力学名著译丛

有限元法

上册

〔英〕O. C. 监凯维奇 著

科学出版社

力学名著译丛

有限元法

上册

〔英〕O. C. 监凯维奇 著

尹泽勇 江伯南 译

唐立民 刘迎曦 校

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书论述有限元法的一般理论，介绍有限元法在工程技术各个领域中的应用，并有专章说明有限元法如何在计算机上实现.

原书分上、下册翻译出版. 上册包括原书的第一章至第十六章. 它给出有关的预备知识，讲述有限元法的一般理论，并着重介绍有限元法在二维、三维、板壳等线性弹性固体力学问题中的应用.

本书可供高等院校师生及有关的科技人员参考.

O. C. Zienkiewicz

The Finite Element Method (third edition)

McGraw-Hill, 1977

力学名著译丛

有 限 元 法

上 册

〔英〕O. C. 监凯维奇 著

尹泽勇 江伯南 译

唐立民 刘迎曦 校

责任编辑 魏茂乐

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第一版 开本：850×1168 1/32

1985年10月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：精 1—4,000 插页：精 2

平 1—5,700 字数：372,000

统一书号：13031·2975

本社书号：4205·13—2

定价：布脊精装 4.80 元

平 装 4.00 元

序　言

可以把本书看作1967年首次出版的“The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”一书*的第三版．虽然书的篇幅现在大约是原来的三倍，但写作的目的相同；首先是为了教学，其次是为了提供一个关于有限元法发展水平的概貌．现在已认识到，有限元法对于从事实际工作的工程师和物理学家以及研究工作者都是相当重要的．

从第一本书写出以来，关于有限元法的研究论文和书刊的数量几乎按指数规律增长．公开发表的文献将近8000篇，内部报告等就更多[1]．在早期，投稿者几乎都是工程师；而今天，有许多则是来自数学界，他们现在已采用了有限元法，并对理解这种方法作出了很大贡献．显然，在这样一个阶段，一本书公正地反映出所有的观点是不现实的；在本书中，必须对文献进行大量的筛选工作，以表明作者的观点．作者的观点是既承认数学基础的重要，又承认直观的创造性思想的必要．因此，本书从物理离散系统的基本知识讲起，并通过大家很熟悉的弹性力学例子介绍有限元近似，但在第三章中给出了基本的数学近似的概念（这里采取一种避免使用难懂的术语并且不拘泥于形式上的严格的方式，以适于工程师或物理学家，为此向数学家致歉）．然而，在后面的某几章中，我们表

* O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”, McGraw-Hill, 1967. 有中译本，《结构和连续力学中的有限单元体法》，上海交通大学《有限单元体法》翻译组译，国防工业出版社，1973. ——译者注

1) 由诺里（D. Norrie）与德夫里斯（G. de Vries）编辑的极好的文献目录（IFI/PLENUM 1976）表明如下的文献发表速率，括号中的数字表示该年内发表的论文篇数：1961(10)；1962(15)；1963(25)；1964(33)；1965(67)；1966(134)；1967(162)；1968(303)；1969(531)；1970(510)；1971(844)；1972(1004)；1973(1169)；1974(1377)；1975(880，不完全)．

明，能够怎样成功地修正和违反某些通常承认的准则．特别是在第十一章中，给出了这方面的某些最新进展，表明能够通过不精确积分来抵消误差，等等．

现在能够如此广泛地作出有限元法的一般定义（见第三章），以便包括其它有用的近似方法．特别是，有限差分法现在可被看成是这种方法的一个子类，而（借助一些想象）近来已很成功地用于某些类型的问题的边界积分法也能置于这一一般定义之下．作出这种一般化定义有两个目的．第一是增进我们的理解，第二是以统一方式有选择性地把各种方案的优点结合在一起．在第二十三章中，介绍把边界积分法与有限元法结合起来的最新进展．

