

机械原理习题分类讲解

序 言

《机械原理》是机器制造等各方面未来工程师所必备的知识，从最简单的工程机械到全球方兴未艾的神通广大的机器人，都离不开机械原理，足见本课程的重要性。为学好它，除有一本教材外，再配一本习题解答是非常有益的。几位不同院校的老师相互磋商，通力合作编写了这本《机械原理习题分类讲解》，以备教学之需。

《机械原理》是高等工业院校共同课，虽然各种教材互有不同，但基本内容及习题都是相同的。为适应各校的需要，根据高校，电大教学大纲，综合几种教本的内容，参考了内部发行的习题解答及辅导材料，进行了搜集、归纳、整理、及分类，舍去了各教材中带※部分的有关习题。使本书独具特点，达到广泛通用之目的。

本书着重对读者进行基本概念的训练，促其掌握基本内容和基本方法，培养其分析问题和解决问题的能力，进而使其能顺利地应试。

分类法对学习是很有帮助的，编者从中获益匪浅；认为习题解答对学习无益甚至有害的观点是片面的，关键在于你如何利用它。

本书可供高校学生、研究生、教师及工程技术人员、科研人员参考；可作为电大、夜（业）大、职工及函授大学学员的辅导教材。本书力求深入浅出、阐述详细、形式多样、更便于自学者阅读。

参加本书编写、校对、绘图、出版发行组织工作者有：杜喜旺、旌华、时... 132
君、王江淮、岑智晓、翟淑珍、沃欣刚等同志。 149

由于编者水平有限，加之时间仓促，条件等限制，误漏欠妥之处在所难免，希读者批评指正。 159

..... 169

..... 188

9

编者

1983. 11. 15于长春建院

目 录

第一篇 机构的结构和运动学

第一章	平面机构的结构	3
第二章	平面机构的运动分析	10
第三章	平面连杆机构及其设计	46
第四章	凸轮机构及其设计	59
第五章	齿轮机构及其设计	75
第六章	轮系	110
第七章	其它常用机构	126

第二篇 机构和机器动力学

第八章	平面机构的动态静力分析	132
第九章	运动副和机构中的摩擦	149
第十章	机器的效率	159
第十一章	机器速度波动的调节	169
第十二章	机械的平衡	188

第一篇 机构的结构和运动学

第一章 平面机构的结构

第一节 内容提要及复习思考题

1. “机械原理”是“机构和机器原理”的总称，顾名思义，它是一门究研机构和机器的科学。

2. 所谓机器必须具备以下三个特征：①它们都是一种人为的实物的组合；②它们各部分之间具有确定的相对运动；③在生产过程中它们能代替人类的劳动来完成有用的机械功或转换机械能。总之，机器同时产生运动和能的变化，它的目的是利用或转换机械能。

3. 机器的分类：①产生机械能的机器，通称为原动机。如内燃机、蒸汽机、电动机、水轮机等；②转换机械能的机器，通称为转换机。如发电机、空气压缩机等；③利用机械能的机器，通称为工作机。如各种机床、纺织机、印刷机、起重机等。

4. 机构：机构也是一种人为的实物的组合，其各件之间具有确定的相对运动；与机器相比，机构只产生运动的变化，它的目的是传递或转换运动。如钟表、仪表、计算装置和绘图装置等。通常的机器必包含一个或几个机构。

5. 构件：组成机构的各个相对运动部分称为构件，构件可以是单一的整体，也可以是几个零件组成的刚性结构。构件是运动的单元，而零件是制造（加工）的单元。

机械中支持运动构件的构件称为机架。机架无论固定不动的或者是相对地球运动的，在研究机器各部分的运动时，皆假定机架是静止的。驱动机构的外力所作用的构件称为原动件或主动件，而其余被推动的构件称为从动件。这里所说的件，可以是一根杆，一根轴，一个轮……

6. 构件的自由度：构件在空间能够运动，确定构件位置的独立参变量就是自由度。必须记住，作平面运动的自由构件有三个自由度，而在空间运动的自由构件有六个自由度。

7. 约束（条件）：对构件的自由运动加以限制，使其自由度减少，这种限制就称为约束（条件）。不同的限制方式所减少的自由度数不同，对于构件一个独立运动的限制称为一个约束条件，每加上一个约束条件，构件便失去一个自由度。

8. 运动副及运动副元素：凡两个构件直接接触而又能产生一定型式相对运动的联接称为运动副。而构件之间的接触不外乎点、线或面三种，这里的点、线或面称为运动副元素。

9. 运动副分类：运动副又可分为低副和高副两种。凡为面接触运动副称为低副，一个平面低副具有一个自由度，有两个约束条件。凡为点或线接触的运动副称为高副，一般一个平面高副具有两个自由度，具有一个约束条件。

在实际机器中，运动副的形式是多种多样的，为了究研方便，把运动副按约束条件数的多少来分类，也就是说，约束条件为 1、2、3、4、5 的运动副分别称为 I、II、III、IV、V 类运动副。表 1—1 所列为常用的五类运动副。

平面机构中多为第四和第五类运动副，即转动副和移动副。

10. 机构运动简图：

表 1—1 运动副分类表

在机械原理中，人们只究研机构的运动和动力特性，而不涉及强度问题，因此可以撇开构件的真实的复杂外形及运动副的具体构造，而用简略的符号来表示构件和运动副，进而可以表示整个机器的运动情况，这种图称为机构运动简图。
掌握机构运动简图的绘制是机械原理的任务之一。

11. 机构运动简图常用符号：见表 1—2。

表 1—2

运动副	简图	说明
①转动副		C) 两构件以 O 为轴心转动
②移动副		当转动副的 R 趋于无穷大时，变成移动副
③平面高副		平面高副应当绘出接触面的形状
④具有两个平面低副元素的构件		
⑤具有三个运动副元素的构件		
⑥具有四个运动副元素的构件		三个转动一个移动

