识提要	168
(二) 基本训练举例	172
(三) 小结	184
(四) 训练题八	185
第四章 不等式	189
(一) 基础知识提要	190
(二) 基本训练举例	193
(三) 小结	203
(四) 训练题九	204
第五章 指数和对数	212
(一) 基础知识提要	212
(二) 基本训练举例	215
(三) 小结	224
(四) 训练题十	225

第六章 一元函数和二元函数	233
(一) 基础知识提要	233
(二) 基本训练举例	238
(三) 小结	243
(四) 训练题十一	243
第七章 综合训练	255
(一) 例题	256
(二) 综合训练题	267
第八章 训练题提示与解答	271
训练题一	271
训练题二	275
训练题三	281
训练题四	291
训练题五	296
训练题六	301
训练题七	307
训练题八	314
训练题九	320
训练题十	325
训练题十一	329
综合训练题	336

第一章 实数

由于社会实践的需要，人们对数的认识不断扩大，初中数学里首先引入负数，将数的概念扩充到有理数；接着引入无理数，又将数的概念扩充到实数。它们之间的关系如下：



人们将具有某种共同特征的一类事物的全体叫做集合(简称集)，它是数学中最基本的概念之一。组成集合的每一个个体，叫做集合的元素(简称元)。通常用大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

如果 a 是某集合 A 的一个元素，记作 $a \in A$ ；

如果 b 不是某集合 A 的一个元素，记作 $b \notin A$ 。

以数为元素的集合叫做数集合，以点为元素的集合叫做点集合，中学里主要研究数集合与点集合。

集合通常有三种表示方法：

(1) 列举法 如 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 等；

(2) 描述法 如 $M = \{a : a \text{ 是小于 } 6 \text{ 的自然数}\}$ 或

$M = \{a | a \text{ 是小于 } 6 \text{ 的自然数}\}$ 等;

(3) 区间法 如 $A = [a, b]$ 与 $B = (a, b)$ 等.

不含有任何元素的集合叫做空集, 用 ϕ 表示. 只含有限个元素的集合叫做有限集, 含有无限个元素的集合叫做无限集. 上面的 M 是有限集, A 、 B 都是无限集.

本章主要内容是有理数与实数的概念、性质及其运算, 其重点是有理数的运算, 它是代数中一切运算的基础. 进行有理数的运算, 首先要理解有理数的运算法则, 而理解有理数运算法则的关键又在于弄清楚负数与绝对值的意义. 负数的概念和有理数的运算法则, 特别是“异号两数相加”的法则和乘法中“负负得正”的符号法则是本章的难点.

只有在透彻理解数系的概念, 切实掌握运算法则的基础上, 才能进行各种运算, 培养正确、合理、迅速的运算能力.

一、有理数集

(一) 基础知识提要

1. 有理数

凡能表示为 $\frac{p}{q}$ (p 、 q 互质, p 、 q 为整数, 且 $q \neq 0$) 形式的数的集合, 叫做有理数集.

有理数的一种分类方法是:

$$\text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数 (自然数)} \\ \text{零} \\ \text{负整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

有理数的另一种分类方法是：

$$\text{有理数} \begin{cases} \text{正有理数} \begin{cases} \text{正整数 (自然数)} \\ \text{正分数} \end{cases} \\ \text{零} \\ \text{负有理数} \begin{cases} \text{负整数} \\ \text{负分数} \end{cases} \end{cases}$$

2. 数轴

数轴有三个要素，它是一条规定了原点、正方向和单位长的直线。任何一个有理数都可用数轴上的一点来表示；反之，数轴上一点未必表示有理数。只有实数集才与数轴上的点一一对应。

3. 相反数

只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。如 $2\frac{1}{3}$ 与 $-2\frac{1}{3}$ ， $\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{5}$ ， a 与 $-a$ 等都是互为相反数。零的相反数仍是零。

