黄冈密卷研发中心创新成果

培优

初中

第一次修订

培优新课堂

总主编 周泽刚

九年级数学

辽宁教育出版社

黄冈密卷研发中心创新成果

培优新课堂

新课标通用版

总 策 划：李开胜

总 主 编：周泽刚

副 主 编：徐　磊

本册编写：田常龙
熊　举
吴俊华
田兰芳

数学

九年级

辽宁教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

培优新课堂. 九年级数学/周泽刚主编;田常龙等编写. —沈阳:辽宁教育出版社,2008.7
ISBN 978-7-5382-8161-3

Ⅰ. 培… Ⅱ. ①周… ②田… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106294 号

辽宁教育出版社出版、发行
(沈阳市和平区十一纬路 25 号 邮政编码 110003)
湖北省林业勘察设计院印刷厂印刷

开本:880 毫米×1230 毫米 1/16 字数:288 千字 印张:12.25
印数:1~10000 册
2009 年 9 月第 2 版 2009 年 9 月第 2 次印刷

责任编辑:崔 崇 马 新 责任校对:梅 杰
封面设计:钟贞贞 版式设计:王 恒

ISBN 978-7-5382-8161-3
定价:22.00 元

目录

目录

第1讲 二次根式的运算

知识解读

一、式子$\sqrt{a}$($a\geqslant 0$)叫做二次根式,对它的理解要把握以下两点:

(1)式子$\sqrt{a}$只有在$a\geqslant 0$时才叫做二次根式.如$\sqrt{-3}$不是二次根式;

(2)二次根式是指式子的外在形式.$\sqrt{4}=2$,$\sqrt{4}$是二次根式,而2不是二次根式.

二、会辨别最简二次根式和同类二次根式.

三、二次根式的运算性质:

(1)$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ (2)$\sqrt{a^2}=|a|$

(3)$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$ (4)$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$

培优例题

例1:x是怎样的实数时,下列各式在实数范围内有意义?

(1)$\sqrt{x-3}$; (2)$\sqrt{-5x}$; (3)$\sqrt{|x|+1}$; (4)$\frac{\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

【解析】 一个式子要有意义则要求:①被开方数大于等于0,②分母不为0

解:(1)由$x-3\geqslant 0$得$x\geqslant 3$,∴当$x\geqslant 3$时式子$\sqrt{x-3}$在实数范围内有意义

(2)由$-5x\geqslant 0$得$x\leqslant 0$,∴当$x\leqslant 0$时式子$\sqrt{-5x}$在实数范围内有意义

(3)∵$|x|\geqslant 0$,∴$|x|+1>0$,∴无论x取何值$\sqrt{|x|+1}$都有意义

(4)由$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\|x|-2\neq 0\end{cases}$得$x\geqslant 1$且$x\neq 2$,∴当$x\geqslant 1$且$x\neq 2$时式子有意义

例2:化简$2a-(\sqrt{a-3})^2-|3-a|$

【解析】 原式只有当$a-3\geqslant 0$时才有意义,因此$a\geqslant 3$,于是$|3-a|=a-3$

原式$=2a-(a-3)-(a-3)=6$

例3:比较$3\sqrt{2}$与$2\sqrt{3}$的大小

【解析】 因为$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$,$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$,$\sqrt{18}>\sqrt{12}$,所以$3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$

例4:比较下列各数的大小:$\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$2-\sqrt{3}$,$\sqrt{5}-2$.

【解析】 比较数的大小通常有作差法和作商法两种,但对本题无论作差还是作商均太过复杂.若注意到$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$则可以使问题得以简化.

解：$\because (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1 \quad \therefore \sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

同理：$2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \qquad \sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

$\because \sqrt{3}+\sqrt{2}<2+\sqrt{3}<\sqrt{5}+2$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}>\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

即：$\sqrt{3}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}>\sqrt{5}-2$

例 5：已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，求$\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}-\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4}$的值.