今天，有限元法的应用如此广泛，以致不可能在一本书中作出毫无遗漏的介绍．但是读者将看到，在本书中，线性及非线性固体力学、流体力学、热传递及电磁学这些主要领域都受到了一定注意，他可根据自己的兴趣作出适当选择．显然，我们不主张在一门课中学习整本书，采用本书的教师应当适当地挑选一些章节．然而，对于我们每个人迟早要涉及的许多活动领域，书中给出了相当完备的参考文献，希望通过这种全面介绍将证明有限元法的用处．本教科书的底稿曾按不同的教学要求成功地使用过，教学内容为第一章至第三章，教学对象分别是大学生、研究生以及与有限元法的发展有关的工作人员．必须具备的数学及力学知识几乎不超过一般工科或理科大学课程的水平，而象矩阵、向量这样一些抽象的题目，在附录中作了详细说明．

有限元法过程的成功主要取决于熟练应用计算机及有效的数值方法．全书中只强调了后者，但在泰勒（R. L. Taylor）教授所写的最末一章中，将加利福尼亚大学（伯克利）与威尔士大学（斯温西）的程序设计的许多经验综合于一个相当完备的计算机系统中，读者可以直接利用这个系统解决各种问题，或者很容易地把它扩充以适应自己的需要．为了简单起见，限制了该系统的能力．这同时也避免了对于机器的依赖性．但是，扩大这个系统的规模是容易办到的．

第三版中译本序言

1981 年 5 月，我首次访问了中国并获悉本书的中译本将近完成，这使我非常愉快. 这次访问机会是由合肥有限元邀请学术报告会提供的. 会上，除了中国方面的对等学者外，几位来自美国的同行、朋友以及我本人也都作了报告. 我发现中国的有限元工作取得了如此之多的进展，既有应用又有理论. 许多工作是我以前不知道的，而使我个人感到快慰的是，看到我以前的书在某种程度上对这些工作有所帮助.

在合肥会议期间建立了许多友谊，我希望它保持下去. 因此，谨愿将此书奉献给我的许多中国朋友和从事有限元工作的同行. 这里我愿特别提到大连工学院的钱令希、唐立民、林少培等教授，清华大学的钱伟长教授，中国科学院计算中心主任、中国科技大学数学教授冯康，他们曾以闻名的中国式好客作风对我盛情接待.

O. C. 监凯维奇

符　号　表

虽然所有的符号都在书中初次出现处予以定义，但是为了容易查阅，下面列出这本书中所用的主要符号．在许多情况下，不得不在较小的范围内采用附加的一些符号，出现符号含义不唯一的问题．为此在文中作了适当说明，以期避免混乱．

这些符号大体上按其出现的章次列出．

用黑体字表示矩阵及列向量，例如 $\mathbf{K}$ 及 $\mathbf{a}$，而 $\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbf{K}$ 的转置．用圆点表示对于一个变量的导数，例如 $\frac{d\mathbf{a}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{a}}$ 等．

章次	符号	
1	$\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}$	节点位移，总体位移
	$\mathbf{q}_i^e$	节点 i 处由单元 e 引起的节点力
	$\mathbf{K}^e$, $\mathbf{K}$	元素刚度矩阵，总刚度矩阵
	$\mathbf{f}_{pi}^e$	节点 i 处由 p 引起的单元节点力等
	$\mathbf{r}_i$	外部节点力
	$\boldsymbol{\sigma}$	应力(向量)
	$\mathbf{L}$, $\mathbf{T}$	变换矩阵
	$\mathbf{b}$	与 $\mathbf{a}$ 不同的另外一组参数
	$\mathbf{u}$	位移向量(分量为 u, v, w)
2，4，5，6	$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变(向量)
	$\mathbf{L}$	应变算子
	$\mathbf{N}$	(位移)形状函数
	$\mathbf{B}=\mathbf{LN}$	应变形状函数
	$\mathbf{D}$	弹性矩阵
	$\mathbf{b}$	体力(向量)
	E	弹性模量

