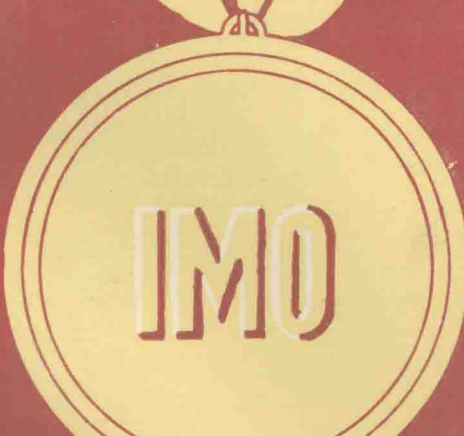
奥林匹克数学竞赛解谜

•小学部分•



西南师范大学出版社

走向世界的窗口

奥林匹克数学竞赛解谜

·小学部分·

康纪权　傅光国
吴诚洪　王镛铮　合　编
谯永忠

西南师范大学出版社

1991年重庆

奥林匹克数学竞赛解谜

康纪权　等编

西南师范大学出版社出版
（重庆　北碚）
新华书店重庆发行所经销
蓬溪县印刷厂　印刷
开本：787×1092　1/32　印张：6.875　插页：2　字数：149千
1992年3月第一版　　1992年3月第1次印刷
印数：1—30,000
ISBN7—5621—0621—5/G·435
定价：2.50元

前言

许海峰一枪打破了“〇”的纪录，奥林匹克体育吸引着千家万户。相比之下，另一个奥运会——奥林匹克数学竞赛就鲜为人知了。为了进一步落实邓小平同志“三个面向”的指示，提高整个中华民族的数学水平，全国性的数学竞赛已空前活跃,数学奥林匹克正在吸引着越来越多的中小学师生。但是，不少人或者对数学本身的偏见，或者缺乏对奥林匹克数学竞赛的了解，使之蒙上了一层神秘的面纱，而不敢问津。为了提高广大中小学学生中数学爱好者的参赛兴趣，使他们充满信心走向世界，进军数学奥运会，为国争光，必须解开奥林匹克数学竞赛之谜，这正是本书的宗旨。

本书的初中部分和高中部分先后出版发行，纷纷接到读者来信，认为很有特色，有骨有肉，有一定的开放性和可读性。当前，国内对这方面尚少成型的著作，此书的问世，是一份探索性的产物，受到全国各地许多学校的青睐。

为了满足广大小学师生的需要，更加丰富本书的内容，特邀在此方面具有多年研究经验，并积累了大量资料的几位同志合编了“小学部分”。展开这个部分的目录，就可自然地感受到它的几个显著特点：一是以专题讨论的形式，较为系统地总结了小学数学的基本知识和基本方法；二是完全按

照小学数学竞赛提纲的要求，巧妙而灵活地将读者引入数学王国的神奇世界，为参赛者提供了一把打开数学奥林匹克大门的钥匙；三是书中例子或者选自国内外的数学竞赛试题，或者选自各省市的小学毕业会考试题，或者选自古今中外的趣题，以增强真实感、趣味性、可读性和实用价值；四是书末附录对数学奥林匹克大概的情况作了阐述，对小学数学竞赛提纲作了介绍，为参赛者提供参赛指南；五是提供了部分竞赛试题，供读者自我检查，也可供辅导老师参考。

国内外的实践充分证明，抓好数学竞赛可以激发学生学习数学的兴趣，可以推动数学课外活动的开展，有利于提高学生思想品德素质，拓广知识视野，开发智力，培养能力，有利于及早发现和培养拔尖人才，也有利于促使教师业务水平的提高，意义十分重大。我们欣喜地看到，在坚持四项基本原则和改革开放的大好形势下，各级奥林匹克学校象雨后春笋纷纷出现，为在全国范围内选拔培养优秀人才创造了良好条件。我国各级数学竞赛的水平正在迅速提高。我们相信：数学奥林匹克将和体育奥林匹克一样，受到越来越多的人的重视和欢迎。

由于水平及资料限制，书中可能存在不妥之处，请同行和数学爱好者们批评指正。

编　者

1991年6月

目　录

第一讲　神奇妙算话基础

相传在南北朝时期（公元368—公元589），我国北方出了一个“神童”，他思维敏捷，反应极快，计算能力超群，许多问题连大人一时也难以算出来的，他却一下子就给出了解答。因此，远近的人们只要知道他的，都喜欢找他计算数学问题。