【解析】 $\because a=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0, \dfrac{1}{a}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore a+\dfrac{1}{a}>0 \quad a-\dfrac{1}{a}<0$

原式$=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|-\left|a-\dfrac{1}{a}\right|=a+\dfrac{1}{a}+a-\dfrac{1}{a}=2a$

当 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$时，原式$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

能力展示

1. (2008 厦门市)下列函数中，自变量 x 的取值范围是 $x>2$ 的函数是(　　)

A. $y=\sqrt{x-2}$　　B. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$　　C. $y=\sqrt{2x-1}$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

2. (2008 常州市)若式子 $\sqrt{x+5}$在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x>-5$　　B. $x<-5$　　C. $x\neq-5$　　D. $x\geqslant-5$

3. (2008 中山市)下列根式中不是最简二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{8}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{2}$

4. (2008 聊城市)下列计算正确的是(　　)

A. $2\sqrt{3}+4\sqrt{2}=6\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{8}=4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=3$　　D. $\sqrt{(-3)^2}=-3$

5. 下列等式：(1) $\sqrt{(-3)^2}=-3$，(2) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}$，(3) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}=5\sqrt{5}$，其中正确的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 化简 $\sqrt{4x^2-4x+1}-(\sqrt{2x-3})^2$ 得(　　)

A. 2　　B. $-4x+4$　　C. -2　　D. $4x-4$

7. 如果等式$(x+1)^0=1$ 和 $\sqrt{(3x-2)^2}=2-3x$ 同时成立，那么需要的条件是(　　)

A. $x\neq1$　　B. $x<\dfrac{2}{3}$且 $x\neq-1$　　C. $x\leqslant\dfrac{2}{3}$或 $x\neq1$　　D. $x\leqslant\dfrac{2}{3}$且 $x\neq-1$

8. 设 $\sqrt{26}=a$，则下列结论正确的是(　　)

A. $4.5<a<5.0$　　B. $5.0<a<5.5$

C. $5.5<a<6.0$　　D. $6.0<a<6.5$

9. 若 $\sqrt{x-2}$有意义，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x>2$　　B. $x\geqslant2$　　C. $x<2$　　D. $x\leqslant2$

10. 下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{8}-2\sqrt{2}=0$　　D. $\sqrt{5}-1=2$

11. 估计$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与0.5的大小关系:$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$________0.5(填“>”、“=”或“<”).

12. 比较大小:$7\sqrt{6}$________$6\sqrt{7}$(填“>”、“=”或“<”).

13. 计算:$3\sqrt{18}+\frac{1}{5}\sqrt{50}-4\sqrt{\frac{1}{2}}$.

14. 计算:$\sqrt{18}-\frac{1}{2}\div 2^{-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-(\sqrt{2}-1)$.

15. 计算:$(\sqrt{8}+5\sqrt{3})(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}$.

16. 比较大小:$\sqrt{6}-\sqrt{3}$,$\sqrt{5}-\sqrt{2}$,$\sqrt{7}-2$.

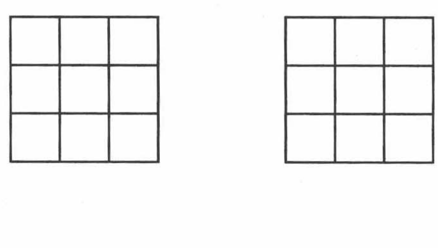
17. 已知:$\sqrt{a^2}=|a|$,$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,一个同学在化简$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$时是这样化简的:$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt{2^2+2\times 2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

请仿照这个同学的做法化简:$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

18. 在3×3的正方形网格中(如图)每个小正方形的边长都是1,每个小格的顶点叫做格点,以格点为顶点,分别按下列要求画三角形:

(1)请在一个网格图中画一个三边长分别为3,$2\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$的三角形,一共可画这样的三角形多少个?

(2)画一个三边长均为无理数,且面积为$1\frac{1}{2}$的钝角三角形.