章次	符号	
	ν	泊松比
	$\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$	初应变,初应力
	$\mathbf{t}$	边界力
	b_x, t_x 等	体力及边界力的 x 方向分量
	ε_x, ν_{xy}, σ_x, τ_{xy}	正应变及正应力、剪应力的 x 方向分量
	U	变形能
	W	载荷位能
	Π	总位能
	$\mathbf{I}$	单位矩阵
	h	代表的单元尺寸
	ϕ	体力位势(或其它标量函数)
	$\boldsymbol{\phi}$	体力位势的节点值
	$\mathbf{m}^{\mathrm{T}} = [1, 1, 0]$(或 $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$)	二维或三维应变/应力向量的与克罗内克(Kronecker)符号等价的矩阵
	$x, y, z, x', y', z', r, z, \theta$	笛卡儿直角坐标及柱坐标
3	$\mathbf{A}(\mathbf{u})$, $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ 等	定义控制微分方程及边界条件的算子
	$\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\phi}$, ϕ	未知函数
	$\mathbf{v}$	“试探”函数
	$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 等	确定试探展开式 $\mathbf{u} \simeq \mathbf{Na}$ 的节点(或其它)参数
	$\mathbf{w}_j$	权函数
	Π	驻值泛函
	$\mathbf{L}$	线性微分算子
	$\mathbf{C}(\mathbf{u})$	施于 u 的约束条件
	λ	拉格朗日乘子
	$\mathbf{n}^{\mathrm{T}} = [n_x, n_y, n_z]$	边界的法线向量

章次	符号	
	α	罚数
	∇	梯度算子 $=\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]^T$
7, 8, 9	l_k^n	拉格朗日多项式
	$\xi, \eta, (\zeta)$	二维或三维单元曲线坐标
	$L_1, L_2, (L_3)$	三角形(面积)或四面体(体积)坐标
	$\mathbf{J}$	雅可比矩阵
	H_i, w_i	求积的权
10	w	板的挠度
	M_x, M_y, M_{xy}	广义应力分量(力矩)
	θ_{xi}, θ_{yi}	转角
	H_{mi}^n	厄米特多项式
	t	板厚
11	K, G	体积模量,剪切模量
12	$\mathbf{G}$	联系应力与边界力的算子
13	$\mathbf{K}^b, \mathbf{K}^p$	分别是弯曲及面内的刚度矩阵
	$\lambda_{x'y}$ 等	x' 轴与 y 轴间的方向余弦等
	$\mathbf{V}_{ij}$	连接点 i 与点 j 并指向点 j 的向量
	l_{ij}	向量 $\mathbf{V}_{ij}$ 的长度
14	ϕ	壳体切线与 Z 轴的夹角
	R_s 及 r	曲率半径
17	$\mathbf{k}, k$	渗透性矩阵,渗透系数
	$\mathbf{H}$	离散问题的矩阵
	p	压力
	ϕ	位势
18, 19	$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a})$	非线性离散方程的算子
	$\mathbf{K}_T$	切线矩阵
	F	屈服函数
	Q	塑性位势

章次	符号	
	$\mathbf{K}_\sigma$	初应力矩阵
20，21	$\mathbf{M}$	质量矩阵
	$\mathbf{C}$	阻尼矩阵
	ω_i, $\bar{\mathbf{a}}_i$	第 i 个特征值,第 i 个特征向量
	ω	频率
	y_i	模态参与因子
	λ	特征数
	$\mathbf{u}$	速度向量
22	μ	粘度
	ρ	密度
	R_n	雷诺数
	α	迎流参数
23	H_0	汉克尔函数
	K_{I}, K_{II}, K_{III}	应力强度因子

目　　录

第一章

一些预备知识：标准的离散系统

1.1 引言

人类的能力是有限的，不能一下就弄清复杂的环境及人类制品的性态．因此，我们先把整个系统分成性态容易了解的单个的元件或“单元”，然后由这些元件重建原来的系统以研究其性态，这是工程师、科学家甚至经济学家都采用的一种自然的方法．

在许多情况下，利用有限个已完全确定了的元件得到合适的模型．我们把这种问题称为离散的．在另外一些情况下，剖分是无限地继续的，问题只有利用无穷小这一数学虚构才能定义．这导致微分方程或与其等价的表达形式，它意味着无限个单元．我们把这种系统称为连续的．

随着数字计算机的出现，求解离散的问题一般比较容易，即使单元数目非常之大也是如此．因为所有计算机的能力都是有限的，连续的问题只有通过数学运算才能精确求解．在这里，可用的数学方法通常使这种可能性限于过分简化的情况．