两个相反数在数轴上表示后，它们的对应点分别在原点两侧，与原点距离相等。

4. 绝对值

一个数的绝对值等于它在数轴上的对应点到原点的距离。

正数与零的绝对值等于其本身，负数的绝对值等于其相反数，

$$\text{即 } |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

5. 有理数的大小比较

数轴上两点，右边点所表示的数较大。

正数与零：正数大于零；

负数与零：负数小于零；

正数与负数：任何正数大于任何负数；

正数与正数：绝对值较大的正数大；

负数与负数：绝对值较小的负数大。

6. 有理数的运算

(1) 加法 同号两数相加，符号不变，将绝对值相加；异号两数相加，取绝对值大者的符号，用较大的绝对值减去较小的绝对值。

两个相反数相加等于零，零与任何数相加仍等于原数。

(2) 减法 减去一个数，等于加上这个数的相反数，在有理数集里，加法与减法可统一成加法。

(3) 乘(除)法 同号两数相乘(除)，取“+”号，将绝对值相乘(除)；异号两数相乘(除)，取“-”号，也将绝对值相乘(除)。

零与任何数相乘等于零，零除以任何一个不等于零的数等于零，任何数除以一个不等于零的数，等于乘以这个数的倒数。

(4) 乘方 求相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方运算的结果叫做幂。如 $\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ 个}} = a^n$ ，其中 a 叫做底数， n 叫做指数， a^n 叫做 a 的 n 次幂或 a 的 n 次乘方。

a^2 、 a^3 又分别叫做“ a 的平方”与“ a 的立方”。一个数的平方数、立方数可查表得到。

正数的任何次幂是正数；负数的偶次幂是正数，奇次幂

是负数；零的任何次幂等于零。

应用10的整数次幂可将一个数写成 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, n 为整数) 的形式, 叫做科学记数。

如 $7070000 = 7.07 \times 10^6$,

$$0.00000000214 = 2.14 \times 10^{-9}.$$

(5) 运算律

① 加法交换律 $a+b=b+a$;

② 加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$;

③ 乘法交换律 $ab=ba$;

④ 乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$;

⑤ 分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

在有理数混合运算中, 应先算乘方(第三级运算), 再算乘、除(第二级运算), 最后算加、减(第一级运算). 同级运算从左到右依次进行. 有括号时, 先括号内, 后括号外; 先小括号(圆括号), 再中括号(方括号), 最后大括号(花括号).

(二) 基本训练举例

例1 在数轴上, 分别表示下列各数及其相反数, 并用不等号分别将这两组数连结起来。

$$-1, \quad -\frac{7}{8}, \quad \frac{22}{7}, \quad -3.14, \quad 0.$$

解: 已知各数的相反数分别是 $1, \frac{7}{8}, -\frac{22}{7}, 3.14,$
 $0.$

$$\therefore -\frac{7}{8} = -0.875, \quad \frac{22}{7} \approx 3.1429,$$

$$\therefore -3.14 < -1 < -\frac{7}{8} < 0 < \frac{22}{7},$$

$$-\frac{22}{7} < 0 < \frac{7}{8} < 1 < 3.14.$$

已知各数在数轴上表示，如图 1-1 所示；已知各数的相反数在数轴上表示，如图 1-2 所示。

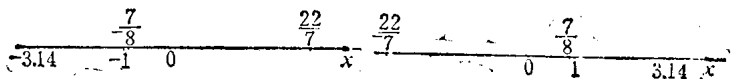


图1-1

图1-2

评注：有理数的大小比较，通常将分数化为小数，或将诸分数化为同分母的分数后再进行比较。

例 2 计算： $(+5) + \left(+1\frac{3}{4}\right) - \left(+5\frac{1}{6}\right) - \left(-3\frac{1}{4}\right)$

$$- \left(+4\frac{5}{12}\right) - \left(-2\frac{1}{3}\right) - \left(-12\frac{1}{6}\right) + (-5).$$

解：原式 $= (+5) + \left(+1\frac{3}{4}\right) + \left(-5\frac{1}{6}\right) + \left(+3\frac{1}{4}\right) +$

$$\left(-4\frac{5}{12}\right) + \left(+2\frac{1}{3}\right) + \left(+12\frac{1}{6}\right) + (-5)$$

$$= 5 + 1\frac{3}{4} - 5\frac{1}{6} + 3\frac{1}{4} - 4\frac{5}{12} + 2\frac{1}{3} +$$

$$12\frac{1}{6} - 5$$

$$= (5-5) + \left(1\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}\right) + \left(12\frac{1}{6} - 5\frac{1}{6}\right)$$

$$+ \left(2\frac{1}{3} - 4\frac{5}{12}\right)$$

$$= 0 + 5 + 7 + 2\frac{1}{3} - 4\frac{5}{12} = 9\frac{11}{12}.$$

例3 计算: $\left(-2\frac{1}{2}\right) + \left[\left(\frac{5}{6} - 0.5\right) + 1\frac{1}{6}\right] - 32\frac{16}{25}$
 $\div (-8 \times 4) + 4.8^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{11}{12}\right)$
 $\times 0.4.$

