奥林匹克数学竞赛解谜

整数中的明珠

张文忠 编

西南师范大学出版社

走向世界的窗口

奥林匹克数学竞赛解谜

整数中的明珠

张文忠 编

西南师范大学出版社

1992

责任编辑

赵宏量

奥林匹克数学竞赛解谜
整数中的明珠
张文忠 编

西南师范大学出版社出版发行
（重庆 北碚）
新华书店重庆发行所经销
四川省蓬溪县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：6.75 插页：1字数：132千
1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷
印数：1—3.000

ISBN 7—5621—0678—9/G·492

定价：2.80元

前　言

整数是我们最熟悉的数之一。从古至今，人们以极大的兴趣研究了有关整数的各种问题，取得了很多引人注目的结果，它们象无数闪光的明珠一样在数学的宝库中熠熠生辉。这个小册子就是由整数中的一组明珠编串成的，我把它献给中学里的广大青少年朋友，特别是对奥林匹克数学竞赛有兴趣的青少年。

在这个小册子中，你将看到有关整数的很多有趣而重要的结果；看到数学家们为获取这些明珠而艰苦攀登的历程。这不是一个初等数论的教材，而只是一个关于整数常识的漫谈，因此编写时没有拘泥于一般初等数论书的系统，而仅仅是选择那些易于为中学的同学们接受的生动有趣的内容。为了通俗易懂，凡不宜写出证明的重要结论都只作了叙述性的介绍，也尽力避免中学的同学们所不熟悉的符号，以使具有初中以上数学知识的读者能轻松愉快地阅读它。这本小册子所写的材料，也是当今国际、国内奥林匹克数学竞赛的重要内容之一，几乎各种试题，都少不了有涉及整数的问题。这些问题，可以吸引有志气，有才华，有勇气的广大青少年不断地去探索、去钻研。你可知道，具有生命活动的各种问题正是“数学的心脏”，她吸引人们永不停息地去思维、去创

造、去开拓。

愿数学家们关于整数问题的各种精思妙想能启迪你的数学思维；愿数学家们艰苦攀登的往事能激励你更加勤奋学习！

限于编者的水平，错误难免，欢迎读者指正。

张文忠　1986年
编于邛海之滨
1992年修改定稿

目　录

一、在整数的长河中

一种简单的分类

大家都熟悉整数：

…、－3、－2、－1、0、1、2、3、…，它是由负整数、0和正整数这三部份组成的。其中的正整数

1、2、3、…、n、…

是人们认识得最早的数，通常我们也把它称为自然数。

我们知道，整数是无论怎样也写不完的，它的个数是无穷的。如果我们把整数按上面那样从小到大的排列出来，那就象一条无头无尾的数字长河：它没有最小的数，也没有最大的数。在正整数中没有最大的数，但却有一个最小的数，那就是1。相反地，负整数中没有最小的数而有最大的数，那就是－1。

很明显，两个整数a和b的和、差或乘积仍然是整数，但是b被a（$a\neq 0$）除所得到的商数，可以是整数，也可以不是整数。

当b被a除得到的商数是整数时，假如把它记为d，我们就有$b=ad$，也就是说，b等于a乘上一个整数d。这时我们就说，b能被a整除，或说a能整除b，通常简记作$a|b$。这时b叫做a的倍数，而a叫做b的约数或因数。

例如，2能整除10，－3能整除15，可分别记为$2\mid 10$，$-3\mid 15$。

很明显，1或－1能整除任何一个整数；除开0以外的任何整数都能整除0；任何整数都能整除它本身。

当b不一定能被a整除时，一定能得到一个商数q和一个余数r，即有

$$b=aq+r, \qquad (1)$$

其中q和r都是整数，并且$0\leq r<a$。例如，－10被3除，21被5除，12被6除，可分别写成

$$-10=3\cdot(-4)+2,\quad 21=5\cdot 4+1,$$
$$12=6\cdot 2+0$$

当$r=0$时，就成了a能整除b的情形了。容易证明，对任何整数b，（1）式这种表示方法都只有一种。自然，如果不限定r是小于a的非负整数，就还能写出另外的表达式来，如上述的例子就可写成