第 I 类	
第 II 类	
第 III 类	
第 IV 类	
第 V 类	

用 \rightarrow 表示移动， \curvearrowright 表示转动。

(螺旋副能转动又能移动，但轴移动是由转动所决定的，所以只有一个独立运动，归为第五类运动副中)。

12. 运动链及机构：若干构件以运动副联接而成的系统称为运动链。将运动链的一个构件固定为机架，当它的另一个或几个构件相对于机架作独立运动时，其余构件即随之作确定的预期运动，这种运动链即称为机构。

13. 平面机构的结构公式：运动链相对于机架的自由度称为机构活动度。而计算平面机构活动度的公式称为平面机构结构公式，即：

$$W = 3(k - 1) - 2P_H - P_B = 3n - 2P_H - P_B \quad (1-1)$$

其中： k 为运动链中构件总数；

$n = k - 1$ 为活动构件数；

P_H 为平面低副数；

P_B 为平面高副数。

3

起始构件：机构中具有独立运动或具有确定机构位置的独立参变量的且与机架相联的构件，称为**起始构件**（又称为原动件）。

14. **空间机构的结构公式：**设一空间机构有 n 个活动构件，其中有 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 个1、2、3、4、5类运动副，则空间结构的自由度为：

$$W = 6n - (5P_5 + 4P_4 + 3P_3 + 2P_2 + P_1) \text{ 或 } W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \quad (1-2)$$

15. **机构自由度 W 和原动件数的关系：**在一般机构中，起始构件数目必须等于其自由度。若起始构件数少于其自由度数目，则机构不能得到确定的运动，即机构可以随意运动；若起始构件数多于自由度数目，则机构中会出现一些构件同时接受两种以上不同的运动，也是不可能的，如强迫所有起始构件按给定运动而运动，则机构中最弱的构件必将损坏。一般机构只有一个起始构件，即给定运动规律的构件只有一个。因此一般机构也只能具有一个自由度。总之：

1) $W \leq 0$ 的运动链不能产生相对运动；

2) $W > 0$ 的运动链，当起始构件数小于机构自由度时，构件间的相对运动是无规则的；当起始构件数大于机构自由度时，机构不能运动；只有当起始构件数等于机构自由度时，构件之间才能获得确定的相对运动。即**机构的 $W > 0$ ，且起始构件数与机构自由度数相等是运动链成为机构的必要条件。**

16. **在计算机构自由度时应注意的问题：**

①**复合铰链：**一个铰链联接两个以上的构件称为复合铰链。因此，如果 m 个构件组成一个复合铰链，则该处的转动副数目应为 $m - 1$ 。这是在计算自由度时必须注意的。

②**局部自由度：**在整个机构中存在的某个构件的不影响其它构件运动的自由度称为局部自由度，在计算机构的真实活动度时，必须将局部自由度去掉。

③**虚约束条件：**在整个机构中，有些约束条件对机构所起的限制作用是重复的，在计算机构的活动度时，**那些不起独立限制作用的约束条件称为虚约束条件**，在运用机构结构公式时，应将虚约束条件除去。

平面机构的虚约束条件常出现于下列情况中：

A. 被连接构件上的点的轨迹和机构上联接点的轨迹重合为一时；

B. 两构件所构成的许多移动副的导路互相平行时；或两构件所构成的许多转动副的轴线互相重合时；

C. 当将机构的一对称部分加于另一对称部分时；

在实际结构中，虚约束条件往往不容易判别，所以要特别加以注意。

17. **平面机构的低副代替高副法（高副低代）：**

代替机构和原机构的活动度及瞬时运动（速度和加速度）完全相同。

A. 两回转圆盘在接触点C构成高副时:

已知 AO_1 、 O_1O_2 、 O_2B 均保持不变, 且 $O_1O_2 = r_1 + r_2$

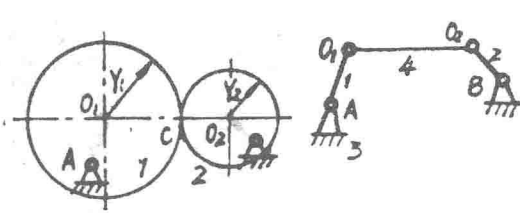


图 1-1

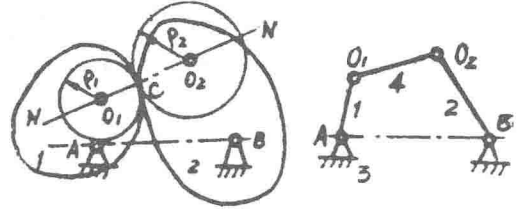


图 1-2

此机构的高副C可以被具有两个低副的构件 O_1O_2 所代替。如图 1-1 所示。

B. 具有任意曲线外形而互相接触的两构件构成高副时: 过这两轮廓接触点C引它们的公法线N-N, 在法线上找两轮廓线接触点C的曲率中心 O_1 和 O_2 , 用 $O_1O_2 = \rho_1 + \rho_2$ 连 O_1 和 O_2 , 得瞬时代替机构 AO_1O_2B , 如图 1-2 所示。

注意: 这种具有任意曲线外形的高副机构, 当机构运动时两轮廓接触点的曲率半径的大小和曲率中心的位置是时时变化的, 所以代替机构的构件 4、1 和 2 的长度也是时时变化的, 所以这种机构的代替机构是瞬时代替机构。