为了克服实际的那类连续体问题的不易处理性，工程师及数学家们不时地提出各种离散化方法．这些方法都包含着近似．它是这样一种近似：当离散变量的数目增加时，它如所希望的那样逼近于真实的连续解．

数学家及工程师用不同的方法实现了连续体问题的离散化．数学家建立了可直接应用于问题的控制微分方程的一般方法，象有限差分近似[1,2]，各种加权余值法[3,4]以及求适当定义的“泛函”的驻值的近似方法．另一方面，工程师经常更直观地处理这个问题，他们的办法是建立实际离散单元与连续区域的有限部分之间的模

拟. 例如在固体力学领域中，早在本世纪四十年代，麦克亨利(McHenry)[5]、雷尼柯夫（Hrenikoff)[6]和纽马克（Newmark)[7] 就已表明，用简单弹性杆排列代替连续体的各个小部分，能够得到连续介质问题的相当好的解答. 后来，在同一领域中，阿吉里斯(Argyris)[8] 及特纳（Turner）等人[9]提出了一种更直接、但又不失直观性的性质替代法，即认为连续体中的小块或"单元"以某种简化的方式表述性态.

"有限单元"一词的产生正是来自这种工程的"直接模拟"的观点. 克拉夫（Clough)[10] 是第一个采用这一术语的人，这一术语意味着直接应用可用于离散系统的标准研究方法. 无论在概念上还是从计算的观点来看，这都是极端重要的. 在概念上，使我们对方法的理解得到改善；在计算上，可对各种问题应用统一的方法并研制出标准的计算程序.

从六十年代初期以来，已经取得了许多进展；现在，纯数学的方法与"模拟"的方法已经完全一致了. 本书的目的是，把有限元法作为求解数学表述的连续体问题的一种一般离散化方法来介绍.

在分析离散性问题方面，多年前就已建立了标准的方法. 处理结构问题时，土木工程师首先对于该结构的每个单元计算力-位移关系，然后按照一定的方式在结构的每个"节点"或连接点处建立局部平衡，以此集合整个结构. 由这些方程就可以解出未知位移. 类似地，处理电气元件（电阻、电容等）或水流管道网络问题时，电气工程师及水力工程师首先对于单个元件建立电流（流量）与位势之间的关系，然后通过保证流量的连续性来集合整个系统.

所有这些分析都遵循一种可普遍适用于离散系统的标准方式. 因此，可以定义一个标准的离散系统，而本章将主要讲述如何建立适用于这种系统的方法. 这里所介绍的大部分内容工程师们都已了解；但是，在这里重复一下是适当的. 因为求解弹性固体结构问题一直是走在前面的活动领域，所以首先介绍它，接着介绍其它领域的例子，最后作全面的推广.

由于处理“标准的离散问题”的统一方法是现成的，对于作为求解连续体问题的近似方法的有限元法，我们先作如下定义·

(a) 把连续体分成有限个部分，其性态由有限个参数所规定.

(b) 求解作为其单元的集合体的整个系统时，所遵循的规则与适用于标准离散问题的那些规则完全相同.

将会看到，许多经典的数学近似方法以及工程中所用的各种直接近似方法都属于这一范畴. 因此，难以确定有限元法的起源及发明它的准确时间.

表 1.1 示出了导致现代有限元法的发展过程. 第三章将更详细地给出由经典工作[11-20]发展而来的数学基础.

1.2 结构单元与系统

为了向读者介绍离散系统的一般概念，我们首先考察一个线性弹性结构力学例子.