$$-10=3\cdot(-3)-1,\quad 21=5\cdot 5-1,$$
$$12=6\cdot 3-6。$$

为了使表示方法唯一，今后我们经常是让r满足：$0\leq r<a$。通常我们也把（1）式这种运算叫做带余除法。

我们知道，如果用能否被2整除作标准，可以将整数分为偶数和奇数的两部份：凡能被2整除的数

$$\cdots、-4、-2、0、2、4、\cdots,$$

叫做偶数；不能被2整除的数

$$\cdots、-3、-1、1、3、5、\cdots,$$

叫做奇数。在讨论整数的问题时，常常需要我们分辨一个数是奇数还是偶数。

下面一些结论是很明显的：

奇数与奇数的和或差都是偶数；偶数与偶数的和或差都是偶数；任何整数与偶数的积都是偶数。奇数与偶数的和是奇数；奇数与奇数的积是奇数。

如果任取两个相邻的整数n、n＋1，很明显，这两数中必有一个是奇数，一个是偶数。因此，两个相邻整数的乘积n（n＋1）一定是偶数。

任取三个整数m、n、k，你容易证明它们中至少有两个数要吗同为奇数，要吗同为偶数。

按照（1）式，偶数n都可以表示成n＝2k的形式，奇数m都可以表示成m＝2k＋1的形式。

类似地，如果我们将整数n用3除，那末只可能出现三种结果：能被3整除，3除余1或3除余2。也就是说，此时整数被分成三类，它们可分别表示成

$$n_0 = 3k,\ n_1 = 3k + 1,\ n_2 = 3k + 2。$$

按照这种思考，我们可以把全体整数分成更多的类。当给定某一个正整数m时，任何一个整数被m除，其余数只能是下面m个数

$$0、1、2、\cdots、m-1$$

中的一个。我们把被m除时余数相同的整数划为一类，这样我们就将整数分成了m类：

$$km,\ km+1、km+2、\cdots、km+(m-1),$$

其中$k = 0、\pm 1、\pm 2、\cdots$。

很容易证明，这样分类以后，同一类中的任意两个整数的差都一定能被m整除。这是因为，同一类中的两个数可以表示成k_1m+r与k_2m+r，因此它们的差

$$(k_1m+r)-(k_2m+r)=(k_1-k_2)m$$

能被m整除。

这种巧妙的分类，对于我们讨论整数的性质是十分有益的。例如，我们来看一个简单的问题：

若a、b都不是3的倍数，试证a+b和a−b中有且仅有一个是3的倍数。

要证明它就需要按上面的方法将a、b分类后再进行讨论。因为a、b都不是3的倍数，那末，a可以写成$3k_1+1$或$3k_1+2$，同样，b可以写成$3k_2+1$或$3k_2+2$，这里的k_1、k_2都是整数。若a、b被3除的余数相同（即属于同一类），则有

$$a-b=3(k_1-k_2),$$

是3的倍数，而

$$a+b=3(k_1+k_2)+2,\text{ 或}3(k_1+k_2)+4,$$

不是3的倍数。若余数不同，则有

$$a+b=3(k_1+k_2+1),$$

是3的倍数，而

$$a-b=3(k_1-k_2)-1,\text{ 或}3(k_1-k_2)+1,$$

不是3的倍数。综上所述，可知所说的结论正确。

以后你还会看到应用这种分类方法的大量例子。

素数与合数

现在让我们把注意集中到正整数上来。

在正整数中，数1只能被一个正整数整除，那就是1本身，即是说，1只有一个正因数。它是一个极为特殊的数。

显然，任何大于 1 的整数 n，至少能被 1 和 n 这两个数整除，即是说，它至少有两个正因数。如果一个大于 1 的整数 p 只能被 1 和 p 这两个数整除，如

2、3、5、7、11、13、17、…，

这种数叫做**素数**或**质数**。此外的正整数 n，如

4、6、8、9、10、12、14、…，

它们除掉 1 和本身以外还能被别的正整数所整除，这种数叫做**合数**。

这样一来，全部正整数按其正因数的多少被分成了三类：素数（仅有两个正因数）、合数（正因数多于两个）和既不是素数也不是合数的数 1（仅有一个正因数）。

素数是数论研究的主要对象之一，后面你会看到，数论中不少引人注目的问题和令人惊奇的结论都与素数有关。

容易看出，在偶数中，只有唯一的一个素数，那就是 2。其余的素数都是奇数，而且个位数字为 5 的素数也只有 5 这一个。这就是说，除掉 2、5 以外，素数的末位数字只可能为 1、3、7、9。

人们很早就知道了素数的个数是无穷的*，但实际上要判明一个较大的数是不是素数却是十分困难的。到现在我们所知道的最大一个素数是 $2^{44497}-1$，这是一个13395位的数，而且小于此数的有限个素数我们也没有全搞清楚。相反地，你要想写出一个很大的合数，到是一件很容易的事。

为了判别素数和合数，两千多年来，人们曾作过大量的尝试和猜想。在复杂的规律面前，甚至数学家也会轻信自己的归纳而出错。

---

*，几种证明见《无穷无尽的素数》一节。

例如，1556年坦塔格利亚(Tartaglia)在研究下面的数列

$1+2+4$、$1+2+4+8$、$1+2+4+8+16$、…

时发现，它的前面几项是7、15、31、63、127、255，其中7、31、127是素数，而15、63、255是合数。于是他猜想：上面数列中的各项交替地为素数和合数。

他这个猜想是错的，因为接下去的第7项是$511=7\cdot73$，除掉1与511以外，它还能被7或73整除，故不是素数而是合数。进一步你可以推出，这个数列的第n项为

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n+1}=\frac{2^{n+2}-1}{2-1}=2^{n+2}-1。$$

