现代数学译丛

# 单叶函数

Ch. 泊茂仁克 著

科学出版社

现代数学译丛

# 单叶函数

Ch. 泊茂仁克 著

杨维奇 译

科学出版社

1987

## 内 容 簡 介

本书是几何函数论方面的一本名著，介绍单位圆盘内单叶函数的理论，即单连通平面域的共形映照理论．第一部分讨论处理极值问题（例如比伯巴赫猜想）的各种方法；第二部分讨论单叶函数的边界性质．各章均附有习题．

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生、教师和数学研究工作者参考．


Ch. Pommerenke

UNIVALENT FUNCTIONS

Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1975

现代数学译丛

**单 叶 函 数**

Ch. 泊茂仁克 著

杨维奇 译

责任编辑 晏名文 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年2月第一版　开本：850×1168 1/32

1987年2月第一次印刷　印张：12 7/8

印数：0001—3,300　字数：338,000

统一书号：13031·3406

本社书号：4860·43—1

定价：3.40元

# 中 译 本 序

我感到十分荣幸，杨维奇副教授把我的关于单叶函数的书译成中文在中国科学出版社出版。中译本改正了英文原版书中存在的一些错误。

撰写本书以来的十年中，尤其是今年，单叶函数理论有了许多新发展。

最重要的进展是比伯巴赫（Bieberbach）猜想已被 L. 狄布仁杰斯（de Branges）证明。基于娄威纳微分方程（6.1 节），并应用阿施凯依和盖斯斐尔关于雅可比多项式的一个结果，狄布仁杰斯证明了米林猜想：若 $f\in S$ 且

$$\log\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)|c_k|^2\leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(n-k+1),$$

$$n=1,2,\cdots.$$

由列别杰夫-米林不等式（3.5 节），从米林猜想即推出罗勃松猜想（1.3 节）；而比伯巴赫猜想则是罗勃松猜想的一个推论。这个证明出人意外的简单。

最近，小伯恩斯坦把关系式（5.1 节）

$$f(z)=O((1-|z|)^{-\alpha})\Rightarrow a_n=O(n^{\alpha-1})$$

中 $\alpha$ 的范围从 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$ 扩充为 $\frac{1}{2}-\eta<\alpha\leqslant 2$，其中 $\eta>\frac{1}{320}$。这也是一个相当惊人的结果。

关于单叶函数边界性质的理论已引起人们浓厚的兴趣，并已

有了很大发展. 例如，若 $f$ 把 $D$ 共形映照成 $G$，那么 $f'(z)$ 的性质同 $\partial G$ 的光滑性之间有着紧密的联系. 这方面的新进展都同重要的函数类 BMO 有关.

如果说由于新近的研究成果而使得本书的部分内容显得过时了，那是应当庆幸的；因为它标志着单叶函数与共形映照是一个极其活跃的研究领域. 我期望在世界的东方和西方，南方和北方，出现更加振奋人心的新成果。

Ch. 泊范仁克

一九八四年九月于柏林

# 序　言

扩充复平面内每个单连通区域可以共形映照到一个标准区域，如单位圆盘．本书阐述单位圆盘内的单叶函数(即内射亚纯函数)的理论(若更方便时也讨论单位圆外部的单叶函数)．

第一部分论述在研究极值问题(如比伯巴赫猜想)中产生的各种方法．我们所论及的方法相当齐全，只是略去了对称化方法(参看 Hayman 第四章或 Jenkins 第八章)和对系数体的精密研究(见 Schaeffer and Spencer)．关于单叶函数的大量的研究成果，我们当然只能论证其中的一部分．而关于多连通区域和多叶函数的理论，本书没有涉及．关于二次微分的一章系由盖尔德·珍生撰写，其中有珍肯斯一般系数定理的证明．

本书第二部分论述单叶函数的边界性质．在材料的选取上作者的倾向性十分明显，全部论述系建立在正规函数理论的基础之上．我们几乎没有提及诸如调和测度和极值长度这样一些重要题目，因为有关这些问题已有十分出色的著作，如 Nevanlinna, Jenkins 和 Ahlfors《共形不变量》．对拟共形映照本书只作概略的研究．

本书是根据方法而不是根据结果来编排所述内容的，第一部分尤其是这样．因此有时我们用几种不同的方法证明同一结果．

本书各章之间除个别结果外彼此独立．但第一章则不然，全书各章都要用到它的结果；此外我们也广泛地引用格隆斯基不等式和戈鲁辛不等式(第三章、第四章及 5.3 节、9.4 节、11.2 节)．作为阅读本书的必备知识，阿尔福斯的得到公认的教科书在大多数场合下是足够的．