19. 阅读理解题：

①$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

②$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

(1)按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想$4\sqrt{\frac{4}{15}}$的变形结果并进行验证；

(2)针对上述各式反映的规律，写出用n(n为自然数，且$n\geqslant 2$)表示的等式，并给出证明.

20. 在一节数学探究课上，张老师出示了下列命题：

已知正数a和b，①若$a+b=2$，则有$\sqrt{ab}\leqslant 1$；②若$a+b=3$，则有$\sqrt{ab}\leqslant\frac{3}{2}$；③若$a+b=6$，则有$\sqrt{ab}\leqslant 3$.

读完上述三个命题后，老师告诉同学们上述命题均为真命题.

试猜想，若$a+b=7$，则$\sqrt{ab}\leqslant$________.

若$a+b=n$，则$\sqrt{ab}\leqslant$________.

我们可以得到一个规律：________________.

试对上述规律进行证明.

第2讲 非负数在二次根式中的应用

知识解读

一、初中阶段非负数的常见形式：

(1)二次根式：$\sqrt{\quad}\geqslant 0$

(2)偶次方：$(\quad)^{偶次方}\geqslant 0$

(3)绝对值：$|\quad|\geqslant 0$

二、由于非负数都不小于0，所以：若 n 个非负数的和为0，则这 n 个非负数均为0.

培优例题

例1：若$(b-\sqrt{2})^2+\sqrt{2a+6}=0$，试解关于 x 的方程$(a+2)x+b^2=a-1$.

【解析】 $(b-\sqrt{2})^2\geqslant 0$，$\sqrt{2a+6}\geqslant 0$，且$(b-\sqrt{2})^2+\sqrt{2a+6}=0$.

$\therefore b-\sqrt{2}=0$，$2a+6=0$，即 $b=\sqrt{2}$，$a=-3$.

原方程可化为：$(-3+2)x+(\sqrt{2})^2=-3-1$，$-x+2=-4$，$x=6$.

例2：若$2|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\dfrac{1}{4}=0$，求 $x+y+z$ 的值.

【解析】 原等式可变形为：$2|x-y|+\sqrt{2y+z}+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$.

$\because |x-y|\geqslant 0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant 0$，$\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$.

$\therefore \begin{cases} x-y=0, \\ 2y+z=0, \\ z-\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$ 解得 $x=-\dfrac{1}{4}$，$y=-\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore x+y+z=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=0$.

例3：若$\sqrt{(x-y+2)^2}$与$(x+y+1)^2$互为相反数，试计算$\sqrt{-x+y}$的值.

【解析】 依题意：$\sqrt{(x-y+2)^2}+(x+y+1)^2=0$，

即$|x-y+2|+(x+y+1)^2=0$.

$\because |x-y+2|\geqslant 0$，$(x+y+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore x+y+1=0$，且 $x-y+2=0$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\ \sqrt{-x+y}=\sqrt{-\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}.$

【点拨】 题目中 $\sqrt{(x-y+2)^2}$ 与 $(x+y+1)^2$ 都是非负数，它们互为相反数，则它们都是 0.

例 4：若 $a^2+b^2-2a-4b+5=0$，求 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

【解析】 $\because\ a^2+b^2-2a-4b+5=0$，

$\therefore\ a^2+b^2-2a-4b+1+4=0$，即 $(a-1)^2+(b-2)^2=0$，

$\therefore\ a=1,b=2$，所以 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}.$

【点拨】 所给的条件等式中并非全都是非负数，所以把常数项 5 拆成了 1 和 4，进而构造两个完全平方式，出现了非负数，使题目得以解决. 题目中采用的这种拆项配完全平方的方法是同学们必须掌握的.

例 5：若 $x-2\sqrt{xy}+y=0$，求代数式 $\dfrac{3x-\sqrt{xy}+y}{5x+3\sqrt{xy}-4y}$ 的值.

【解析】 依题意，$x>0,y>0$，所以 $x-2\sqrt{xy}+y=0$，可化为

$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=0$，即 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$，所以 $x=y$.