解: 原式 $= \left(-2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{6} + 1\frac{1}{6}\right) + 32\frac{32}{50} \div 32$
 $+ (5 - 0.2)^2 + (12 + 16 - 18 - 22)$
 $= -3 + 2 + 1\frac{1}{50} + 23.04 - 12 = 11.06.$

评注: 1. 有理数的加减运算, 要注意先将减法统一为加法, 后把“+”号省略不写, 在熟练以后这两步可一并写出;

2. 在运算中, 要注意应用运算性质尽可能简化计算, 如将相反数合并, 将同分母或分母间有倍数关系的分数结合在一起等等.

例4 计算: $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \div \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2\right] \times \left|-9\frac{1}{2}\right| - 0.75^2.$

解: 原式 $= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times (-2) + \frac{1}{2} \div \left[-\frac{1}{8} - \frac{9}{4}\right] \times 9\frac{1}{2}$
 $- \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$= -4 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{19}\right) \times \frac{19}{2} - \frac{9}{16}$$

$$= -4 - 2 - \frac{9}{16} = -6\frac{9}{16}.$$

例5 计算: $\left\{ \left[3\frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \right] \right.$
 $\left. \div \left(\frac{-1}{6}\right) - 20 \right\} \times \left| 5 \div (-6) \right|.$

解: 原式 = $\left\{ \left[\frac{10}{3} \times (-4) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{27}\right) \right] \times (-6) \right.$
 $\left. - 20 \right\} \times \frac{5}{6}$
 $= \left\{ \left[-\frac{40}{3} + \frac{4}{27} \right] \times (-6) - 20 \right\} \times \frac{5}{6}$
 $= \left\{ 80 - \frac{8}{9} - 20 \right\} \times \frac{5}{6} = \left(60 - \frac{8}{9} \right) \times \frac{5}{6}$
 $= 50 - \frac{8}{9} \times \frac{5}{6} = 50 - \frac{20}{27} = 49\frac{7}{27}.$

评注: 1. 在有理数混合运算中, 要注意运算顺序与脱去括号的顺序, 强调同级运算从左到右依次进行, 以及负数的奇次方为负数, 负数的偶次方为正数等.

2. 具体运算中不可疏忽大意, 应防止出现下列错误:

$$\frac{3}{2} \div \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \div \left(-\frac{3}{2}\right) = -1,$$

$$5 + (-5) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = 5 + (-1) \cdot (-3) = 8,$$

$$-0.75^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16} \text{ 等.}$$

(三) 小结

引进负数，建立有理数集，这是初中阶段数的第一次扩充，也是初中代数第一章的教学内容，主要包括有理数的概念、有理数的大小比较和有理数的加、减、乘、除、乘方的运算法则，学好这部分内容的关键，首先是明确负数的意义，它是建立有理数大小比较和运算法则的基础；其次是明确绝对值的意义，它使有理数的四则运算都可转化为算术数的四则运算，不同的只是有理数运算还须确定运算结果的符号。

在此基础上，应理解掌握运算法则，能正确而熟练地求解各类典型的习题，从而为学习实数集以及学习式的运算等知识打下扎实的基础。

(四) 训练题一

- 如何规定正负，并用有理数表示下列事实：
 - 汽车向南行驶 6 公里，向北行驶 8 公里；
 - 珠穆朗玛峰高出海平面 8848.13 米，太平洋最深处低于海平面 11022 米；
 - 昨天水位下降 0.225 米，今天水位上升 0.175 米；
 - 某生产队粮食产量去年减产 6%，今年实行了责任制增产 85%；
 - 某农民卖余粮收入 1250 元，买农药支出 120 元，买化肥支出 315 元；
 - 某工人一月份生产零件不足定额 5 个，二月份达到定额，三月份超过定额 8 个；
- 把下列各数填写在相应的花括号内：
 $+6, -2, 75, -0.4, 0, \left|-\frac{3}{7}\right|, 9.15, -\frac{2}{3}, -\left(-1\frac{4}{5}\right).$