“神童”的名气越来越大，传到了当朝宰相的耳中。有一天，宰相为了弄清“神童”是真的还是假的，特地把“神童”的父亲叫了去，给了他100文钱，让他第二天带100只鸡来。宰相规定100只鸡中有公鸡、母鸡和小鸡都要有，而且不准多，也不准少，一定要刚好是百鸡百钱。

当时，买1只公鸡要5文钱，买1只母鸡需3文钱，买3只小鸡才1文钱。怎样才能凑成百鸡百钱呢？“神童”想了一会，告诉父亲说：只要送4只公鸡、18只母鸡、78只小鸡就可以了。

第二天，宰相见到送来的鸡正好满足百鸡百钱，大为惊奇。他想了一下，又给“神童”的父亲100文钱，要他明天再送100只鸡来，同时还规定不准只有4只公鸡。

这个问题也没有难住“神童”。他想了一会，让父亲送去8只公鸡、11只母鸡、81只小鸡。“神童”还告诉父亲说：遇到类似的问题，只要怎样怎样计算就行了。

第二天，宰相见到送来的100只鸡，赞叹不已。他又给

了100文钱，要求下次再送100只鸡来。

谁也没有料到，不一会儿，“神童”的父亲就送来了100只鸡。宰相一数，公鸡12只，母鸡4只，小鸡84只，正好又满足了百鸡百钱……。

这个“神童”就是张邱建。他继续勤奋学习，刻苦钻研，终于成长为一个著名的数学家。他的名著《张邱建算经》里，最后一个题目就是这个有趣的“百鸡问题。”

“神童”张邱建是怎样告诉他父亲，如何算出题目的几个答案的呢？

原来，张邱建发现了一个秘密：4只公鸡值20文钱，3只小鸡值1文钱，合起来鸡数是7，钱数是21；而7只母鸡，鸡数是7，钱数也是21。如果少买7只母鸡，就可以用这笔钱多买4只公鸡和3只小鸡。这样，百鸡仍是百鸡，百钱仍是百钱。所以，只要求出一个答案，根据这个法则，马上就可以求出其他的答案来。

这就是驰名中外的“百鸡术”。

如果同学们学会了列方程解应用题，那么“百鸡问题”就是一个不定方程问题。

假设买公鸡、母鸡和小鸡分别为x、y、z只，由题意可得方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

另外，再设一个整数k，有

$x=4k$,

$y=25-7k$,

$z=75+3k$。

因为鸡数x、y、z都只能是自然数，所以满足这组式子的k值只能是1，2，3。分别用它们去代替式子中的k，算出的答案正好与张邱建的答案一模一样。

中国有“神童”，外国也有“神童”。数学王子——高斯就是一名了不起的德国“神童”。

高斯是一位罕见的数学奇才，用他的辉煌的数学成就和异常敏捷的数学思维能力，给后人留下了许许多多近乎神话的传说。

相传，在高斯3岁那年，有一天晚上，高斯的父亲在小油灯下计算一天的工钱，由于要分钱给一起干活的其他人，算了很久才算完，正当他准备收起帐本时，一直坐在旁边玩耍的小高斯却说：“爸爸，您算错了”。望着小高斯一本正经的样子，父亲半信半疑地核对了一遍帐目，发现刚才果然算错了。

还有一个流传很广的故事：高斯10岁那年，也曾用这种令人难以置信的数学能力，让他的老师惊讶得说不出话来。

有一天，数学老师为了让学生整个上午都有事干，给他们布置了一道练习题，要他们把从1到100的各个整数都加起来。不料，他刚解释完题目，高斯就把写有答案的小石板交了上来，老师很生气，以为这个全班年龄最小的学生准是瞎写了些什么，所以连看也没有看。过了很久，别的学生才一个个把小石板叠放在上面。老师皱着眉头查看上面的石板，因为上面都涂抹得很脏，而且答案也错了。待他翻到最下面的那个石板时，不由得大吃一惊，石板上潦草地写着四

