微积分

董洗印　杨静懿　编著

对外贸易教育出版社

(京) 新登字182号

微 积 分

董洗印 杨静懿 编著

责任编辑 赵秉瑛

•

对外贸易教育出版社出版

(北京和平街北口北土城 邮政编码 100029)

新华书店北京发行所发行 · 北京市新源印刷厂印刷

•

开本850×1168 1/32 印张17.125 · 字数 444 千字

1991年12月 第1版 · 1991年12月 第1次印刷

印数1—3000册 · 定价5.20元

ISBN 7—81000—466—2/G·136

前　言

经济应用数学系列教材由微积分、线性代数、概率论等册组成，陆续出版。

这套由对外经济贸易大学国际企业管理系作决定，由数学教研室落实编写的教材是根据经济院校的教学需要，结合本校的教学特点和经验独立写成的。在材料的选择上既考虑到数学基础知识的适宜深度和体系的完整，又注意强调实际应用，特别是在经济中的应用。在教学中教师可以根据不同对象和教学时数的实际，补充或删减某些内容。

微积分是这套教材的第一册。它是针对对外经济贸易大学各系各专业学生对应用数学中微积分部分的需要编写的，体系上是完整的，内容上具有综合性。考虑到近年来入学学生的数学水平较好和有一定的理解能力，因此对于中学已经学过的某些内容尽量精减，如第一章函数中去掉了关于集合的内容，初等函数的讨论也尽量删减，只起一个提纲挈领的复习作用，而把基本的经济函数的几种形式写进去并放在较突出的地位。在第四章、第六章、第八章都重点突出了关于微积分在经济中应用的内容，许多实践都表明这些应用决不仅仅停留在书本上，而是确实能在实际中发挥作用。我们在教学实践中体会到目前人们对经济问题的基本常识越来越普及的形势下，在数学教学中突出数量分析方法在经济中的应用是有益的和可行的，它不需要以其它课程为先行课，这样做反而能提高学生在经济问题的讨论中注重应用数学方法考虑和处理问题的积极性。

本书既可作为高等经济学校的应用数学教材，又可作为经济工作者运用微积分方法解决某些经济问题的参考书。

本书编写的指导思想和大纲由集体讨论确定。第一、二、三、四章由董洗印执笔，第五、六、七、八、九章由杨静懿执笔。

为方便阅读与本书有关的参考资料，书的最后附有主要名词中英对照表。

1990年5月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.er

第一章　函　　数

§1.1　变　　量

从初等数学到高等数学的飞跃是变量进入了数学。在某种意义上说，高等数学就是变量的数学。历史上初等数学走过的路是漫长的，有着辉煌的成果，但它基本停留在常量研究的范围之中。17、18世纪社会生产蓬勃发展，引出许许多多新的数学问题，它们与以往的初等数学在概念和方法上都有了原则的区别，急需创立完全不同于以往的新观念和新方法。著名数学家、哲学家笛卡尔（R.Descartes，1598—1650）首先创立了坐标的概念，进而有了变量的概念。这是数学史上的一个转折点，为牛顿（I.Newton，1642—1727）和莱布尼兹（G.Leibniz，1646—1716）创立微积分提供了条件。

变量是相对于常量说的，当我们考察某个自然现象时，或者考察社会经济活动、生产活动时会与各种数量打交道，例如长度、体积、重量、速度、价格、成本、利润、效率等等，其中一些量在考察过程中是不变的，我们称为常量，而另一些量则在过程中可以取不同的数值，这类量我们称为变量。例如自由落体运动中物体运动的速度每个时刻均不相同，所以速度这个量在这一过程中是变量，而当我们考察火车的运行速度时，往往可以看成是匀速的，每小时运行的里数不变，看成常量。

但是，常量与变量不是固定不变的，总是与考察过程或者研究的需要密切相关的。例如你是一名旅客从北京去上海，可以认为一路上火车的速度是均匀不变的，但假如你是研究火车的技术

专家，就可能关心火车在不同运行阶段的速度变化，如在启动、上坡、下坡、进站等时刻的速度各不相同，它就是变量了。

在研究中我们关心变量在数值上的变化，一般不关心量的单位等属性，所以常量与变量又常常叫做常数与变数。习惯上用x，y，z，t等字母表示变量，用a，b，c…等等表示常量。