综合所述可知, 高副低代的原则是用一个具有两个转动副的构件来代替一个平面高副, 两个转动副的位置在两轮廓接触点的曲率中心上。

C. 如果两轮廓之一为直线时, 因直线的曲率中心在无穷远处, 所以该转动副变成移动副, 其代替方法如图 1-3, b、c 所示。

D. 如两接触轮廓之一为一点时, 因曲率半径为零, 曲率中心与接触点重合, 其代替法如图 1-4 所示。

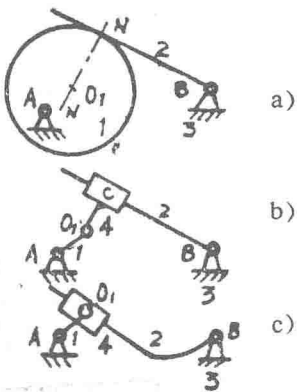


图 1-3

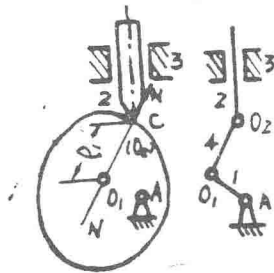


图 1-4

复习思考题

1. 机械原理研究的对象是什么? 主要内容包括哪几方面?
2. 什么是零件、构件、机构和机器? 它们之间的区别和联系是怎样的? 机器分为几类? 它们的区别何在?

3. 什么叫运动副、运动副元素、低副、高副？什么叫机构的自由度及约束(条件)？
4. 什么叫机构运动简图？它有什么用途？图中常用符号都有哪些？如何表示？
5. 什么叫运动链、机架、起始构件、原动件、主动件、从动件？
6. 机构活动度的公式怎么表示？式中各符号的意义如何？机构活动度 W 和原动件数目的关系如何？机构具有确定相对运动的必要条件是什么？
7. 什么是复合铰链、局部自由度、虚约束条件？如何判断它们的存在？
8. 什么叫高副低代？代替的原则是什么？代替前后哪些条件不变？

第二节 本章习题类型及解题方法要点


本章习题类型有：（一）确定机构的活动度数；（二）绘制机构运动简图；（三）高副低代。

解题方法要点：

（一）确定机构的活动度数

探讨机构运动的可能性和确定性是机械原理的重要任务之一。

确定机构活动度数的解题步骤：

- 1) 首先应当用构件及运动副的代表符号绘制出实际机构的运动简图；
- 2) 分清是空间机构还是平面机构，进而选定是应用公式(1—2)还是公式(1—1)；
- 3) 一般以平面机构为主，这时 $W = 3n - 2P_H - P_B$ 。 n 为活动构件数，这就需要首先看清机架，然后数清活动构件数，为了搞的更准确，可以依次标上数码； P_H 为平面低副数，**记住**，凡为面接触的运动副皆为低副，具体地说也就是转动副和移动副，也就是看运动简图。图中有多少个 O 和 ； P_B 为平面高副数，**记住**，凡是点或线接触的运动副皆为高副；
- 4) 将 n 、 P_H 、 P_B 数目代入公式(1—1)中即可求得 W ；
- 5) 根据机构具有确定相对运动的必要条件——机构的活动度数应与起始构件数相等的原则，来校验计算结果的正确与否。从而判明该机构是否具有运动的确定性。
- 6) 确定机构活动度数还应注意以下的三个问题：复合铰链、局部自由度及虚约束条件。复合铰链就是看从一个 O 分出几个独立的构件——图中的黑线条。

（二）绘制机构运动简图

这是机构原理的重要任务之一。要想成为机械设计师，应该能将真实的机器，（无论多么复杂）绘成机构运动简图，从中才可以真正透彻地了解机器运动的原理；反之，也应该能够根据机器制造的需要，设计出复杂的先进的新机器，而第一步是绘制出机器的机构运动简图。另一方面，在本课程中多用图解法进行机构的运动分析和力的分析，所以也要求绘制机构运动简图，若干计算结果都是从图上量取的，所以不但会画机构运动简图，而且必须要绘的准确才行。

绘制机构运动简图的方法和步骤：

绘制机构运动简图的基础是平面几何学，因为真实的机构或机器都是很庞大的，为了把它们表示在有限的纸面上，**一般都要缩小才行**，所以要选择比例尺。初学者对这比例尺往往搞不清楚，只要明确了这个道理就不会弄错了。机械原理中用了好几种比例尺，长度比例尺 μ_l ，速度比例尺 μ_v ，加速度比例尺 μ_a ……。注意：把真实的物理量画

到图上时，除以比例尺 μ ，而将图上物理量变成真实物理量时乘上比例尺 μ 即可。

绘制机运动简图的步骤：1) 选定长度比例尺 μ_l ，将真实长度除以 μ_l ，得各线段画图时的长度；2) 确定机架位置，即在图上适当的部位画一条基准线；3) 选机架某一点为原动构件回转点，继而根据运动图构成的运动链，运用平面几何中有关知识可以画出运动简图。

如果只是确定机构的活动度，可以不必绘制精确的运动简图，只绘示意图即可。

(三) 高副低代

将平面高副用低副代替是机构运动和动力分析所必需的，所以高副低代也是一类很重要的问题。应该能熟练的掌握。

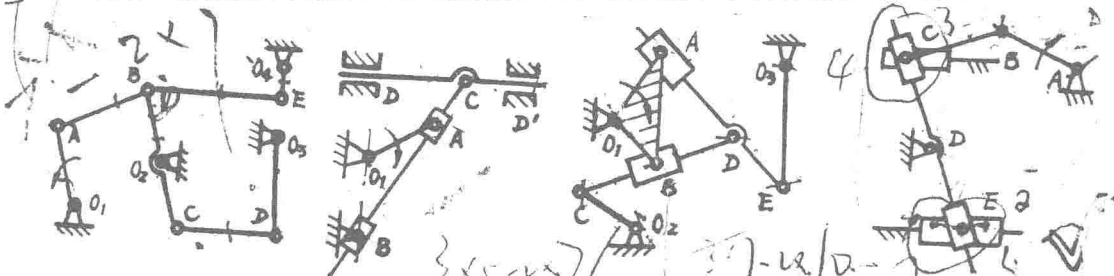
解题的方法及步骤：高副是点或线的接触，涉及到两个构件，根据高副低代的原理及要求，解题时步骤如下：①首先要找到高副的接触点或线；②找出接触涉及到的两构件，找出两构件接触部分的曲率中心——两构件有两个曲率中心，依此两中心为新填上的转动副；③连接两转动副成一个构件——即用**一个具有两个转动副的构件来代替平面高副**。高副低代的类型：