个数字：5050。这正是题目的正确答案。

原来，小高斯发现：第一个数加最后一个数得101，第二个数加倒数第二个数也是101，题目中共有50对这样的数，因此，要算出答案只要将101乘以50就行了。

数学老师激动地向学校报告了这件事情，还买了一本最好的算术书送给高斯。他甚至对人说已没有什么东西可以教给高斯了。

同学们看上面讲述的故事，很自然地想到自己，怎样才能象“神童”那样神奇妙算呢？我们说，冰冻三尺非一日之寒，神奇妙算非百天之工，要想神奇妙算，关键在于基础。

一 咬文嚼字

学数学也要象学语文那样“咬文嚼字”，细细地斟酌题目的字句和符号的含义，才能正确地理解和运用他们，才能避免发生解答错误。

例 1（第一届“从小爱数学”竞赛试题）

减数、被减数、差相加的和，除以被减数，商是多少？

思考：题目要求两数相除所得的商是多少？因而谁是被除数、谁是除数必须细细咀嚼题目，抓住“除以”二字便知：

被除数＝减数＋被减数＋差＝被减数＋（减数＋差）

＝被减数＋被减数＝2倍被减数

除数＝被减数

因而，商＝2。

例 2（“不一定”与“一定不”）

有一次，老师用“不一定”与“一定不”两个词，就数与数之间的关系，口述了下列命题，要同学们作出判断：哪些是错误的？哪些是正确的？

（1）质数一定不是偶数。

（2）合数一定不是奇数。

（3）自然数不一定有约数。

（4）分数不一定可化为有限小数。

（5）无限小数一定不可以化为分数。

（6）两个自然数的和与积一定仍是自然数，而它们的差与商不一定仍是自然数。

思考：（1）虽然大于2的质数都不是偶数，但2既是质数又是偶数，所以命题不成立。

（2）因为9既是奇数又是合数，所以命题不成立。

（3）因为1有唯一的约数1；除此，每一个自然数至少有两个当然的约数——本身与1，所以命题不成立。

（4）例如$\frac{1}{3}=0.333\cdots$，就是一个无限小数，所以命题成立。

（5）无限小数包含了无限不循环小数与无限循环小数。前者不可以化为分数，如$\pi=3.141592659\cdots$，不能用分数表示；后者一定可以用分数表示，例如$0.232323\cdots=\frac{23}{99}$。因此，命题不成立。

（6）两个自然数的和与积显然仍是自然数。两个自然数的差与商就不一定是自然数了，例如$2-3$与$2\div3$都不是自然数。因此，命题成立。

例3（一日千里）

若以数字表示诗中各字如下：

白	日	依	山	尽，	黄	河	入	海	流；
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
欲	穷	千	里	目，	更	上	一	层	楼。
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

今有四字成语一句。第一字为第二字的9倍，第四字比第三字多1，第二字为第四字的$\frac{1}{7}$，第三字比第一字之半多4，则此成语为何？

思考：这道有诗有数的题目，形式新颖，所求表示成语的四个数之间的关系较为复杂，若不咬文嚼字，恐怕难以下笔计算。经过细细咀嚼，我们便可这样分析：

设第二字为1时，则第一字为9，第三字应为$\frac{9}{2}+4$，但诗中的字无小数表示的，故第二字至少应为2。假若第二字为2，则第一字为18，第三字为$\frac{18}{2}+4=13$，第四字为$13+1=14$。又因$14=2\times7$，所以也适合"第二字为第四字之$\frac{1}{7}$"这一条件。于是，所求成语之数为18，2，13，14，即是所求成语为"一日千里"。

例4（原来各有多少钱）

甲、乙、丙三人共有人民币384元，先由甲把自己的钱给乙、丙，给的办法是谁手里有多少钱，甲就给他多少钱。用同样的办法再由乙分给甲、丙最后丙也用同样的办法。分给甲、乙，都分完后，三人的钱数恰好相等。问这三个人原来各有多少钱？

思考：粗看题目，似乎无从下手。怎么办？再细细读题，抓住三个人的钱数恰好相等”咀嚼一番，我们便可想到采用从后往前推算的办法来解决。

事实上，丙把钱分给甲、乙后，三人的钱数恰好相等，即各有128元。但是，甲、乙各自的128元的一半是丙给的，因此可知，丙把钱分给甲、乙之前三人的钱数是：甲有64元，乙有64元，丙有256元。

同理，甲的64元、丙的256的一半是乙给的，由此得知，乙把钱分给甲、丙之前，甲有32元、丙只有128元、乙却有224元。

虽然，甲把钱分给乙、丙之前，乙只有112元，丙只有64元，甲却有208元。

即甲、乙、丙三人原来各有钱208元、112元、64元。

二　循规蹈矩

路人皆知："不依规矩不成方圆"，讲的是办任何一件事情，不按照一定的规律，不采取一定的方法，要想把那件事情办好，是不大可能的。同理，我们要想神奇妙算数学题，就必须按照有关的法则、定律、公式去计算，就必须开动脑筋，寻找规律，发挥机智，巧妙演算，否则将会出现荒谬的结论。