一个变量的全部取值的集合叫做变量的变化域或者变域。例如$x=\sin\alpha$可以取-1到$+1$的任何值，故 $1\leqslant x\leqslant 1$，通常用区间表示变量的变化域，如$[-1, 1]$与$-1\leqslant x\leqslant 1$，(a, b)与$a<x<b$，$[a, b)$与$a\leqslant x<b$，$(a, b]$与$a<x\leqslant b$，$(a, +\infty)$与$a<x<+\infty$等等它们的意义相同。

由于变量的取值可以在数轴上用与之一一对应的点表示，所以常常用点表示数，并把点和数等同起来看待。

点的邻域的概念是微积分中的重要概念，这是由于微积分主要研究函数在某点邻域的性质，而不是大范围性质。一个点x_0的邻域是开区间$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$，其中$\varepsilon>0$称为邻域半径，$x_0$称为邻域中心。使用邻域这一概念时，主要是为了研究$x_0$附近点的性质，所以有时邻域又是指不含$x_0$的开区间$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$，即空心邻域，如图1.1表示邻域。

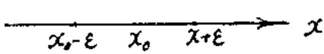

图 1.1

§1.2 函　　数

在实际生活中以及理论研究中，人们所关心的一般不是一个个的孤立的量，而是量与量之间的相互依赖、相互制约规律，即一个量如何随着另一个量的变化而变化或一个量如何随另几个量的变化而变化的规律。例如，产品的生产成本与产量之间是相互

依赖的，产量提高时生产成本一般要随之提高，在生产成本与产量这两者之间存在着一定的依赖关系，又如一个人的消费水平是受商品的价格和工资收入制约的，这之间也是有某种依赖关系存在着。生活中这样的例子是很多的，描述量和量的这种依赖关系的概念就是函数。

函数是微积分的基本概念，微积分的研究对象就是函数。人们在研究函数的变化过程中发明了微积分方法，并且用微积分的理论和方法加深对函数的研究。

为了给出关于函数概念的精确描述，有必要对集合间映射的概念作基本了解。

我们首先给出两个集合间映射的概念，然后利用映射概念给出函数概念。

设A，B是两个非空的集合，如果有一个对应关系 f 存在，使得对于每一个元素$x\in A$，通过f有唯一的元素$y\in B$与之对应，则称 f 是一个从A到B的映射，记做

$$f: A\to B,$$

y称为x在f下的象，x为y的原象，记为

$$y=f(x),$$

集合A称为映射 f 的定义域，集合 $\{f(x)|x\in A\}\subset B$ 称为f 的值域。

如果把元素x_1，x_2，…组成的集合叫作A，把y_1，y_2，……组成的集合叫做B，这两集合的映射关系可以右图示意。

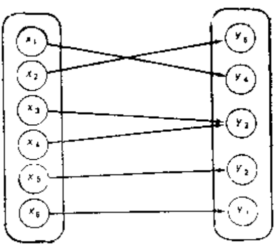

图 1.2

在集合映射的概念中，f 是 A 到 B 的对应关系，对于每个$x\in A$，通过f“映射”到B中去，有唯一的一个$y\in B$与x对应，$y=f(x)$是x的象。全体映象不一定等于B，一般是B的一个子集，

试读结束：需要全本请在线购买： www.er

当等于B时，称 f 为 $A \to B$ 的一个映成映射；如果对于 $x_1, x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 则称 f 是A到B的一一映射。即原象不同象也不同的映射是一一映射，在一一映射下，定义域和值域间的元素是一一对应的。

映射也可以定义它的逆映射。

设 f 是 $A \to B$ 的一一映射，若对任意 $y \in \{f(x) | x \in A\}$，定义映射 $g: g(y)=x$，$y=f(x)$，则称 g 为 f 的逆映射，记做

$$f^{-1}: \{f(x) | x \in A\} \to A。$$

逆映射与映射的定义域与值域正好对调。

把两个集合间的对应扩展到三个集合，可以得到复合映射。

设 $g: A \to B$，$f: B \to C$，若对任意元素 $x \in A$ 有 $\varphi(x)=f(g(x)) \in C$ 与之对应，则称从A到C的映射 φ 为映射 g 和 f 的复合映射，记做