①两回转圆盘在C点接触，如图1-1所示；②具有任意曲线外形而互相接触的两构件如图1-2所示；③一构件为直线时，转动副变成移动副，如图1-3所示；④如两接触轮廓之一为一点时，如图1-4所示；⑤两直齿圆柱齿轮啮合时，如题1-19差动轮系所示的外啮合齿轮：首先要画出通过啮合点的两齿廓，根据齿廓形成的渐开线性质，两齿廓的曲率中心在各自的基圆上，所以两齿轮啮合处的高副低代办法如图所。过啮合点作两基圆的公切线，与两基圆的两交点即为代替构件两转动副所在位置，将转动副成一构件，再与每轮的回转中心相连，即得代替机构如图所示。两齿轮为内啮合时，如题1-23所示的差动轮系，画出相啮合的两齿廓可知，小齿轮为外齿轮，其齿的曲率中心在基圆上，为A点，找法同上；而大齿轮为内齿轮，其齿廓相当于在一个盘中挖去一个外齿轮剩下的部分，其曲率中心在一个假想的基圆上（此圆比外齿轮齿基圆还要小）过内齿廓作此圆切线，交点B即为曲率中心，以A和B为转动副、连成一个构件，即为代替构件、如图所示。

第三节 本章习题分类讲解

(一) 确定机构的活动度数——确定机构活动度数时，画机构运动的示意图即可。

1-1至1-15确定下列机构的活动度数。图中绘有箭头的构件为起始构件。

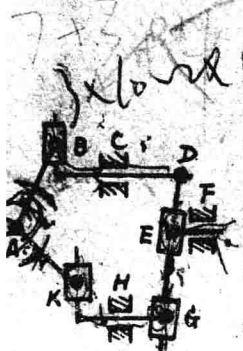


1-1题 康拜因的清除机构

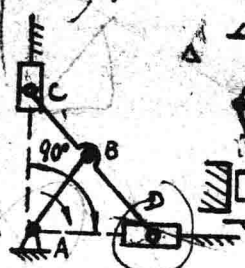
1-2题 736型牛头刨床机构

1-3题 缝纫机的送布机构

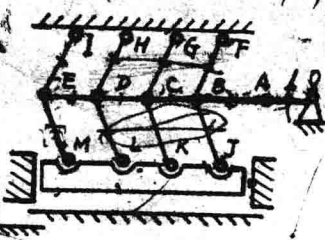
1-4题 压缩机机构



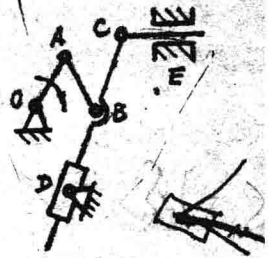
1-5题 总和机构



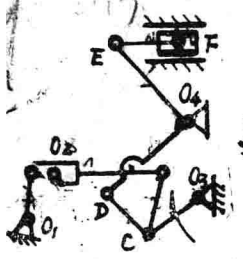
1-6题 椭圆画器机构



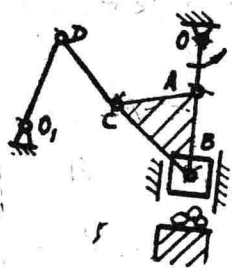
1-7题 压床机构



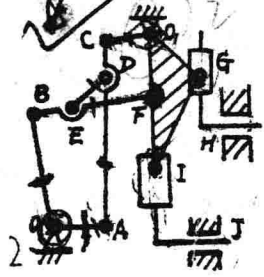
1-8题 导杆机构



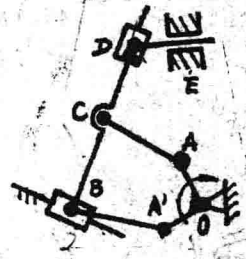
1-9题 换向机构



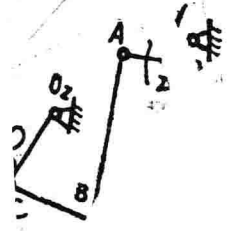
1-10题 粉碎机构



1-11题



1-12题 德里维里机构



Handwritten notes at the top right of the page, including the equation $3 \times 11 - 2 \times 16 = 1$.

$\therefore P_H = 14, P_B = 0, n = 10 \therefore W = 3 \times 10 - 2 \times 14 = 2$ 两个起始构件, 两个活动度, 相符, 有确定运动。

1-6题: C和D约束条件相同, 即有一个虚约束, $\therefore n = 3, P_H = 4, \therefore W = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$

1-7题: 本题是典型的虚约束条件, 对称部分多三个杆应去掉, $\therefore n = 11, P_H = 16, \therefore W = 3 \times 11 - 2 \times 16 = 1$ 起始构件为1, 相符, 有确定的运动。

1-8题: $n = 5, P_H = 7, W = 1$ 。 1-11题: $n = 11, P_H = 16, W = 3 \times 11 - 2 \times 16 = 1$ 。

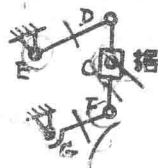
1-9题: $n = 9, P_H = 13, W = 1$ 。 1-12题: $n = 7, P_H = 10, W = 1$ 。