原式 $=\dfrac{3x-\sqrt{x^2}+x}{5x+3\sqrt{x^2}-4x}=\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}.$

例 6：已知实数 a 满足 $|2005-a|+\sqrt{a-2006}=a$，求 $a-2005^2$ 的值.

【解析】 由 $a-2006\geqslant 0$，得 $a\geqslant 2006$. 故已知式可化为 $a-2005+\sqrt{a-2006}=a$，

$\therefore\ \sqrt{a-2006}=2005$，两边平方并整理，得：$a-2005^2=2006$.

能力展示

1. 如果 $a-|a|=0$，那么 $\left|a-\sqrt{4a^2}\right|=$ <u>$-a$</u>.

2. 若 $|a+3|+\sqrt{b-2}+(m-21)^2=0$，则 $(a+b)^m$ 的值是 <u>-1</u>.

3. 已知：$x<0,y>0$，且 $\sqrt{a+|x|}+\sqrt{|y|-b}=0$，则 $x=$ <u>$-a$</u>，$y=$ <u>b</u>.

4. 实数 x 满足，$x+\sqrt{x^2}=0$，则 x 是______数.

5. 若 $ab\neq 0$，则 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$ 的值为 <u>2, 0, -2</u>.

6. 已知：$2|2a-4|+\sqrt{a^2+b-1}=0$，则 $(a+b)-ab=$ <u>5</u>.

7. 当 $x=$ <u>3</u> 时，代数式 $9-\sqrt{3-x}$ 有最大值，其最大值为 <u>9</u>.

8. 当 $x=$______时，代数式 $\sqrt{4x+5}$ 有最小值，其最小值为 <u>0</u>.

9. 请你先计算 $\sqrt{11-2}=$ <u>3</u>；$\sqrt{1111-22}=$ <u>33</u>；$\sqrt{111111-222}=$ <u>333</u>，总结规律：$\sqrt{\underbrace{11\cdots11}_{2n个1}-\underbrace{2\cdots2}_{n个2}}$（$n$ 是自然数，$n\geqslant 1$）$=$ <u>n个3</u>.

10. 在实数范围内，求代数式 $\left|\left|\sqrt{-(x-4)^2}-1\right|-2\right|$ 的值.

$\because (x-4)^2\geqslant 0$

$\therefore \sqrt{-(x-4)^2}\geqslant 0$

$\therefore \sqrt{-(x-4)^2}=0$

$\therefore \left|\sqrt{-(x-4)^2}-1\right|=1$

$\therefore \left|\left|\sqrt{-(x-4)^2}-1\right|-2\right|=1$

11. 已知$|3x-y-1|$与$\sqrt{2x+y-4}$互为相反数,求$\sqrt{x^2-2xy+y^2}$的值.

∵ $|3x-y-1|$ 与 $\sqrt{2x+y-4}$ 互为相反数

∴ $|3x-y-1|+\sqrt{2x+y-4}=0$

∴ $3x-y-1=0$ ①

$2x+y-4=0$ ②

∴ ①+② $=5x-5=0$

∴ $x=1$,

∴ $y=2$

∴ $\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|=|1-2|=1$

12. 如果$x^2+y^2-4x-6y+13=0$,求代数式$\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}}$的值.

∵ $x^2+y^2-4x-6y+13=0$

∴ $(x-2)^2+(y-3)^2=0$

∴ $x=2$, $y=3$

∴ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}$ $=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+4\sqrt{2\times3}}{2+\sqrt{2\times3}}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

13. 若a,x,y满足$(x-y+2)^3=216$,$3\sqrt{x+2y+5}+|x-a+5|=0$,求$60a(x^2+y^2)$的平方根.

∵ $3\sqrt{x+2y+5}+|x-a+5|=0$, $(x-y+2)^3=216$

∴ $x+2y+5=0$ ① $x-a+5=0$ ②, $x-y+2=6$ ③

∴ ①−③ $=3y-3=-6$

∴ $y=-3$ $x=1$ $a=6$ ∴ $\sqrt{60a(x^2+y^2)}=\sqrt{60\times6[1^2+(-3)^2]}=60$

14. 已知a、b、c为实数,$|a-2|+\sqrt{a+b-c}+(c+3)^2=0$,求$a+b+c$的值.

