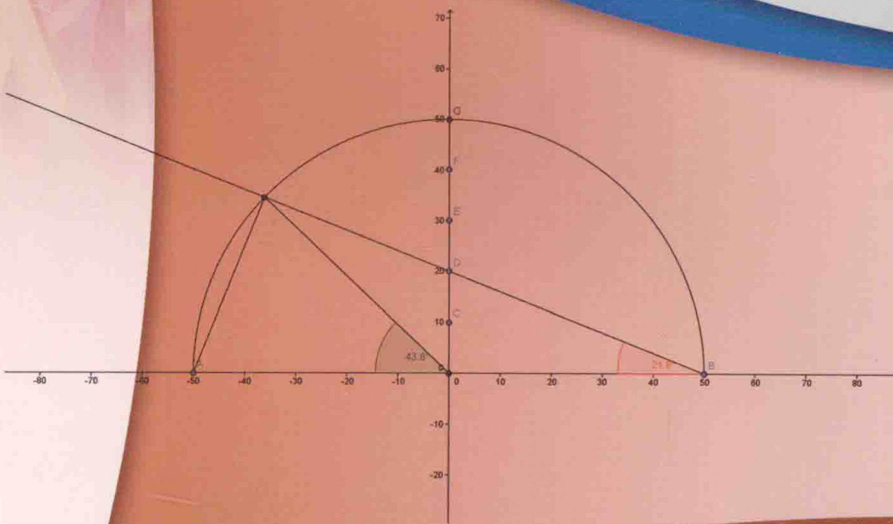
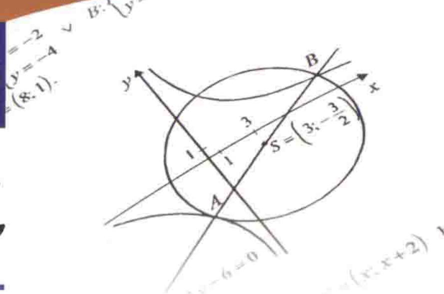




GAODENG SHUXUE

高等数学

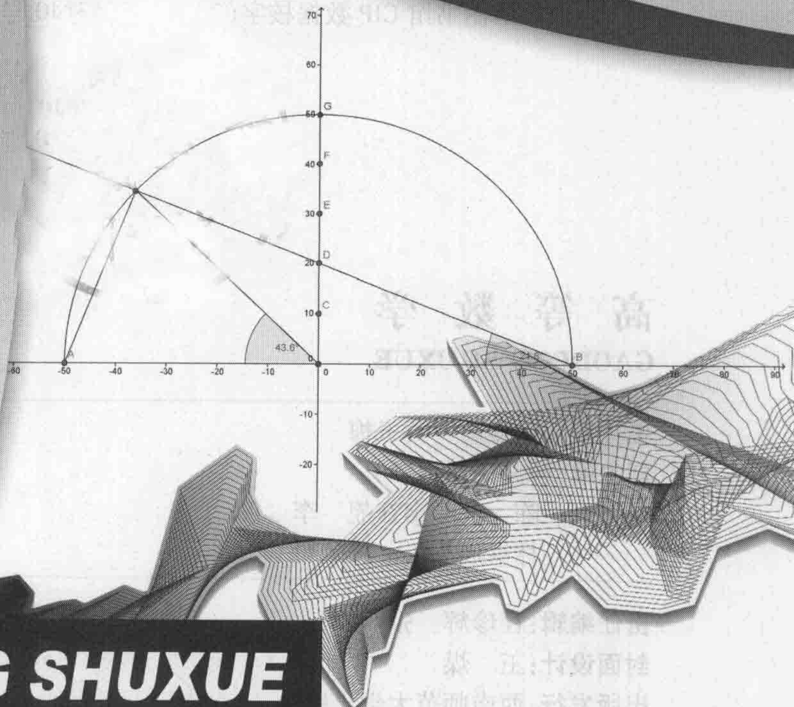
陈熙德　黄玉梅　主编

西南师范大学出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

GAODENG SHUXUE

高等数学

陈熙德　黄玉梅　主编



西南師範大學出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 陈熙德,黄玉梅主编. —重庆: 西南师范大学出版社, 2014.5
ISBN 978-7-5621-6719-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈…②黄… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 057040 号