$$\varphi = f \cdot g: A \to C。$$

复合映射也称做映射 f 和 g 的乘积。复合映射的顺序是不能交换的，即映射的乘积一般不满足交换律，$f \cdot g$ 表示先做映射 g 再做映射 f。

从两个映射的复合定义，可以推广到任意有限个映射的复合映对，即任意有限个映射相乘得到的映射。

映射的概念是十分重要的，它给出考察事物对应关系的一种观点和方法，在微积分或在其它数学部门都有意义。

根据映射的既念，就可以定义关于量与量间对应关系的函数的概念。

定义　设X,Y为两个非空的实数集合，如果 f 是从X到Y的一个映射，对每个实数 $x \in X$ 通过映射 f 都有唯一的一个实数 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是X上的一个函数，记做

$$y=f(x),$$

其中 x 称为自变量，y 为函数或因变量，X为函数的定义域，一般函数的定义域可以记做 $D(f)=X$，映射 f 的值域 $\{f(x) | x \in X\}$ 称

为函数的值域。

与映射的一般情形相同，函数的值域一般也应有 $\{f(x) \mid x\in D(f)\}\subset Y$。当等于Y时这个函数就是一个映成映射。

在函数的定义中，主要之点是

1）对应关系f和定义域D(f)，有了这两个东西，实数x 与y的对应就定了；

2）我们定义的函数是单值函数，即对每个$x\in D(f)$有唯一的$y\in Y$与之对应，即不允许对同一个x值，代入$y=f(x)$可以求出两个不同的y值；

3）符号$y=f(x)$既代表对应关系，又代表函数值，即习惯上对 f 与f(x)可不予区分。

由于函数由对应关系和定义域完全确定，因此对应关系和定义域相同的两个函数相同，即若函数f(x)与g(x)定义域为D，对任意$x\in D$都有$f(x)=g(x)$，则称f(x)与g(x)相同，它们的区别只有符号表示上的差异，无本质不同。

例如 在$(-\infty, +\infty)$上，函数$f(x)=\cos x$与函数$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$相同，因为在该区间上恒有$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$。

根据函数的定义，可以从实际生活中举出许多函数的例子：

例1 正方形的面积是边长的函数，设边长为x，则面积S与边长x的对应关系是

$$S=x^2,$$

其中$x\in(0, +\infty)$。

对于每一个给定的边长x都有唯一确定的面积$S=x^2$与之对应，定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$。

例2 一个地区的气温T是时间t的函数$T=f(t)$，其对应规律f可以这样建立：对每个时刻t记录该时刻的气温T，把它们依次在坐标平面上描出并连成一条曲线，则这条气温曲线即建立了t与T的函数关系，记做

$$T=f(t),\qquad t\in(0,\ +\infty)。$$

这里t为自变量，气温T为函数。虽然T与t的函数关系不象例1中边长与面积那样以一个公式表示，只是一个抽象符号，但根据气温曲线所建立的t与T的对应是明确的，存在的，因此函数关系成立。

例3　观察某种商品的销售情况发现，当供给量x发生变化时，该商品的价格p也变动，下面是观察记录

x(个)	0—50	50—100	100—500	500—2000	2000—10000	10000以上
p(元/个)	5.00	4.50	3.50	2.30	1.50	1.40

通过这份记录，给出了x与p的一个确定的对应关系，对于每个$x\in(0,\ +\infty)$，都有唯一确定的价格p与之对应，因此x，p之间存在函数关系：$p=f(x)$，$x\in(0,\ +\infty)$。

上述几个简单的例子说明了函数是大量存在的，同时也说明函数的表示方法可以有三种具体方式，即公式法（如例1，$S=x^2$），图形法（如例2中的气温记录曲线）以及表格法（如例3）。虽然我们常常遇到大量用公式表示的函数，但在实际中又有许多不能以公式表示的函数，它们只是抽象地存在着，很难给出确切的数学形式，这时最好的表示方式就是图形法或表格法。

由于以公式和表格表示的函数都可以通过描图的方法转换为图形，因此，图形法表示函数具有普遍意义，它具有直观性，可以形象地反映两个量的相互依赖过程中的变化特征，所以在微积分的研究中，注重函数图形的作用。