例1（$0=1$）

计算 $1-1+1-1+1-1+\cdots$

解：从第一项起，每两项结合：

原式 $=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

$$=0+0+0+\cdots=0;$$

从第二项起，每两项结合：

$$\text{原式}=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

$$=1+0+0+0\cdots=1$$

由此可见 $0=1$。

显然，这是错误的结论。错在哪里？

大家知道，加法是满足结合律的，然而加法结合律只适用于有限个加数，而式子

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

有无限多个加数，就不能随便使用加法结合律。上面的计算先后两次使用结合律，都是错误的。$0=1$的谬论源出于此。

例2（第一届“从小爱数学”竞赛试题）

右图中有多少条线段？

说明：许多同学看了题目后，可能会想：这道题还不容易，不就是“数数”吗？对！这样的一类问题就是所谓的“计数问题”。你不要以为从幼儿园起就开始学数数，这类问题没什么可讨论的，然而，目前的智力测验题，很多是与这类问题有关的，比较复杂的计数问题到大学里还解决不了呢！

要正确解答这类问题，基本的要求是数数时要做到不遗漏、不重复，因而必须要有次序。有条理地进行。对此，我们给出两种解法。

思考一：如果把图中的线段AB、BC、CD、DE叫作基本线段，那么本题共有下面几种情况，

（1）由一条基本线段构成的有：AB、BC、CD、DE四条；

（2）由二条基本线段构成的有：AC、BD、CE三条；

（3）由三条基本线段构成的有：AC、BE二条；

（4）由四条基本线段构成的有：AE一条。

因此，共有线段 $4+3+2+1=10$条。

思考二：这些线段总有端点，而这些端点只可能是图中的A、B、C、D、E五点，如果我们考虑这些线段的左端点，那么就有下列几种可能：

（1）左端点是A有：AB、AC、AD、AE四条；

（2）左端点是B有：BC、BD、BE三条；

（3）左端点是C有：CD、CE三条；

（4）左端点是D有：DE一条；

（5）左端点是E：不可能；

于是，共有 $4+3+2+1=10$条线段。

值得说明的是，如果考虑右端点也是可以的，但不能同时考虑左和右端点。

象上面思考一和思考二那样，有次序的数，就保证了不漏、不重、答案正确。

可能有的同学会说，这是小题大作，我不这么有次序地数，而是"随便数"，也能得出正确的答案。但你想过没有：首先，"随便数"能不能保证不漏、不重，答案正确？其次，即使这一题数对了，如果题目是：在AE线段中有99个不同的点，问一共有多少条线段？那"随便数"能行吗？虽然不行。如果掌握了上述有次序的思考方法，那就可以迅速而正

确地算出，应该有：$100+99+98+\cdots+3+2+1=5050$ 条线段。

例3（不必通分）

下面是一个有趣的式子：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=?$$

你能正确而又迅速地算出他的结果吗？

说明：同学们看了题目，可能会这样想："要计算这道题光通分就够麻烦的了，怎么能做到迅速而又正确呢？"实际上，只要你仔细分析一下每个分数的分母，就会发现它们都可以看成是由两个连续的自然数的积所组成，而且两两连续地由小逐步增大，排列很有规律。根据这一特点，便可找出窍门，不必通分而巧妙地求出它的结果。

思考：认真审题，不难看出计算式中的每一项分数的分子都是1，分母依次为 1×2，2×3，3×4，4×5，5×6，6×7，7×8，8×9，9×10。对于分子为1，分母为两个连续自然数之积的分数，可以把它分解成两个分数之差。这两个分数的分子都是1，分母恰好分别是这两个自然数，即：

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

因此，题中算式可以这样计算：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+$$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+$$

$$\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+$$

$$(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+$$

$$(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

例4（有趣的计算结果）

假如被乘数和乘数中分别只有数字5和2，其中得数就会出现某种规律，如55×22＝1210。如果被乘数和乘数都是3位数，这时就成了555×222＝123210；如果被乘数和乘数都是四位、五位数，又会怎样呢？请计算后，仔细观察一下，并找出规律来。然后，说出被乘数和乘数都是九位时，积是一个什么数？

思考：当被乘数和乘数各是两位数时，乘积就是四位数，排列顺序是1210，且前两位是12，后两位数依次比前一位数少1；当被乘数和乘数都是三位数（即555×222）时，乘积是六位数，排列顺序是123210，且前三位是123，后三位数也是依次比前一位数少1。

同理，有：5555×2222＝12343210；

55555×22222＝1234543210；

555555555×222222222＝123456789876543210。

即被乘数和乘数都是九位数时，其结果是一个十八位