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

主　编 陈熙德　黄玉梅
副主编(排名不分先后)
陈　群　廖钰靓　李　彦
林亨成　彭　涛　梁　斌

责任编辑:杜珍辉　张燕妮
封面设计:王　煤
出版发行:西南师范大学出版社
地址:重庆市北碚区天生路 1 号
邮编:400715　市场营销部电话:023-68868624
http://www.xscbs.com
经　　销:新华书店
印　　刷:重庆紫石东南印务有限公司
开　　本:787mm × 1092mm　1/16
印　　张:16.25
字　　数:360 千字
版　　次:2014 年 7 月　第 1 版
印　　次:2014 年 7 月　第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5621-6719-8

定　　价:29.00 元

前 言

在我国高校中，有相当一部分专业的高等数学课程课时数较少，为满足这类专业人才培养的需要，我们组织我校具有丰富教学经验的数学教师编写了这本高等数学教材。本书涉及的内容为函数与极限，一元函数微积分，微分方程，多元函数微积分简介，常用数学软件。本书的写作特点是：弱化“抽象证明”，强化“实际应用”，基本概念、基本理论、基本技能的描述直观形象、通俗易懂。特别是定积分的应用部分，舍弃了传统描述，引入了容易被读者接受的直观方法来进行讲解。

本书可作为本科少学时专业和各类专科学校的高等数学课程教材。完成全书内容的教学需 80 ~ 90 学时。

参加本书编写工作的全体人员均为西南大学荣昌校区的数学教师，他们分别是：

梁斌（第一章），彭涛（第二章），林亨成（第三章），廖钰靓（第四章及附录），陈熙德（第五章），黄玉梅（第六章），陈群（第七章），李彦（第八章）。本书由陈熙德负责统稿，在统稿过程中，黄玉梅和陈群等多位老师予以协助。

在本书的编写过程中，我们参考了国内多部著名的高等数学教材（见参考文献），得到了西南大学荣昌校区分管教学的领导以及教学办和基础部等部门的大力支持，得到了不少同行专家、学者的热心帮助。在此向他们表示感谢。

由于编者水平所限，疏漏之处在所难免，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

2014 年 3 月

目　录

第一章 函数与极限

本高等数学课程的主要内容是微积分及其应用。初等数学主要以不变的量(常量)为研究对象,而微积分则以变量为研究对象,运用极限方法着重讨论变量之间的相互关系和变化趋势,本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念及性质,它们是学习本课程必须掌握好的基础知识。

第一节 函 数

函数是现实世界中变量的依存关系在数学中的反映,是微积分学研究的主要对象。由于在中学里已经学过函数的概念,在本节中,我们主要对初等函数的概念和性质作简略介绍。

微积分学中研究的问题,绝大多数都是在实数范围内进行的。如果没有特别声明,本书中所提到的数都是实数。

按照习惯,全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$;全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$。

一、区间与邻域

定义 1 设数 a 与 b 满足 $a<b$,则数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间,记为 (a,b),即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$。这里 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点。

对开区间 (a,b) 而言,显然有 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$。

类似地,$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,称为以 a,b 为端点的闭区间。a 和 b 仍然称为闭区间 $[a,b]$ 的左端点和右端点。显然 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$。而把数集 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间。

上面介绍的区间都是有限区间,数"$b-a$"称为这些有限区间的长度。除了有限区间之外,还有无限区间。引进记号"$+\infty$"(读为正无穷大)及"$-\infty$"(读为负无穷大),则

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}。$$

都是无限区间。而全体实数的集合 $\mathbf{R}$,可以记为$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,当然也是无限区间。