1-10题: $n = 5, P_H = 7, W = 1$ 。 1-13题: $n = 5, P_H = 7, W = 1$ 。

1-14题: $n = 6, P_H = 8, P_B = 1, W = 3 \times 6 - 2 \times 8 - 1 = 1$ 。

1-15题: $n = 9, P_H = 12, W = 3 \times 9 - 2 \times 12 = 3$ 。挖斗有三个自由度, 上、下移动和前后移动及转动, 正好有三个起始构件——即三个液压缸的伸缩移动符, 有确定的运动。

1-16至1-24 确定图 7 的活动度数。并将其中高副化为只有低副的运图中绘有箭头的构件为声




解：1—16题： $n=4, P_H=5, P_B=1, W=3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 = 1$, 高副低代图在右下 (只画低代部分)


1—17题： $n=7, P_H=9, P_B=1$, 还有一个局部自由度, $\therefore W=3 \times 7 - 2 \times 9 - 1 = 2$ (低代图在右上角)

1—18题： $n=8, P_H=11, P_B=1$, 有一局部自由度在T处, $\therefore W=3 \times 8 - 2 \times 11 - 1 = 1$ (低代图在右下角)

1—19题： $n=4, P_H=4, P_B=2, O_1$ 处为两低副, $\therefore W=3 \times 4 - 2 \times 4 - 2 = 2$ (低代图在下部)

1—20题： $n=6, P_H=8$ (7个O, 1个 ) , $P_B=1$, A处有一局部自由度, $W=1$ (低代图在下部)

1—21题： $n=4, P_H=5$ (4个O, 1个 ) , $P_B=1, W=3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 = 1$ (低代图以虚线表示)

1—22题： $n=3, P_H=3$ (2个O, 1个 ) , $P_B=2$, (小滚轮局部自由度不计入) $W=3 \times 3 - 2 \times 3 - 2 = 1$

1—23题： $n=4$, (2和2只算1个), $P_H=4, P_B=2, W=3 \times 4 - 2 \times 4 - 2 = 2$, 这时称为差动轮系; 如将齿轮3固定不动, 则活动件数 $n=3, P_H=3, P_B=2, W=1$, 这时称为行星轮系。其高副低代图画在右边。

1—24题： 画出槽轮低代机构。如图 1—24所示

(二) 绘制机构运动简图： 在此只举两例题。

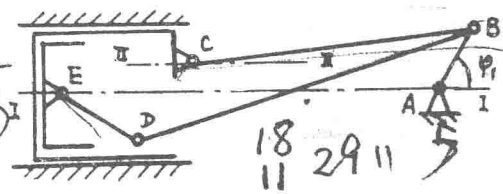
1—25 在图示的蒸汽机机构中, 已知 $l_{AB}=180$ 毫米, $l_{BC}=760$ 毫米, $l_{BD}=950$ 毫米, $l_{CD}=250$ 毫米, $l_{ED}=240$ 毫米, $h=80$ 毫米, $\varphi_1=60^\circ$, 试绘制机构运动简图。

解： 先画一条水平点画线 I—I,

在上任取一点A, 过A画一条 60° 角的射线AB, 取 $AB=9$ mm, 这时可定出比例尺 μ_l :

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0.18 \text{米}}{9 \text{mm}} = 0.02 \text{米/mm.}$$

进而可将机构中各真实长度换算成图中尺寸了。



1—25题

再画一条与 I—I 平行的点画线 II—II, 两者相距 $h=4$ mm, 以 B 为圆心, 以 $BC=38$ mm 为半径划弧交于 II—II 线上 C 点, 再以 C 为圆心, 以 $CD=12.5$ mm 和以 B 为圆心, 以 $BD=47.5$ mm 为半径画两弧相交于 D 点, 即可画出 BCD 三角形; 再以 D 为圆心, 以 $DE=12$ mm 为半径画弧交 I—I 线上 E 点, 连 DE, 即可画出机构运动简图, 如图所示。

注意： 1) 在第二章和第八章中, 各习题几乎都要首先绘制机构简图, 到时再练习。副题说, 作机构运动简图的题很多, 必须能熟练准确地绘制才行。

2) 在本章确定机构的自由度时, 可以不必很精确地绘机构运动简图——这种图法线示意图。

实际机构画出运动简图是一个反映运动本质的, 由具体到抽象的过程, 只有

结合实际机构多加练习，才能熟练掌握绘制机构运动简图的技巧。反之，进行机器设计则是由抽象到具体的过程，只有头脑里装了很多实际的机器才能设计出更多更好的新机器。

1—26 在图示的干草压缩机中，已知 $l_{OA} = 150\text{mm}$ ， $l_{AB} = 600\text{mm}$ ， $l_{BC} = 120\text{mm}$ ， $l_{BD} = 500\text{mm}$ ， $l_{CE} = 600\text{mm}$ ， $X_D = 400\text{mm}$ ， $Y_D = 500\text{mm}$ ， $Y_E = 600\text{mm}$ ， $\varphi = 30^\circ$ 试绘制此机构的运动简图。

解：取 $\mu_l = 0.02\text{米/mm}$ ，则各线段画图长度为： $OA = 7.5\text{mm}$ ， $BD = 25$ ， $AB = 30$ ， $BC = 6$ ， $CE = 30$ ， $X_D = 20$ ， $Y_D = 25$ ， $Y_E = 30$ （均为mm）；图画在2—9题中了，作法如下：任取一点O，由 x_D 、 Y_D 确定D点位置，由 Y_E 确定活塞E的导路；过O画一水平线，作角 $\varphi = 30^\circ$ ，取 $OA = 7.5\text{mm}$ 得A点；以A、D为圆心，AB和DB为半径画弧交B点，取 $BC = 6\text{mm}$ ，得C点，以C为圆心，CE长为半径画弧交活塞E的导路于E点，连各点，即得运动简图。