我们常用作者的名字，有时还加上页数来指明所引用的书，例如：(Ahlfors 131 页)系指他的书《复分析》；而以作者名字及发表年分来表示某篇论文，若引用作者同一年发表的好几篇论文，则

添加字母以区别，例如：(Ahlfors 1963)系指他的关于拟共形反射的论文. 我们的参考文献并不倾向于搞得十分精确；比如就某个结果提到好几位作者时，常常意味着先提及的论文所包含的结果具有较弱的形式. 引用同一节内某式时用其编号表示，仅在提到不同章节中某式时才添上节的号码.

关于单叶函数理论还有几种各有所侧重的论述，例如Gattegno and Ostrowski 1949a, b 及 Hayman 1965; 也可参看珍肯斯的书和戈鲁辛(英文新版)的书. 裴尔那迪编制了一个相当完全的文献目录(见 Bernardi 1966).

在此谨向许多我曾有机会同他们讨论过单叶函数的数学家致谢，特别要感谢 D. 阿哈罗诺夫(1971)，J. 贝克尔，K. 宾莫尔，J. 克鲁涅，W. 海曼，J. 呼梅尔 (1972a) 和 G. 珍生. 衷心感谢 J. 贝克尔、D. 布拉纳恩和 B. 伊克，他们阅读了手稿并提出了许多改进意见. 感谢宣荅尔夫人为我打字，T. 菲利茨替我校对，L. 泊茂仁克夫人给本书绘图. 本书是在柏林工业大学与伦敦皇家学院的支持下写成的.

一九七三年十一月于柏林

# 目　　录

# 第一章　一些基本结果

这一章旨在叙述单叶函数的一些经典结果，这些结果是以后一系列更深刻的结果的背景. 因此，本章的材料将为全书所需，其中绝大部分内容大概已为读者所熟知. 对于尚未解决[1]的比伯巴赫（Bieberbach）猜想问题的研究进展情况，我们也将作一概述.

## 1.1　单叶函数

**1.** 设$H$是扩充复平面 $\hat{\mathrm{C}}=\mathrm{C}\cup\{\infty\}$ 内一区域. 我们把在$H$内亚纯并且内射(即一一对应)的函数称为在$H$内单叶.

与通常的单叶性定义不同，我们的单叶性定义中已包含了函数亚纯的假设. 因此，函数$f(z)$在$H$内单叶当且仅当 $f(z)$ 在$H$内除去至多一个极点之外解析，并且

$$f(z_1)\neq f(z_2)\ \ (z_1,\ z_2\in H,\ z_1\neq z_2).$$

在$H$内单叶的函数必在$H$的每一子域内单叶.

最简单的单叶函数是麦比乌斯（Moebius）变换

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ \ (a,b,c,d\in \mathrm{C},\ ad-bc\neq 0).$$

现列举单叶函数的一些性质.

设 $f(z)$ 在$H$内单叶，则

(a) 若$g$在$G$内单叶，且 $f(H)=\{f(z):z\in H\}\subset G$，则复合函数 $g(f(z))$ 在$H$内单叶. 特别，$1/f(z)$ 单叶当且仅当 $f(z)$ 单叶.

(b) 一解析函数在一点某邻域中内射当且仅当其导函数在该点不为零（Ahlfors 131 页）. 因此，对 $z\in H$ 有 $f'(z)\neq 0$. 其

---

1) 比伯巴赫猜想已由 Louis deBranges 证实(见中译本序)，文中指的是撰写本书时的情况. 以下均如此，不再一一说明. ——译者注

逆不真. 例如,函数 $\exp(2\pi z)$ 的导数不等于零,但在 $|z|<1$ 内非单叶.

若 $f(z)$ 在点 $z_0$ 有一极点,则 $1/f(z)$ 在 $z_0$ 的邻近解析单叶,从而在 $z_0$ 有非零导数. 这推出 $z_0$ 必是 $f(z)$ 的单极点.

(c) 函数 $f(z)$ 把 $H\subset\hat{\mathbf{C}}$ 一一映照为 $f(H)\subset\hat{\mathbf{C}}$, 并且在球面度量下连续. 因反函数亦亚纯,故 $f$ 是 $H$ 到 $f(H)$ 的一个同胚. 因而所有在拓扑映照下不变的性质,如连通性,在单叶映照下仍然保持. 经常要用到如下拓扑性质: 若序列 $(z_k)$, $z_k\in H$, 收敛于 $\partial H$(即在 $H$ 内无极限点),则其像点序列 $(f(z_k))$ 必收敛于 $\partial f(H)$ (Ahlfors 225 页).