今后,在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简称为"区间",并常用字母"I"表示。

定义 2 设 a 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个数,称数集$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$为点 a 的 δ **邻域**,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}。$$

点 a 叫作这个邻域的中心,δ 叫作这个邻域的半径。

从定义可知,邻域 $U(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$。

为了体现微观性,尽管定义中对 $\delta>0$ 没有什么限制,但一般总认为 δ 是很小的正数。因为 $a-\delta<x<a+\delta$,即$|x-a|<\delta$,所以邻域 $U(a,\delta)$又可以表示为

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}。$$

有时候用到邻域的概念时,需要把邻域的中心去掉。去掉中心 a 的邻域 $U(a,\delta)$,称为点 a 的去心 δ 邻域,记为$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}。$$

今后,点 a 的某一邻域也可以记为 $U(a)$。

二、函数概念

定义 3 设有两个数集 X、Y,f 是一个确定的对应规则,若对于每一个 $x\in X$,通过 f 都有唯一的 $y\in Y$ 和它对应(记为 $x\xrightarrow{f}y$ 或 $f(x)=y$),则称 f 为定义在 X 上的**一元函数**,简称为函数。

在定义中,X 为 f 的定义域,通常用记号 D_f 来表示。当 x 取遍 X 中的一切数时,与之对应的数 y 所组成的数集$\{y \mid y=f(x), x\in X\}$称为函数 f 的值域,常记作 V_f。

一个函数是由对应规则和函数的定义域确定的,而值域则是随着对应规则和定义域的给定而确定的。习惯上把函数 f 说成"变量 y 是变量 x 的函数",并用记号 $y=f(x)$来表示。

函数中表示对应规则的记号"f"也可以用其他的字母表示,例如 g,φ,f,G 等。这时函数的记号相应地表示为 $y=g(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=F(x)$和 $y=G(x)$等。

在不考虑函数的实际意义的时候,函数的定义域就是自变量所能取的使函数关系成立的一切实数的集合。

还应当指出,关于函数的定义,在定义 3 中,要求对每一个 $x\in X$,通过 f 都有唯一的 $y\in Y$和它对应。因此常把这种函数叫作**单值函数**。如果对于某些 $x\in X$,对应的 $y\in Y$ 不止一个数值,按照定义就不能确定函数关系。为了研究方便,也称一个 x 与多个 y 相对应的情况为**多值函数**。

此后,本书所提到的函数都指单值函数,遇有多值函数的时候,每次只限于选定其中的

一个单值分支来研究。

我们在平面上建立直角坐标系 xOy，把满足对应关系 $y=f(x)\,(x\in D_f)$ 的数对 (x,y) 看作 xOy 平面上的点（的坐标），当 x 取遍 D_f 中的每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 P，

$$P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}。$$

点集 P 称为函数 $y=f(x)$ 的图像。

例 1 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $D_f=[-1,1]$，值域 $V_f=[0,1]$。

例 2 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $V_f=[0,+\infty)$。

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $V_f=\{1,0,-1\}$。其图像如图 1-1 所示。

设 $x\in\mathbf{R}$，不超过 x 的最大整数记为 $[x]$，则 $\left[\frac{4}{7}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[-2]=-2$，$[3]=3$。

例 4 函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $V_f=\mathbf{Z}$（整数集）。其图像如图 1-2 所示。

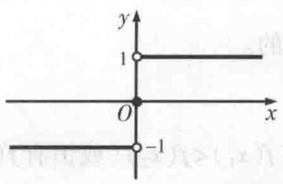


图 1-1

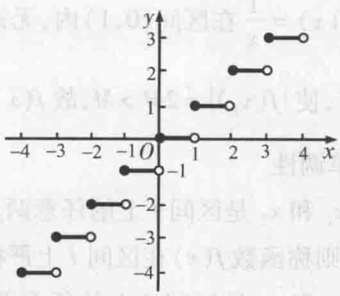


图 1-2

例 5 函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$，值域 $V_f=[0,+\infty)$。