此类题是很多的，因为凡是用图解法解题时，首先必须画出正确、准确的机构运动简图，在第二章习题解答中，很多题都比较详细地叙述了机构运动简图的作法，请参看吧！在此不再例举了。

（三）高副低代：

在习题类型（三）之中已经叙述得很详细了，也不再例举习题了，把以上类型都很好掌握即可。

本章小结：

本章主要要掌握机构运动简图的绘制、机构活动度的计算及高副低代三种类型题。

解题技巧方面的要求：在绘制机构运动简图时，要很好地掌握各种符号，表1—2所示，要有较好的几何知识和绘图技巧；在进行机构活动度的计算时，要特别注意复合铰链、局部自由度及虚约束条件，要数清活动构件数、转动副数、移动副及高副数，算出的活动度数应与机构的原动件相符，并依此为检验条件；在进行高副低代时，要正确分析接触构件的形式和两者的曲率中心，然后根据原则进行即可。

第二章 平面机构的运动分析

第一节 内容提要及复习思考题

1. **运动分析的目的：**研究机构的运动规律，计算机构的运动参数，为了更好地发现机械的性能及设计出更先进的新型的机械。

2. **运动分析的内容：**在不考虑外力、构件的弹性变形及运动副间隙的前提下，定机构某些点的轨迹；在已知起始构件的运动规律时，确定机构上各点的速度、角速度及角加速度等。

3. **运动分析的方法：**研究平面运动，分析的方法有三种，即图解法、解法。我们只研究图解法，而图解法又可分为速度瞬心法、相对运动法和线

4. 速度瞬心：两个刚体做平面相对运动时，该两刚体上相对速度为零的重合点称为瞬心(又称为速度瞬度心)。如果这两刚体都是运动的，则其瞬心称为相对速度瞬心；如果两刚体之一是静止的，则其瞬心便称为绝对速度瞬心。因此瞬心的定义又可以概括为：瞬心是相对运动两刚体上瞬时相对速度为零的重合点，也就是具有同一的瞬时绝对速度的重合点。

5. 机构瞬心的数目：如果一个机构共有 n 个构件，它的瞬心数目为：

$$K = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2-1)$$

6. 瞬心的求法：

当两刚体的相对运动为已知时，其瞬心的位置便可以根据瞬心的定义求出。

1) 在图 2-1 a 中，假设已知重合点 A_2 和 A_1 及 B_2 和 B_1 的相对速度 $V_{A_2A_1}$ 和 $V_{B_2B_1}$ 的方向时，则该两速度向量的垂线的交点便是构件 1 和构件 2 的瞬心 P_{12} 。

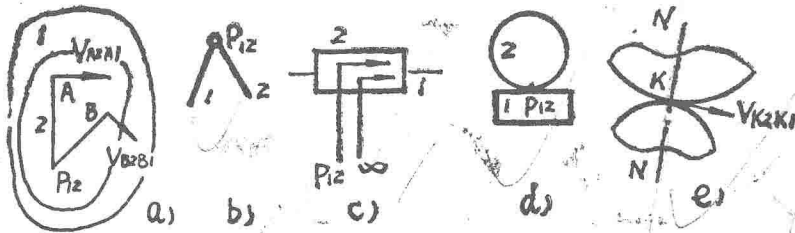


图 2-1

2) 在图 2-1 b 中，当两构件组成转动副时，其一构件对于另一构件是绕转动副的中心转动，所以该转动副的中心便是该两构件的瞬心 P_{12} 。

3) 在图 2-1 c 中，当两构件组成移动副时，由于它们的所有重合点的相对速度方向都平行于移动的方向，所以其瞬心是位于移动的垂直方向的无穷远处。

4) 在图 2-1 d 中，当两构件组成纯滚动的高副时，其接触点的相对速度为零，所以接触点就是其瞬心 P_{12} 。

5) 在图 2-1 e 中，当两构件组成滑动兼滚动的高副时，由于接触点的相对速度不为零而其方向系沿切线方向，因此，其瞬心应位于过接触点的公法线上，不过因为滚动和滑动的数值尚不知，所以还不能确定它是法线上的哪一点。

6) 当求机构的互相不直接联接各构件的瞬心时，用上述方法往往不易求得，可用三心定理来求。三心定理：作平面运动的三个构件共有三个瞬心，它们位于同一直线上。

7. 用瞬心法求简单机构构件的速度比：

图 2-2 所示为齿轮机构或摆动从动杆凸轮机构，它们是一种滑动兼滚动接触的高副机构， C 为接触点，构件 2 为原动件，构件 2、3 的相对速度瞬心可知在 P_{32} 点(公法线 NN 与 AB 连线的交点上)，则：

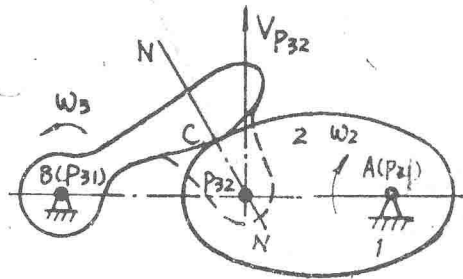


图 2-2

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P32} &= \omega_2 l_{P21P32} = \omega_3 l_{P31P32} \\ \text{故 } \frac{\omega_2}{\omega_3} &= \frac{l_{P31P32}}{l_{P21P32}} = \frac{P_{31}P_{32}}{P_{21}P_{32}} \end{aligned} \quad (2-2)$$

8. 瞬心法的优缺点:

优点: 可以很方便地求简单机构的速度。

缺点: 当构件数目较多时, 其瞬心数目也很多, 所以求解时非常繁复, 又不能求机构的加速度。

所以求复杂机构的速度、加速度等必须用相对运动法。

9. 相对运动法: 相对运动法是一种图解法, 所以又称为相对运动图解法。

其原理是根据相对运动的向量方程式(速度向量、加速度向量等)用一定的比例尺画出向量多边形来求所需的速度、加速度等参数。此法概念清楚, 精度足够。相对运动图解法是本课程很重要的一部分, 为此我们详细的叙述, 从理论力学的基本原理开始。