∵ $|a-2|+\sqrt{a+b-c}+(c+3)^2=0$

∴ $a=2$, $c=-3$, $b=-5$

∴ $a+b+c=2-5-3=-6$

算术平方根

15. 若$\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}+2}+b^2+\dfrac{1}{b^2}+2=4$,求$a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}$的值.

∵ $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}+b^2+\frac{1}{b^2}-2=0$

∴ $\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}+(b-\frac{1}{b})^2=0$

∴ $a+\frac{1}{a}=0$ $(b-\frac{1}{b})^2=b^2-2+\frac{1}{b^2}=0$ ∴ $b^2+\frac{1}{b^2}=2$

∴ $(b+\frac{1}{b})^2=b^2+\frac{1}{b^2}+2=2+2=4$

∴ $b+\frac{1}{b}=\pm2$

∴ $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=\pm2$

16. 已知a、y均为实数,且满足等式$y=\dfrac{\sqrt{|a|-3}+\sqrt{3-|a|}+12}{a-3}$,试求$y^{2006}$的个位数字.

∵ $\sqrt{|a|-3}\geq0$, $\sqrt{3-|a|}\geq0$

∴ $a=\pm3$

又 $a-3\neq0$

∴ $a=-3$

∴ $y=\dfrac{12}{-6}=-2$ ∴ $y^{2006}=(-2)^{2006}$ 个位数字为8

17. 若x、y均为实数,且满足等式

$\sqrt{3x+5y-2}+\sqrt{2x+4y-a}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$,求$a$的值.

$\sqrt{x-199+y}=\sqrt{(x+y)-199}\geq0$

$\sqrt{199-x-y}=\sqrt{199-(x+y)}\geq0$

∴ $x+y=199$ ①, $\sqrt{x-199+y}$

∴ $3x+5y-2=0$ ②, $2x+4y-a=0$ ③

∴ 由②−①得 $2x+4y=-197$, 由③−②得

$a=-197$

第 3 讲 一元二次方程的解法

知识解读

1. 一元二次方程的一般形式是：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

ax^2 是二次项，a 是二次项系数；(二次项的系数不能等于 0，即 $a\neq0$)

bx 是一次项，b 是一次项系数；

c 是常数项.

2. 求根公式法：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 且 $b^2-4ac\geq0$

两个根为：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

x(x+b)(a)+a(x+1)
$x^2+bx+cx+ad$

3. 因式分解法：

(1) $ax^2+bx=x(ax+b)$

(2) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

培优例题

$m^2-8m+17\neq0$
$(m^2-8m+16+1)\neq0$
$(m-4)^2+1\neq0$

例 1：证明关于 x 的方程 $(m^2-8m+17)x^2+2mx+1=0$ 不论 m 为何值时，都是一元二次方程.

【证明】 因为二次项系数 $m^2-8m+17=m^2-8m+16+1=(m-4)^2+1$，

又因为 $(m-4)^2\geq0$，

所以 $(m-4)^2+1>0$，即 $m^2-8m+17>0$.

所以不论 m 为何值时，原方程都是一元二次方程.

$m^2+1=2$
$m^2=1$

例 2：某数学兴趣小组对关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$ 提出了下列问题：

(1) 若使方程为一元二次方程，m 是否存在？若存在，求出 m 并解此方程.

(2) 若使方程为一元一次方程，m 是否存在？若存在，请求出.

你能解决这个问题吗？

【解析】 (1) 存在. 根据题意，得：$m^2+1=2\quad m=\pm1$

当 $m=1$ 时，$m+1=1+1=2\neq0$

当 $m=-1$ 时，$m+1=-1+1=0$(不合题意，舍去)

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，方程为 $2x^2-x-1=0$

$a=2,b=-1,c=-1$

$b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9$

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{1\pm3}{4}\quad x_1=1,x_2=-\dfrac{1}{2}$

因此，该方程是一元二次方程时，$m=1$，两根 $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$.