当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值为 $f(x)=2\sqrt{x}$，如 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，对应的函数值为 $f(x)=x+1$，如 $f(3)=3+1=4$。

三、函数的性质

1. 有界性

若存在正数 M,使函数 $f(x)$ 在数集 X 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上是**有界函数**,否则称 $f(x)$ 在 X 上是**无界函数**。

如果存在常数 M(不一定局限于正数),使函数 $f(x)$ 在数集 X 上恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界,并称 M 是 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**;如果存在常数 m,使 $f(x)$ 在数集 X 上恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界,并称 m 是 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**。

显然,函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在数集 X 上既有上界又有下界。

例 6 函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数。

因为无论 x 取任何实数,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数。

从例 6 中可以看到,任何不小于 1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的上界;而任何不大于 -1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的下界。

例 7 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的,在区间 $(0,1)$ 内是无界的。

由于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上满足 $|f(x)|\leqslant 1$,故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是有界的。

而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内,无论给定多么大的正数 M(不妨设 $M>1$),必有 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,使 $|f(x_1)|=2M>M$,故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的。

2. 单调性

设 x_1 和 x_2 是区间 I 上的任意两点,若当 $x_1<x_2$,时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或恒有 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加**(或**严格单调减少**)。

设 x_1 和 x_2 是区间 I 上的任意两点,若当 $x_1<x_2$,时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**广义单调增加的**(或**广义单调减少的**)。

说明:本书默认"单调增加(或减少)仅指严格单调增加(或减少)"。

例 8 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是严格单调减少的;在区间 $(0,+\infty)$ 内是严格单调增加的。而函数 $y=x,y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是严格单调增加的。

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称,若对一切的 $x\in D_f$,均有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**)。

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点对称。

例如：$f(x)=x^2$，$g(x)=x\sin x$ 都是偶函数，而 $F(x)=x$，$G(x)=x\cos x$ 都是奇函数。

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，若存在非零常数 T，使得对一切的 $x\in D_f$，均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，并把 T 称为 $f(x)$ 的**周期**。

应当指出的是，通常讲的周期函数的周期专指其最小的正周期。

对三角函数而言，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数。

关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，但不是每一个函数都一定具备的。

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$ 是数集 Y 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是由数集 X 到数集 Y 的一个非空子集 Y_φ 的函数。则对每一个 $x\in X$，通过 u 都有唯一的 y 与它对应，这时在 X 上产生了一个新的函数，称之为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，用 $f\circ\varphi$ 表示，即 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$。其中 u 叫作中间变量，X 是复合函数的定义域。

应当说明的是该复合函数的定义域 X 是不能等同于函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的，数集 X 是使函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 Y_φ 满足 $Y_\varphi\subseteq Y$ 的所有实数所组成。

复合函数是经常遇到的一种函数结构，例如由物理学知道，物体的动能 E 与速度 v 的函数关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$（这里 m 为物体的质量）。如果将此物体以初速度 v_0 垂直向上抛出，由于地心引力的关系，这时速度 v 与时间 t 有下面的函数关系 $v=v_0-gt$。于是，物体的动能成为时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2。$$

它就是复合函数，其中 v 是中间变量。

又如，$y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $\mathbf{R}$。而函数 $y=\sqrt{x+4}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x+4$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $[-4,+\infty)$，它是中间变量 $u=x+4$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 的子集。

例 9　设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$。

解　$f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{[\varphi(x)]^2+1}=\dfrac{1}{x^2+2}$，

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{x^2+1}。$$

从例 9 可以看出 $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$，也就是说复合函数的复合次序是不能交换的。

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 V_f，若对于每个 $y\in V_f$，均能在 D_f 中找到唯一的 x，它们始终满足 $y=f(x)$，则可得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，记之为 $x=f^{-1}(y)$，我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，而把函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**。