A. 绕定点转动构件的速度和加速度:

如图 2-3 所示, 构件 AB 绕定点 A 作匀速转动, 已知角速度 ω 、角加速度 ϵ , 构件长 l_{AB} 。

这时 A 点相当于绝对瞬心, 则 B 点(当然构件上的任意一点都可)的速度和加速度可以表示为: $V_B = l_{AB} \omega$, 与 ω 同向且 $\perp AB$, 即大小和方向均可求出。向心加速度从 B 指向 A, 以后均表示为从 B \rightarrow A, 大小为 $a_{BA}^n = l_{AB} \omega^2 = v_{BA}^2 / l_{AB}$; 切向加速度为 $a_{BA}^t = l_{AB} \epsilon$, 与 ϵ 同向且 $\perp AB$, 即两种加速度的大小和方向均为已知。B 点总的加速度, 可以用向量合成的办法求出, 即 $\vec{a}_B = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$, 其数值为 $a_B = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^t)^2}$, 方向为四边形对角线方向, 即总加速度(又称合成加速度)的大小和方向也是可求的。

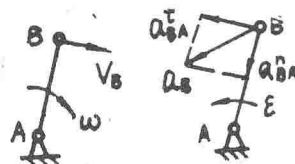


图 2-3

B: 构件作复杂平面运动:

如图 2-4 所示, 这时即相当于定点转动的构件, 其中定点 A 不是定点, 而作平行运动, 这时 A 点称为相对运动瞬心了, AB 构件除了平行移动外, 还绕 A 点转动, 这时构件上的任意一点都作复杂平面运动。

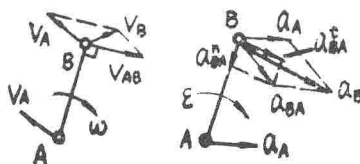


图 2-4

$$\text{速度向量方程为 } \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}$$

$$\text{加速度向量方程为 } \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

依向量方程按一定比例尺画出速度和加速度多边形, 如图所示。其中 \vec{V}_A, ω 已知, $\vec{V}_B = l_{AB} \omega$ 大小方向也可知, 即可求出 \vec{V}_{AB} 的大小和方向; $\vec{a}_A, \epsilon, \omega$ 已知, $\vec{a}_{BA}^n = l_{AB} \cdot \omega^2$ 从 B \rightarrow A, $\vec{a}_{BA}^t = l_{AB} \cdot \epsilon$ 与 ϵ 同向且 $\perp AB$, 两者大小方向均已知, 可求出 \vec{a}_{BA} 和 \vec{a}_B 。

C. 一个绕定点A转动的构件上连同一个与其组成移动副的构件：（后边详述）

以上三种运动形式就是相对运动图解法的基础，乃是理论力学中的内容。下面分三种情况作机构的运动分析。

10. 没有哥氏加速度的构件运动情况：

(一) 速度多边形：

A. 速度多边形的概念：

已知一作平面复杂运动的构件 S、P 为其瞬时转动中心， ω 为它绕 P 点转动的角速度。

牵连运动为平行移动，P 点为牵连点——这时取 P 点的牵连运动速度为零，即相当于图 2—3 中的 A 点了。

S 构件上的 B、C、D 等点的速度可求出： $v_B = l_{PB} \cdot \omega \perp PB$ ， $v_C = l_{PC} \cdot \omega \perp PC$ ， $v_D = l_{PD} \cdot \omega \perp PD$ ，大小方向都可知。

此即相当于绕定点转动的情形。

同一构件上各点间的速度有什么关系呢？根据作复杂运动构件的分析，显然： $\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}$ ， $\overline{v_D} = \overline{v_B} + \overline{v_{DB}}$ ，而 $\overline{v_{CB}}$ 和 $\overline{v_{DB}}$ 则为相对速度。依此我们可以画出表示同一构件上各点间速度相互关系的多边形，称为速度多边形。

B. 速度多边形的作法：

任取一点 P（称为极点）作， $\begin{cases} pb \perp PB \\ pc \perp PC \\ pd \perp PD \end{cases}$ 代表 $\begin{cases} v_B = \omega l_{PB} \\ v_C = \omega l_{PC} \text{ 其长度为} \\ v_D = \omega l_{PD} \end{cases}$ $\begin{cases} pb = v_B / \mu_v \\ pc = v_C / \mu_v \\ pd = v_D / \mu_v \end{cases}$

得三点 P、c、d，

联 P、c、d，即得速度多边形。其中 μ_v 称为速度比例尺，单位为 $\frac{\text{米}}{\text{秒}} / \text{毫米}$ 。

检查速度多边形正确与否，只要看 $pc \perp BC$ 、 $pd \perp BD$ 、 $cd \perp CD$ 与否。

C. 求各点速度：注意！此速度多边形表示的是同一构件上各点间速度的相互关系，这时已知 v_B 、 v_C 、 v_D ，可以求任意一点的绝对速度和两点的相对速度。

$\therefore \frac{pb}{PB} = \frac{pc}{PC}$ $\angle bpc = \angle BPC = \varphi$ (两边夹一角) $\therefore \triangle pbc \sim \triangle PBC \therefore bc \perp BC$

$\frac{bc}{BC} = \frac{pb}{PB} \therefore bc \cdot \mu_v = BC \cdot \frac{pb}{PB} \cdot \mu_v = l_{BC} (v_B / l_{PB}) = l_{BC} \cdot \omega$ 同理 $\triangle bcd \sim \triangle BCD$