在用公式表示函数时，可能会有几种不同形式：

1）单方程表达式，例如

$$y=ax^2+bx+c,\qquad -\infty<x<+\infty,$$

$$S=\pi r^2,\qquad 0\leqslant r<+\infty,$$

2）参数方程形式，例如

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

表示椭圆，它是x，y间函数关系的一种表示方式。一般参数方程表示函数写作

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad t\in D。$$

3）分段函数

有时一个函数的表达式不能以单一的公式给出，在其定义域的各个子区间上有不同的公式，这就是分段函数，例如

$$f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & x<0, \\ 1 & x=0, \\ 1-x^2 & x>0。 \end{cases}$$

4）隐函数

一般在表示函数时常把函数写在等式左边，右边是只含自变量x的式子，这是显函数，也是日常习惯写法。但不是所有用公式表示的函数都能写出它的显函数形式，这就需要借助于隐式表示函数，即所谓隐函数。

隐函数的一般表达式是一个二元方程

$$F(x, y)=0,$$

由它来决定y是x的函数。

例如 $e^y=xy$,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b>0,$$

等等。

后面我们还会讨论隐函数的一些性质。

§1.3 函数的特性

函数的一些基本特性对于研究函数是十分重要的，这些特性

是函数的几条共有属性，了解并掌握它们对于深入研究函数是很有意义的。尽管不是每个函数每条这种特性都存在，但是具有这些特性的函数是大量的、经常的，应该注意发现并充分加以运用。

1° 奇偶性

对于某些函数，若把自变量x换成它的相反的数$-x$，这时函数值可能不变、可能变号、也可能变成其它什么数。对于函数值变化的前两种情形，我们分别称为偶函数和奇函数。奇函数和偶函数有如下的定义。

设函数$f(x)$的定义域是关于原点对称的区间D，若对于任意$x\in D$，$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$为奇函数。

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点中心对称。例如，$f(x)=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$为偶函数，这是因为$f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$，其图形关于y轴对称，如图1.3。但若把定义域改为$(0, +\infty)$，则$f(x)=x^2$就不是偶函数了。

函数$y=x^3$，$x\in(-\infty, +\infty)$为奇函数，这是由于$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，图形关于原点对称。如图1.4。

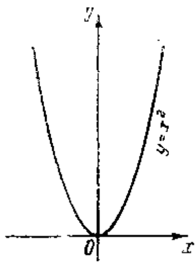

图 1.3

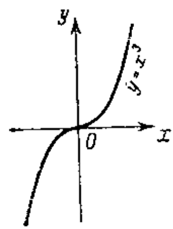

图 1.4

2° 单调性

单调性是函数的重要性质。设$f(x)$在区间D上有定义，对任意x_1，$x_2 \subset D$，$x_1 < x_2$，若有$f(x_1) < f(x_2)$，则称$f(x)$在D上单调上升；若有$f(x_1) > f(x_2)$则称$f(x)$在D上单调下降。函数的这种性质称为单调性。

例如　$f(x)=\sin x$，D：$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，函数$f(x)$在D上单调上升，而它在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上则单调下降。又如$f(x)=x^3$在它的定义域$(-\infty,\ +\infty)$上单调上升。

3° 有界性

设$f(x)$在区间D上有定义，若存在一个常数$M>0$，使得对任意$x \in D$都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称$f(x)$在D上是有界的；否则是无界的。

从图形上看，$f(x)$在D上有界，则$f(x)$的在D上的图形全部处于直线$y=M$和直线$y=-M$之间。例如$f(x)=\sin x, x \in (-\infty, +\infty)$，由于$|\sin x| \leqslant 1$，所以$\sin x$有界，其图形处于直线$y=1$和$y=-1$之间。

与有界函数对立的是无界函数，所谓无界就是找不到$M>0$使$|f(x)| \leqslant M$，即对任意的$M>0$，总有$x_0 \in D$，使

$$|f(x_0)| > M。$$

这就是说，对任何正数M，都可以找到$f(x)$图形上的点$(x_0, f(x_0))$，$x_0 \in D$，跑到直线$y=M$与$y=-M$所夹的区域之外。

例如　$f(x)=\frac{1}{x}$，D：$(0,\ +\infty)$，对任意正数M，取$x_0=\frac{1}{2M}$，显然$x_0 \in D$，而函数值有

$$|f(x_0)| = 2M > M,$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.er