(d) 若曲线 $C:z(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 是 $H$ 内一条光滑若当(Jordan) 弧 ($z'(t)$ 连续且不为零称为光滑), 则像曲线 $f(C)$: $f(z(t))$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 是 $f(H)$ 内的光滑若当弧. $f(C)$ 在点 $f(z_0)(z_0=z(t_0))$的切线与正实轴的夹角为 $\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$, 若 $z_0=\infty$ 或 $f(z_0)=\infty$, 结论要作一些容易想到的改变. 由此可知, 过点 $z_0$ 的两曲线的交角同像曲线在 $f(z_0)$ 的交角相同. 因此, 单叶映照是共形同胚.

(e) 设 $A\subset\mathbf{C}$ 是 $H$ 的紧子集,它不含 $f$ 可能有的极点. 则其像集的(欧氏)面积

$$\operatorname{area} f(A)=\iint_A |f'(z)|^2 d\Omega,$$

$d\Omega$ 表示面积元素. 这是一个勒贝格 (Lebesgue) 积分. 若 $A$ 为若当可测,上述结果仍成立,而积分则成为黎曼积分.

**2.** 往后我们将只限于考虑单连通区域 (Ahlfros 139 页). 用记号

$$D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\},\ \Delta=\{z\in\hat{\mathbf{C}}:|z|>1\}$$

分别表示单位圆盘和单位圆周的外部. 单位圆周 $\{|z|=1\}$ 用 $\partial D$ 或 $\partial\Delta$ 表示, $\partial$ 是表示边界的符号.

单叶函数全部理论的出发点是如下这个令人惊异的, 且对高维情形没有明显类似结论的重要定理:

**黎曼 (Riemann) 映照定理** 设 $G \subsetneqq \mathbf{C}$ 是单连通区域，$w_0 \in G$，$0 \leqslant \alpha < 2\pi$. 则存在唯一的单叶函数 $f(z)$ 把 $D$ 映为 $G$，且满足 $f(0) = w_0$，$\arg f'(0) = \alpha$.

定理的证明可在许多教科书中找到(如 Ahlfors 222 页). 黎曼映照定理表明，作为几何对象的单连通区域与作为分析对象的经适当标准化的单叶函数之间存在一一对应. 需要强调的是，在定理中不能同时规定 $|f'(0)|$ 取指定的值.

现给出定理唯一性部分的一个典型应用：设 $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ ($a_1$ 为实数)在 $D$ 内单叶，$f(D)$ 关于实轴 $\mathbf{R}$ 对称. 考虑

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = a_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \cdots.$$

因 $\bar{f}(D) = f(D)$ 我们断定 $\bar{f}(z) \equiv f(z)$，从而系数 $a_n$ 皆为实数.

反射原理 (Ahlfros 227 页)表明，若区域 $G$ 以一条解析若当曲线为其边界，则映照函数在 $\overline{D}$ 解析. 第九章将详细研究函数的边界性质.

以 $S$ 表示由在单位圆盘内解析单叶的函数

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

组成的类. 这些函数已作了标准化：$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$. 黎曼映照定理中的函数不必属于 $S$，但可表为

$$w_0 + r_0 e^{i\alpha} f(z),\ f \in S.$$

其中 $r_0 = r_0(G, w_0)$ 由 $G$ 和 $w_0$ 所唯一确定，称为区域 $G$ 关于点 $w_0$ 的“内映照半径”.

施行这种标准化是为了消去不必要的参数，使结论的陈述简化. 并且如此作成的空间 $S$ 是紧的，而由所有 $D$ 内解析单叶函数作成的空间则不然.

**例 1.1** 考虑寇勃 (Koebe) 函数

$$f_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad (|z| < 1).$$

它可以表为

$$f_0(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right].$$

因 $(1+z)/(1-z)$ 把$D$单叶映照为半平面$\{\mathrm{Re}\,w>0\}$而知寇勃函数属于$S$，并且 $f_0(D)$ 是沿半直线$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$切开的平面。将会看到，在许多问题上寇勃函数都是$S$中的“最大”函数。函数

$$e^{-i\beta}f_0(e^{i\beta}z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i(n-1)\beta}z^n$$