由 $\triangle pbc$ 得： $\overline{pc} = \overline{pb} + \overline{bc}$ 即 $\overline{v_C} = \overline{v_B} + (\overline{bc}) \mu_v$ 由上述 $\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}$

$\therefore v_{CB} = (bc) \mu_v = l_{BC} \cdot \omega$ 同理 $v_{DC} = (cd) \mu_v = l_{CD} \cdot \omega$ 及 $v_{DB} = (bd) \mu_v = l_{BD} \cdot \omega$

也就是说线段 bc 、 cd 、 bd 就代表速度 v_{CB} 、 v_{DC} 、 v_{DB} ，由此可以得到速度多边形特性。

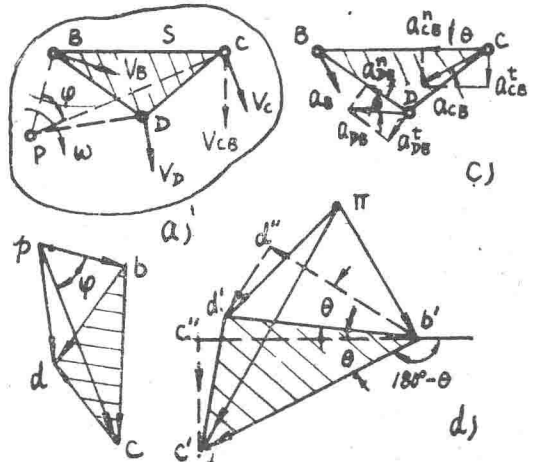


图 2—5

(二) 速度多边形的特性:

a) pb、pc、pd……代表同名点B、C、D点的绝对速度,从p指向该点;

b) 在速度多边形中,连接其它任意两点的向量便代表该两点间的相对速度,其指向与速度的角标相反,即 \overline{bc} 、 \overline{bd} 、 \overline{cd} 代表 $\overline{V_{CB}}$ 、 $\overline{V_{DB}}$ 、 $\overline{V_{DC}}$,而不是 $\overline{V_{BC}}$ 、 $\overline{V_{BD}}$ 、 $\overline{V_{CD}}$;

c) p称为极点,速度为零,即为绝对速度瞬心;

d) **速度影像**: $\triangle bcd$ 称为 $\triangle BCD$ 的速度影像,沿 ω 方向转 90° 。b、c、d与B、C、D顺序相同,皆顺时针的次序;

当已知一构件(注意!这是同一构件)上两点的速度时,便可利用速度影像原理求其它任一点的速度。必须强调指出,速度影像的相似原理只能应用于同一构件的各点,而不能应用于不同构件。

e) 从已知速度的大小和方向的基点开始,比如 $\overline{V_B}$ 为已知,包括大小和方向两个参数,又每个向量方程只能解两个未知参数。如 $\overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}}$ 即为一个向量方程,所以:

① 如果已知 ω ,则 $\overline{V_{CB}} = \omega l_{CB} \perp BC$ 与 ω 一致,即为已知量,从方程 $\overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}}$ 可定 V_C 的大小和方向;即可求出 $\overline{V_C}$ 。

② 如果不知 ω ,而知 $\overline{V_C}$ 的方向,可作 $pb \rightarrow \overline{V_B}$,再作 $pc \rightarrow \overline{V_C}$, $bc \rightarrow \overline{V_{BC}}$ (\rightarrow 代表之意)又 $\omega = \overline{V_{CB}} / l_{CB}$ 与 $\overline{V_{CB}}$ 一致,可定 ω 的方向和大小,即可求出 V_C 的大小。

(三) 加速度多边形:

A. 加速度多边形的概念:

已知构件S的 $\overline{a_B}$ 、 ω 、 ε 及速度多边形(即已知构件S各点的速度),则C点的绝对加速度 $\overline{a_C}$ 等于: $\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}$

其中 $\overline{a_{CB}^n} = l_{CB} \omega^2 = V_{CB}^2 / l_{CB}$ 从C \rightarrow B,称为法向加速度;

$\overline{a_{CB}^t} = l_{CB} \cdot \varepsilon \perp CB$ 且与 ε 方向一致,称为切向加速度;

ω 和 ε 按定义应当是相对角速度和相对角加速度,但因牵连运动是平动,所以牵连角速度和角加速度为零,所以 ω 、 ε 为该构件的绝对角速度和绝对角加速度。

总的相对加速度 $\overline{a_{CB}}$ 的大小为: $a_{CB} = \sqrt{(a_{CB}^n)^2 + (a_{CB}^t)^2} = l_{CB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$

设 θ 为 $\overline{a_{CB}^n}$ 和 $\overline{a_{CB}^t}$ 之间的夹角,则: $\theta = \arctg(a_{CB}^t / a_{CB}^n) = \arctg(|\varepsilon| / \omega^2)$

B. 加速度多边形的作法:

$\overline{\pi b'} \parallel \overline{a_B}$ $\overline{a_B}$ $\pi b' = a_B / \mu_a$ 单位均为毫米,得

任取一点 π 作向量 $\overline{b'c''} \parallel CB$ 各代表 $\overline{a_{CB}^n}$ 其长度 $b'c'' = a_{CB}^n / \mu_a$ b' 、 c'' 、 c' 三点,

$\overline{c''c'} \perp CB$, $\overline{a_{CB}^t}$ $c''c' = a_{CB}^t / \mu_a$ 连 $\pi c'$ 、 $b'c'$

同理,对于D点有 $\overline{a_D} = \overline{a_B} + \overline{a_{DB}} = \overline{a_B} + \overline{a_{DB}^n} + \overline{a_{DB}^t}$,且 $a_{DB} = l_{DB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$,

作 $\overline{b'd''} \parallel BD$ 、 $\overline{d''d'} \perp BD$,得 b' 、 d'' 、 d' 三点,连 $b'd'$ 及 $\pi d'$ 即得加速度多边形。