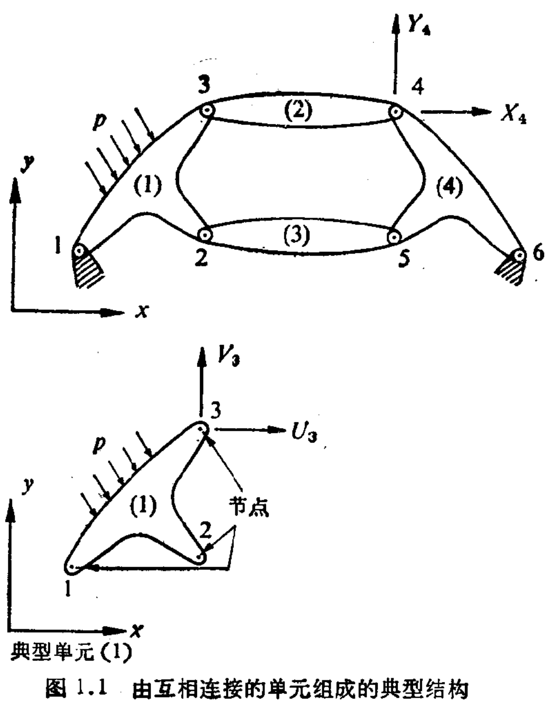
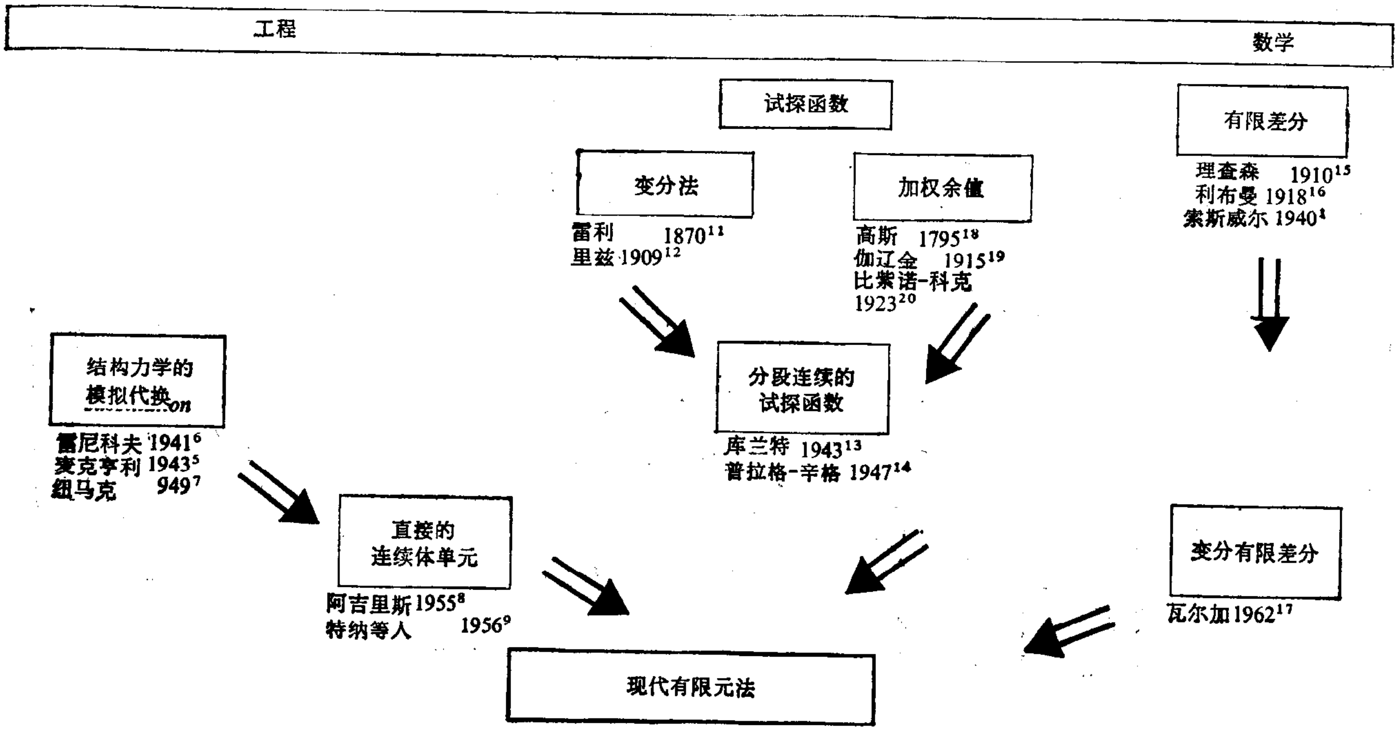