(2)存在. 根据题意，得：

①$m^2+1=1, m^2=0, m=0$

因为当 $m=0$ 时，$(m+1)x+(m-2)x=-x\neq0$

所以 $m=0$ 满足题意. 一元一次方程是 $-x-1=0$

②当 $m^2+1=0$，m 不存在.

③当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$m-2=-3\neq0$

所以 $m=-1$ 也满足题意. 一元一次方程是 $-3x-1=0$ $(m+3)(m-1)=0$.

例3：若一元二次方程 $(m-1)x^2+3m^2x+(m+3)(m-1)=0$ 有一个根 $x=0$，则 m 的值为(　　)

A. -3 或 1　　B. 3 或 -1　　C. -3　　D. 1

【解析】 由题意知，0 是方程的根，故由根的定义知：$x=0$ 满足方程，所以把 $x=0$ 代入原方程，得 $(m+3)(m-1)=0$，故 $m=-3$ 或 $m=1$，但题设明确指出是关于 x 的一元二次方程，因此隐含了条件 $m-1\neq0$，即 $m\neq1$，故正确答案为 C.

例4：已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求代数式 $\frac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}$ 的值. x^2-3x

【解析】 因为此题所求的代数式比较复杂，因此可考虑应用整体思想，且以根的定义为解题突破口.

解：由根的定义知，$a^2+1=3a$.

两边都乘以 a，得 $a^3+a=3a^2$，所以 $a^3=3a^2-a$，

所以 $a^3-2a^2-5a+1=(3a^2-a)-2a^2-5a+1=(a^2+1)-6a=3a-6a=-3a$.

所以原式 $=\frac{-3a}{a^2+1}=\frac{-3a}{3a}=-1$.

能力展示

1. 在关于 x 的方程 $(m-2)x^2+(m+1)x-3=0$ 中：当 m <u>$\neq 2$</u> 时，它是一元二次方程；当 m <u>$=2$</u> 时，它是一元一次方程.

2. 在关于 x 的方程 $(m-5)x^{m-7}+(m-7)x-3=0$ 中：当 m <u>$=9$</u> 时，它是一元二次方程；当 m <u>$=5$</u> 时，它是一元一次方程. 或 8

3. 方程 $x^2+5x-2=0$ 中，$a=$ <u>1</u>，$b=$ <u>5</u>，$c=$ <u>-2</u>，b^2-4ac 的值是 <u>33</u>.

4. 方程 $2x^2-1=3x$ 中，b^2-4ac 的值是 <u>17</u>，$x_1=$ <u>$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$</u>，$x_2=$ <u>$\frac{3-\sqrt{17}}{4}$</u>.

5. 若 a 与 c 异号，则 b^2-4ac 的值的符号一定是 <u>正号</u>.

$2x^2-3x-1=0$

6. $(x-2)(3x+6)=0$，$x_1=$ <u>2</u>，$x_2=$ <u>-2</u>.

7. $3x(x+\sqrt{2})=0$，$x_1=$ <u>0</u>，$x_2=$ <u>$-\sqrt{2}$</u>.

$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$

8. $x^2=\sqrt{3}x$，$x_1=$ <u>$\sqrt{3}$</u>，$x_2=$ <u>0</u>.

$a+b+c=0$

9. 若 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则 $a+b+c$ 的值是 <u>0</u>.

10. 若 x^2+3x+5 的值为 9，则代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为 <u>10</u>.