也属于$S$，称为寇勃函数的旋转。

常常需要考虑单连通区域 $G\subset\hat{\mathbf{C}}$，$\infty\in G$。但除去 $G=\hat{\mathbf{C}}\backslash\{a\}$ 的情形。这时 $E=\hat{\mathbf{C}}\backslash G$ 是一个连续统，即包含不止一点的连通紧集。映照 $w^*=\dfrac{1}{w-c}$ $(c\in E)$把$G$变成 $G^*\subsetneqq\mathbf{C}$，故可应用黎曼映照定理。取 $\Delta=\{|z|>1\}$ 为标准区域以代替 $D=\{|z|<1\}$，让$\infty$点保持固定，即知存在唯一的如下形式的函数

(1) $\qquad g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\quad(|z|>1),\ b>0$

把$\Delta$单叶映照为$G$。

用$\Sigma$表示由$\Delta$内单叶函数

(2) $\qquad g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\quad(|z|<1)$

组成的类；亦即对函数(1)作了标准化 $b=1$。用

$$E=E(g)=\mathbf{C}\backslash g(\Delta)$$

表示像域的余集。

若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 属于$S$，则函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z^{-1})}=\frac{z}{1+a_2z^{-1}+\cdots}$$
$$=z-a_2+\cdots(|z|>1)$$

属于$\Sigma$，且因$S$类中函数无极点，故 $g(z)\neq 0$。反之，若 $g\in\Sigma$，$c\in E(g)$，则函数

$$f(z)=\frac{1}{g(z^{-1})-c}=\frac{z}{1+(b_0-c)z+\cdots}$$
$$=z+(c-b_0)z^2+\cdots(|z|>1)$$

属于$S$. 必须在余集中选取$c$，否则$f(z)$将有极点. 我们看到，类$\Sigma$比类$S$稍微要广泛些，因为对于$f\in S$，值$\infty$总是不取的，而对于$g\in\Sigma$却没有什么值不取的假设.

$g\in\Sigma$的展开式(2)中的系数$b_0$称为$E(g)$的共形中心. 因

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(re^{i\theta})d\theta \quad (r>1),$$

容易推出

(3) $$b_0\in E(g) \text{ 的凸包.}$$

对函数(2)作进一步的标准化$b_0=0$常常是方便的，对于那些在像平面平移下不变的问题尤其如此. 以$\Sigma_0$表示形如

$$g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots(|z|>1)$$

的单叶函数组成的类. 应当指出，对于此类函数推不出当$z\in\Delta$，$g(z)\neq 0$的结论(对照下面的例1.3).

**3.** 分段光滑的闭曲线$C$关于点$w\notin C$的环绕次数（或指示数)定义为

(4) $$\chi(C,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\omega-w}d\omega.$$

在$\mathbb{C}\backslash C$的每个分集内，环绕次数是常数，并且在无界分集内等于零 (Ahlfors 116 页). 由此出发，在1.5节我们将给出若当曲线定理的一个证明.

现在我们来导出两个单叶性准则. 第一个的更一般形式将在9.3节推论9.5中给出.

**引理 1.1** 设$f(z)$在$\overline{D}$内解析在$\partial D$上内射. 则$f(z)$在$D$内单叶，且把$D$映照成(闭)若当曲线$J=f(\partial D)$的内区域.

**证** 若$w\notin J$，则由辐角原理 (Ahlfors 151 页) $f(z)-w$的零点个数为$\chi(J,w)$，而由推论1.6 (1.5节) 知在$J$的外区域$\chi(J,w)=0$，在$J$的内区域$\chi(J,w)=\pm1$. 因此$f(z)$在$D$中

不取外区域[1]的值，并且取内区域的每一值恰好一次．又因 $f(D)$ 是开集，故不取 $J$ 上的值．

**定理 1.1** 设 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析．若 $|z|\to 1$ 时 $g(z)$ 的所有极限点的集 $A$ 有界，无内点，且不分割 C．则 $g\in\Sigma$，且 $g(\Delta)=\hat{\mathbb{C}}\backslash A$．

这一定理也许令人惊奇．值得说明的是，正是 $A$ 不分割 C 的假定排除了映像的"重叠"．

**证** 我们必需证明 $g(z)-w$ 在 $\Delta$ 内的零点个数 $n(w)$ 当 $w\notin A$ 时等于 1，当 $w\in A$ 时等于 0．

先设 $w\notin A$．因为 $A$ 有界且不分割 C，故存在从 $w$ 到 $\infty$ 的曲线 $B$ 不与 $A$ 相交(见图 1.1)．设 $1<r_1<r_2<\infty$，考虑曲线 $C_j$: $g(r_je^{it})$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$(j=1,2)$．由 $A$ 的定义，可选取 $r_1$ 充分接近于 1[2]，使得对于 $1<|z|\leqslant r_1$，$g(z)\notin B$，故 $g(z)\neq w$．从而 $w$ 位于 $\mathbb{C}\backslash C_1$ 的无界分集，所以 $\chi(C_1,w)=0$．若选取 $r_2$ 如此之大使得对于 $|z|\geqslant r_2$，$g(z)\neq w$，则 $n(w)$ 等于 $g(z)-w$ 在圆环 $\{r_1<|z|<r_2\}$ 内的零点个数．因 $g(z)$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析，故由辐角原理得到