应当说明的是，不是每个函数都有反函数。例如，$y=f(x)=x^2$ 的定义域为 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $V_f=[0,+\infty)$。任取非零的 $y\in V_f$，则适合 $y=x^2$ 的 x 的数值有两个：$x_1=\sqrt{y}$，$x_2=-\sqrt{y}$，所以函数 $y=x^2$ 无反函数。但习惯上也说其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是多值函数：$x=\pm\sqrt{y}$，如果把 x 限制在区间 $[0,+\infty)$ 上，则直接函数 $y=x^2$ 的反函数是 $x=\sqrt{y}$，习惯上称 $x=\sqrt{y}$ 为直接函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支。显然，该函数的反函数的另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$。

若 $y=f(x)$ 有反函数，则有恒等式

$$f^{-1}[f(x)]=x,x\in D_f;\quad f[f^{-1}(y)]=y,y\in V_f。$$

例如：直接函数 $y=f(x)=\frac{3}{4}x+3$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3)$，并且有

$$f^{-1}[f(x)]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]=x,\quad f[f^{-1}(y)]=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3=y。$$

由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 也是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数。

应当说明的是，在同一直角坐标系中，直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图像。而直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的。

定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少)，该函数与区间 I 相对应的值域为 V_f，那么在区间 I 上 $y=f(x)$ 必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，它在 V_f 上也是单调增加(或单调减少)的。

例如：$y=\sin x$ 是在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加的函数，相应的值域为 $[-1,1]$，其反函数 $x=\arcsin y$ 不仅存在，而且还是在区间 $[-1,1]$ 上单调增加的函数。

五、初等函数

基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常值函数这六类函数叫作基本初等函数。这些函数在中学的数学课程里已经学过。

1. 幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域随 α 的取值不同而不同，但是无论 α 取何值，幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha=\frac{1}{2n+1}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，$y=x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$。

常见的幂函数的图像如图 1－3 所示。

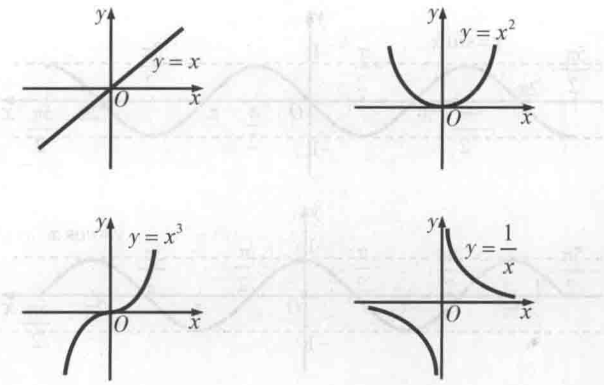


图 1－3

2. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$。

指数函数的图像如图 1－4 所示。

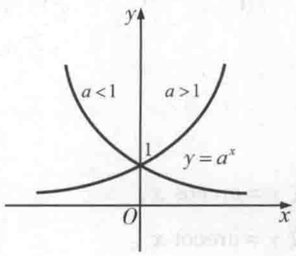


图 1－4

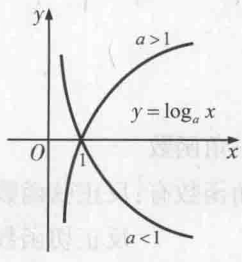


图 1－5

3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$。对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数。其图像见图 1－5。