$x^2+3x+5=9$

11. 方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x+6\sqrt{2}=0$ 的根是(D)

$3x^2+9x-2=$

A. $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$　　B. $x_1=6, x_2=\sqrt{2}$

$b^2-4ac=0$　$\frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$3x^2+9x+15=27$

C. $x_1=2\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$　　D. $x_1=x_2=-\sqrt{6}$

12. $(m^2+n^2)(m^2+n^2-2)-8=0$，则 m^2+n^2 的值是(C) A

$3x^2+9x=12$

A. 4　　B. -2　　C. 4 或 -2　　D. -4 或 2

13. (2008 龙岩市)方程 $x^2-3x+2=0$ 的解是(A)

$-2(-4)$

$x(x-2)=8$

$x^2-2x-8=0$

$(x-2)(x-1)=0$　$(x-4)(x+2)$

$x_1=2, x_2=1$

A. $x_1=1, x_2=2$　　B. $x_1=-1, x_2=-2$

C. $x_1=1, x_2=-2$　　D. $x_1=-1, x_2=2$

14. (2008 山东省)若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+5x+m^2-3m+2=0$ 的常数项为 0,则 m 的值等于 (B)

$m^2-3m+2=0$　$(x-2)(x-1)=0$

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 2　　D. 0

15. (2008 河北省)某县为发展教育事业,加强了对教育经费的投入,2007 年投入 3000 万元,预计 2009 年投入 5000 万元. 设教育经费的年平均增长率为 x,根据题意,下面所列方程正确的是(A)

A. $3000(1+x)^2=5000$　　B. $3000x^2=5000$

C. $3000(1+x\%)^2=5000$　　D. $3000(1+x)+3000(1+x)^2=5000$

$3000(1+x)^2$

16. (2008 巴中市)巴中日报讯:今年我市小春粮油再获丰收,全市产量预计由前年的 45 万吨提升到 50 万吨,设从前年到今年我市的粮油产量年平均增长率为 x,则可列方程为(B)

A. $45+2x=50$　　B. $45(1+x)^2=50$　　C. $50(1-x)^2=45$　　D. $45(1+2x)=50$

17. 满足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$ 的整数 n 有 2 个.

18. 若 $x^2+xy+y=14, y^2+xy+x=28$,则 $x+y$ 的值为 6或-7.

19. 三角形的两边长分别是 3 和 4,第三边的长是方程 $x^2-6x+5=0$ 的根,试判定这个三角形的形状.

解 $x^2-6x+5=0$

得 $x_1=1$ $x_2=5$

当第三边为1时不为三角形,舍去

当第三边为5时三角形为直角三角形

20. (2008 赤峰市)如果 -1 是一元二次方程 $x^2+bx-3=0$ 的一个根,求它的另一根.

把 $x=-1$ 代入 得 $1-b-3=0$

∴ $b=-2$

∴ $x^2-2x-3=0$

∴ $(x-3)(x+1)=0$

∴ $x_1=3$, $x_2=-1$

∴它的另一根为 $x=3$

21. 已知关于 x 的方程 $(m+2)x^{m^2+3m+4}+mx-3m+1=0$.

(1)当 m 取什么值时,方程是一元二次方程?

(2)当 m 取什么值时,方程是一元一次方程?

(1) 当 $m^2+3m+4=2$ 时,方程是一元二次方程

∴当 $m=-2$(舍去) $m=-1$ 时 此方程是一元二次方程

(2) 当 $m+2=0$ 时,方程是一元一次方程

∴当 $m=-2$ 时 方程是一元一次方程

22. 已知 $m^2+2m=0$,且 n 与 m 互为倒数,求关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的根.

解 $m^2+2m=0$

得 $m_1=0$, $m_2=-2$

∵ n与m互为倒数

∴当 $m=0$ 时, $n=0$

∴ $x^2+mx+n=0$

为 $x^2=0$

∴ $x=0$

当 $m=-2$ 时, n 为 $-\frac{1}{2}$

∴代入 $x^2+mx+n=0$

得 $x^2-2x-\frac{1}{2}=0$

∴ $x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4kx+k^2=0$ 的一个根是 -2，求 k 的值.

把 $x=-2$ 代入 $4x^2+4kx+k^2=0$

得 $16-8k+k^2=0$

$\therefore k=4$.