$$
\begin{aligned}
n(w)&=\chi(C_2,w)-\chi(C_1,w)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{d\omega}{\omega-w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2}\frac{f'(z)dz}{f(z)-w}\\
&=1.
\end{aligned}
$$

在上述演算中，我们作了代换，然后应用了留数定理．

现在假定有 $w_0\in A$，$n(w_0)\neq 0$，则存在 $z_0\in\Delta$ 满足 $g(z_0)=w_0$．选取 $r_0>1$ 和以 $z_0$ 为心的小圆盘 $D_0$，使得圆环

$$R=\{1<|z|<r_0\}$$

不与 $D_0$ 相交．于是有 $g(R)\cap g(D_0)\subset A$，因为否则将存在点 $w\notin A$，函数 $g(z)$ 在 $R$ 和 $D_0$ 内都取到该值，这与第一部分相矛盾．由于集 $A$ 无内点，故开集 $g(R)\cap g(D_0)$ 必为空集，但这是不

1) 此处原文为"内区域"，系误．——译者注

2) 此处原文为"充分小"．——译者注

可能的,因为 $w_0 \in g(D_0)$ 并且 $w_0 \in A \subset \overline{g(R)}$.

**例 1.2** 设 $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$. 由

$$g(e^{i\theta}) = b_0 + 2e^{i\beta}\cos(\theta - \beta), \text{ 知 } \{g(z): |z| = 1\}$$

是线段 $[b_0 - 2e^{i\beta}, b_0 + 2e^{i\beta}]$. 于是由定理 1.1 推出 $g \in \Sigma$, 并且 $E(g)$ 即该线段.

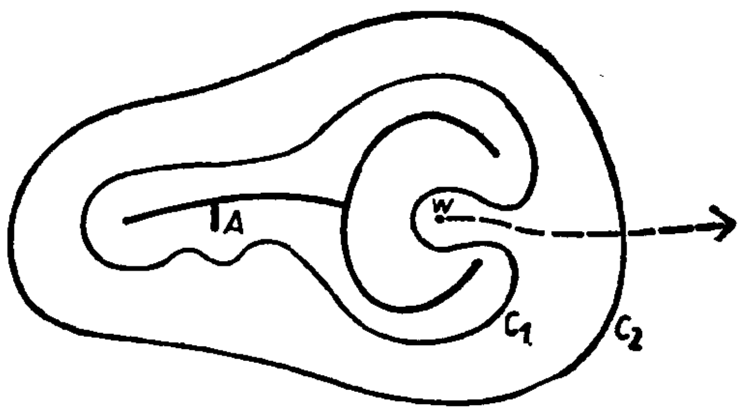


图 1.1

**例 1.3** 设 $0 < \alpha < \pi$, $\rho = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} (>1)$. 则

$$g(z) = \rho z \frac{z + \rho}{\rho z + 1} = z + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) + \cdots \tag{5}$$

在 $1 \leqslant |z| < \infty$ 内解析. 经计算得 $g(e^{i\theta}) = \rho\exp[2i\arg(e^{i\theta} + \rho)]$. 几何上的考虑表明,辐角 $\arg(e^{i\theta} + \rho)$ 在

$$-\frac{\pi + \alpha}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi + \alpha}{2}$$

内从 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 增加到 $\dfrac{\alpha}{2}$, 在余补区间内再从 $\dfrac{\alpha}{2}$ 减小到 $-\dfrac{\alpha}{2}$. 因此

$$\{g(z): |z| = 1\} = \{\rho e^{it}: -\alpha \leqslant t \leqslant \alpha\}, \tag{6}$$

由定理 1.1 知 $g(z)$ 属于 $\Sigma$ 且把 $\Delta$ 映照成沿圆弧(6)切开的平面. 由(5)式知函数 $g(z) - \left(\rho - \dfrac{1}{\rho}\right)$ 属于 $\Sigma_0$, 但它可以取 0 值.

**例 1.4** 考虑函数