在工程中，常以无理数 e＝2.718281828…作为指数函数和对数函数的底，并且记

$$e^x=\exp(x),\quad \log_e x=\ln x\ 。$$

后者称为自然对数函数。

4. 三角函数

三角函数有：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，

正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，

正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$ 。

其中正弦、余弦、正切和余切函数的图像见图 1-6。

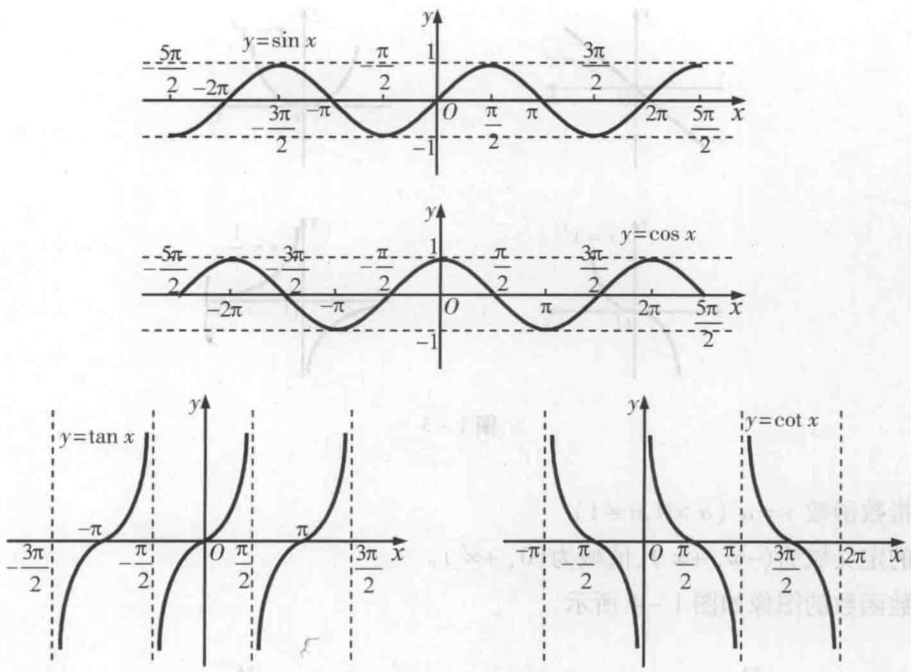


图 1-6

5. 反三角函数

反三角函数有：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，

反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$。

它们的图像如图 1-7 所示。

6. 常值函数 $y=C$（C 为常数）

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其函数图像是一条水平的直线，如图 1-8 所示。

在自然科学、人文科学及工程技术中，经常遇到的函数大多是由基本初等函数构成的。通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并能用一个式子表达的函数称为**初等函数**。

例如：$y=\ln(\sin x+4)$，$y=e^{2x}\sin(3x+1)$，$y=\sqrt[3]{\cos 2x}$ 等都是初等函数。初等函数虽然是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到。例如：符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$，取整函数 $y=[x]$ 等分段函数就是非初等函数。