图 1.1 由互相连接的单元组成的典型结构

表 1.1 有限元法的系谱图



用图 1.1 表示一个二维结构，它由单个元件集合而成，这些元件在编号为 1 至 n 的节点处互相连接起来． 在这里，节点处的连接是铰接，因而节点不能传递力矩．

我们首先假设，每个元件的特性已通过别的计算或实验结果完全确定．于是，如果考察典型元件(1)及相应节点 1，2，3，则各节点处作用的力由这些节点的位移、作用于该元件上的分布载荷(p)以及该元件的初应变唯一确定．初应变可以由温度、冷缩或者就是初始的装配误差引起．力及相应位移用公共坐标系中的相应分量 (U，V 及 u，v) 来表示．

把作用于元件(1)上所有节点（在所示情况下是三个）处的力列成一个矩阵[1]，我们有

$$\mathbf{q}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{q}_1^1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}, \cdots, \tag{1.1}$$

对于相应的节点位移则有

$$\mathbf{a}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^1 \\ \mathbf{a}_2^1 \\ \mathbf{a}_3^1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}_1^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \cdots. \tag{1.2}$$

假设元件为线性弹性体，则特征关系将总是如下形式:

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}^1\mathbf{a}^1 + \mathbf{f}_p^1 + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1, \tag{1.3}$$

式中 $\mathbf{f}_p^1$ 表示各节点固定时与作用于该元件上的任意分布载荷相平衡的节点力，$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1$ 表示平衡任一初应变（例如，当各节点固定时，可由温度变化所引起）所需要的节点力． 第一项则表示由节点位移引起的节点力．

类似地，通过事先的分析或实验，可以用节点位移唯一地确定元件中任意一个或几个指定点处的应力或内部反力． 用矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^1$

1) 阅读本书需要一点矩阵代数知识．矩阵代数对于书写的简洁是必要的，它构成一种方便的簿记形式．对于不熟悉矩阵代数的读者，书末有简要的附录，其中给出了足够的矩阵代数基本知识，以利他们阅读本书．全书中矩阵(及向量)用黑体字表示．

表示这些应力，可得如下形式的关系式：

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{S}^1\mathbf{a}^1 + \boldsymbol{\sigma}_p^1 + \boldsymbol{\sigma}_{1_0}^e, \tag{1.4}$$

式中最后两项分别是各节点固定时由分布载荷引起的应力及初应力.

矩阵 $\mathbf{K}^e$ 及 $\mathbf{S}^e$ 分别称为元件 (e) 的刚度矩阵及应力矩阵.

关系式(1.3)及(1.4)是以具有三个节点并且每个连接点处只能传递两个方向的力的元件为例来说明的. 显然，同样的论述及定义将普遍适用. 图 1.1 所示假想结构的元件 (2) 就只有两个连接点，有的元件则可能有很多这种点. 另一方面，如果节点处刚性连接，则必须考虑有三个分量的广义力及广义位移，它们的后一个分量分别对应于力矩及转角. 对于刚性连接的三维结构，一个节点处力及位移的分量分别为六个. 因此，一般说来有

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^e \end{Bmatrix} \quad 及 \quad \mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^e \end{Bmatrix}, \tag{1.5}$$

每个 $\mathbf{q}_i^e$ 与 $\mathbf{a}_i^e$ 具有相同数目的分量或自由度.

显然，元件的刚度矩阵总是方阵，并具有如下形式：

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e \cdots \mathbf{K}_{ij}^e \cdots \mathbf{K}_{im}^e \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \\ \mathbf{K}_{mi}^e \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

式中 $\mathbf{K}_{ii}^e$ 等是子矩阵，它们也都是方阵，大小为 $l \times l$ 阶，这里 l 是在一个节点处要考虑的作用力分量的数目.

作为一个例子，考察图 1.2 所示某一个二维问题中的一根两端铰接杆. 该杆横截面面积为常数 A，弹性模量为 E. 它承受均布横向载荷 p 及均匀热胀应变

$$\varepsilon_0 = \alpha T.$$

如果杆的两端分别由坐标 x_i, y_i 及 x_n, y_n 所确定，杆的长度可算出为

$$L = \sqrt{\{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2\}},$$