当$n=2k$为偶数时，它确实都是合数，这是因为这些偶数项为

$$a_n=2^{2k+2}-1=2^{2(k+1)}-1=(2^{k+1}-1)(2^{k+1}+1)$$

容易证明，上面的数列中，有无数个奇数项都不是素数而是合数。例如，当n为形如$6k+1$的奇数时，

$$a_n=2^{(6k+1)+2}-1=2^{3(2k+1)}-1$$
$$=(2^{2k+1}-1)(2^{2(2k+1)}+2^{2k+1}+1)$$

就是合数，这里$k=1$、2、…。

又如，1509年迪布凡尔(DeBouvelles)对照了形如$6n+1$和$6n-1$的两类奇数，当n取前面几个正整数时，得到如下的数对：

7、5，　13、11，　19、17，

25、23，　31、29，　37、35，…。

每个数对中都至少有一个数是素数。于是他猜想：对所有

$n\geq 1$，$6n+1$和$6n-1$中至少有一个是素数。

只要验证到$n=20$，就会看出这个猜测也是错的。因为这时$6n+1=121=11\cdot 11$，$6n-1=119=7\cdot 17$都是合数。当$n=24$、31、36时，这结论也不成立。进一步你还可以证明，有无限多个n能使数对$6n+1$和$6n-1$同时都为合数。例如，当$n=77k+20$，$k=0$、1、2、…时

$$6n+1=6(77k+20)+1=11(42k+11),$$

$$6n-1=6(77k+20)-1=7(66k+17),$$

都是合数。

设法分解因式，是我们证明一些数是合数的重要方法之一。

例如，若$a>1$为整数，试证a^4+4是合数。

这只需我们注意到，当$a>1$时，

$$\begin{aligned}a^4+4&=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2\\&=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)\\&=[(a-1)^2+1][(a+1)^2+1],\end{aligned}$$

由于$a>1$，右端的两个因数都是大于1的整数，故a^4+4是合数。你不难把它推广：若a为整数，m、n为非负整数，则$a^{4m}+4^{2n+1}$是合数。

类似地，若$n>1$为整数，则$4n^4+1$是合数。

因为$4n^4+1=(2n^2+1)^2-4n^2=(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)$。

又如，若$p\geq 5$为素数，求证p^2+2是合数。

因$p\geq 5$是素数，那p一定是奇数。如果直接将p表示成$2k+1$的形式，你会发现，要想对$(2k+1)^2+2$分解因

式是困难的。这类问题常常需要你把整数分成更多的类，比如全部奇数分成$6k\pm1$和$6k+3$这三类，由于$6k+3$是3的倍数，故p只可能是形如$6k\pm1$的数，其中$k\geq1$，这时有

$$p^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3$$
$$=3(12k^2\pm4k+1)。$$

显然$12k^2\pm4k+1>1$，所以p^2+2是合数。

你可以类似地证明：如果$p\geq5$是素数，且$2p+1$也是素数，那$4p+1$一定是合数。

这是因为，若将整数分为$3k$、$3k+1$、$3k+2$这三组那素数p只能形如$3k+1$或$3k+2$，其中$k\geq1$。如果$p=3k+1$，则

$$2p+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)。$$

这与$2p+1$也是素数的条件矛盾，故只可能$p=3k+2$，于是

$$4p+1=4(3k+2)+1=3(4k+2),$$

由于$4k+2>1$，因此$4p+1$是合数。

如果随意地写出一个较大的奇数，要想判定它是不是合数，常常是十分困难的。后面你会看到，人们在很长的时间中曾把某些合数误认为是素数的著名例子。只有判定有2、3、5、11等因数的合数才是比较容易的。

素数的筛选

虽然素数的定义十分简明，但要在整数的长河中判定一个稍大一点的数是不是素数，却是件很不容易的事。

在寻求素数的方法中，最古老而有效的要算公元前三世纪时古希腊的著名数学家埃拉托色奈斯（Eratosthened）的

"筛法"。这个筛法所依据的是下面这条明显的结论：

若n是一个合数，则必能被一个不超过$\sqrt{n}$的素数p所整除。这是因为，若$n=pd$，其中p是n的大于1的因数中最小的一个，那p一定是素数且$p\leq d$。于是$n=pd\geq p\cdot p=p^2$，故$p\leq\sqrt{n}$。

筛选是这样进行的：把要判定的1到n各数依次写出（如右图写出1到100），然后开始逐个的审查。头一个是1，不是素数，划掉，再看下一个2，2是素数，留下，并划掉后面全部2的倍数2、4、6、…。再看下一个3，3是素数，留下，并划掉全部3的倍数9、15、21、…。下一个未划掉的5是素数，留下，并划掉所有5的倍数。依此继续，一直到所有小于或等于$\sqrt{n}$的各数都审查完为止，这时留下的数就是小于或等于n的全部素数。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

在划掉5的倍数时，我们发现实际上只要从$5^2=25$处