在微积分运算中，常把一个初等函数分解为多个基本初等函数来研究，学会分析初等函数的结构是十分重要的。

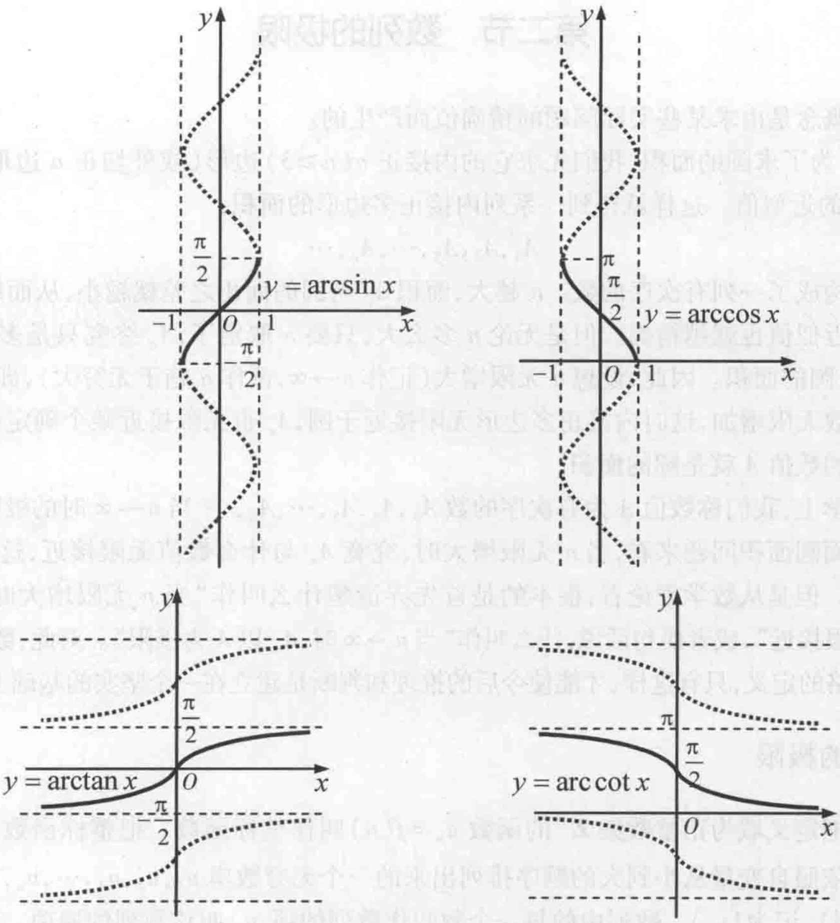


图 1－7

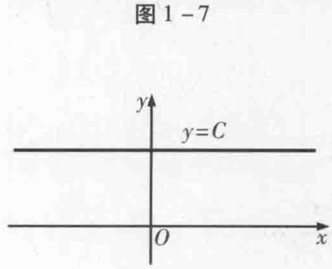


图 1－8

例 10　分析函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的结构。

解　令 $u=1+x^2$，则 $y=u^{\frac{1}{2}}$。而 $u=1+x^2$ 是两个基本初等函数之和，

设 $v(x)=1$，$w(x)=x^2$，则函数的结构是：$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=v(x)+w(x)$。

第二节　数列的极限

极限概念是由求某些实际问题的精确值而产生的。

例如：为了求圆的面积，我们先求它的内接正 $n(n\geqslant 3)$ 边形（或外切正 n 边形）的面积 A_n 作为它的近似值。这样就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_3, A_4, A_5, \cdots, A_n, \cdots$$

它们构成了一列有次序的数。n 越大，面积 A_n 与圆的面积之差就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也就越精确。但是无论 n 多么大，只要 n 取定了，A_n 终究只是多边形的面积，而不是圆的面积。因此，设想 n 无限增大（记作 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，这时内接正多边形无限接近于圆，A_n 也无限接近某个确定的数值 A。这个确定的数值 A 就是圆的面积。

在数学上，我们称数值 A 为有次序的数 $A_3, A_4, A_5, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限。

从上面圆面积问题来看，当 n 无限增大时，究竟 A_n 与什么数值无限接近，这是需要解决的问题。但是从数学理论看，根本的是首先弄清楚什么叫作“当 n 无限增大时，A_n 与某个数 A 无限接近”，或者换句话说，什么叫作“当 $n\to\infty$ 时，A_n 以 A 为极限”。对此，数学上应当有一个严格的定义，只有这样，才能使今后的推理和判断是建立在一个坚实的基础上的。

一、数列的极限

通常把定义域为正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 的函数 $u_n=f(n)$ 叫作整标函数。把整标函数 $u_n=f(n)$ 的函数值依照自变量从小到大的顺序排列出来的一个无穷数串 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 叫作数列（或序列），记为 $\{u_n\}$。数列中的每一个数叫作数列的项，u_n 叫该数列的通项。例如：

$2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$

$0, 1, 0, 1, \cdots, \dfrac{1+(-1)^n}{2}, \cdots$

$2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

这些都是数列的例子，它们的通项依次为 $2n, \dfrac{n}{n+1}, \dfrac{1+(-1)^n}{2}, \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$。

数列的图像通常用数轴上一系列点来表示，如 $u_n=f(n)=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$。

其图像如图 1-9 所示。

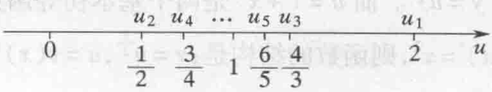


图 1-9