24. 已知 $2x^2+xy-3y^2=0(y\neq0)$，求 $\frac{x}{y}$ 的值.

$2(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})-3=0$

$\frac{x}{y}=a$

$2a^2+a-3=0$

$(x+3y)(2x-y)=0$

$\therefore x+3y=0$ $2x-y=0$

$\frac{x}{y}=-3$

$2x=y$

$2=\frac{y}{x}$

25. 阅读：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根是 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，方程 $y^2+by+ac=0$ 的根为 $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$，显然有 $x=\frac{y}{a}$. 因此，要求 $ax^2+bx+c=0$ 的根，只要求出方程 $y^2+by+ac=0$ 的根，再除以 a 就可以了.

范例：解方程 $72x^2+8x+\frac{1}{6}=0$.

解：先解方程 $y^2+8y+72\times\frac{1}{6}=0$，得 $y_1=-2, y_2=-6$.

所以方程 $72x^2+8x+\frac{1}{6}=0$ 的两根是 $x_1=\frac{-2}{72}=-\frac{1}{36}, x_2=\frac{-6}{72}=-\frac{1}{12}$.

练习：按以上范例的方法解方程 $49x^2+6x-\frac{1}{7}=0$.

解：先解方程 $y^2+6y-7=0$

得 $y_1=-7$，$y_2=1$

所以方程 $49x^2+6x-\frac{1}{7}=0$ 的两根是 $x_1=\frac{-7}{49}=-\frac{1}{7}$

$x_2=\frac{1}{49}$

第4讲 一元二次方程根的判别式

知识解读

在关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中:

(1)$b^2-4ac>0$ ⇔ 方程有两个不相等的实数根.

(2)$b^2-4ac=0$ ⇔ 方程有两个相等的实数根.

(3)$b^2-4ac<0$ ⇔ 方程没有实数根.

培优例题

例 1:当 m 取什么值时,关于 x 的方程 $x^2+2(2m+1)x+(2m+2)^2=0$

(1)有两个相等实根;

(2)有两个不相等的实根;

(3)没有实根?

【答案】 (1)$m=-\frac{3}{4}$;(2)$m<-\frac{3}{4}$;(3)$m>-\frac{3}{4}$

例 2:已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+2k-1=0$.

求证:对于任意实数 k,方程总有两个不相等的实数根.

【证明】 $\because \Delta=4(k+1)^2-4(k^2+2k-1)=4k^2+8k+4-4k^2-8k+4=8>0$

$\therefore$ 对于任意实数 k,方程总有两个不相等的实数根.

例 3:当 m 为什么值时,关于 x 的方程 $(m^2-4)x^2+2(m+1)x+1=0$ 有实根?

【解析】 当 $m^2-4=0$ 即 $m=\pm2$ 时,$2(m+1)\neq0$,方程为一元一次方程,总有实根;

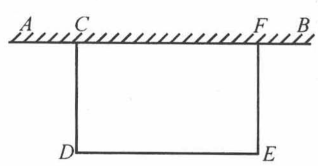
当 $m^2-4\neq0$ 即 $m\neq\pm2$ 时,方程有根的条件是:

$\Delta=[2(m+1)]^2-4(m^2-4)=8m+20\geqslant0$,解得 $m\geqslant-\frac{5}{2}$

$\therefore$ 当 $m\geqslant-\frac{5}{2}$ 且 $m\neq\pm2$ 时,方程有实根.

综上所述:当 $m\geqslant-\frac{5}{2}$ 时,方程有实根.

例 4:如图,某校广场有一段 25 米长的旧围栏,现打算利用该围栏的一部分(或全部)为一边,围成一块 100 平方米的长方形草坪(如图,$CD<CF$),已知整修旧围栏的价格是每米 1.75 元,建新围栏的价格是每米4.5 元.



(1)若计划修建费为 150 元,能否完成该草坪围栏修建任务?

(2)若计划修建费为 120 元,能否完成该草坪围栏修建任务?若能完成,请算出利用旧围栏多少米;若不能完成,请说明理由.