高等数学

习题集解答

中

一九七九年五月

高等数学

习题集解答

中

一九七九年五月

目 录

第十四　中值定理，导数在函数研究上的应用

中　值　定　理

14.1　验证罗尔定理对函数 $y=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间〔-1，2〕上的正确性。

证：∵ $y=x^3+4x^2-7x-10$ 在〔-1，2〕上连续；

$y'=3x^2+8x-7$ 在〔-1，2〕上连续，故在（-1，2）内有意义；

又∵　$y|_{x=-1}=0$，　　$y|_{x=2}=0$．

∴　$y|_{x=-1}=y|_{x=2}$．

故　$y=x^3+4x^2-7x-10$ 在〔-1，2〕上满足罗尔定理的条件．

令　$y'=0$，即 $3x^2+8x-7=0$ 有根 $x=\frac{\pm\sqrt{37}-4}{3}$，

而 $-1<\frac{\sqrt{37}-4}{3}<2$．

故 $y'\Big|_{x=\frac{\sqrt{37}-4}{3}}=0$．

即罗尔定理对函数 $y=x^3+4x^2-7x-10$ 在〔-1，2〕上是正确的．

14.2　验证罗尔定理对函数$y=\ln\sin x$在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上的正确性.

证：$\because y=\ln\sin x$在$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上连续；

$$y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x \text{在}(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})\text{内有意义；}$$

$$y\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\ln 2,\qquad y\Big|_{x=\frac{5\pi}{6}}=-\ln 2,$$

$$\therefore\quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=y\Big|_{x=\frac{5\pi}{6}}.$$

故　$y=\ln\sin x$在$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上满足罗尔定理条件.

令$y'=0$，即$\operatorname{ctg}x=0$有根$x=K\pi+\frac{\pi}{2}$（K为整数）

$$\text{而}\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{6}.$$

故有　$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$.

即罗尔定理对$y=\ln\sin x$在$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上是正确的.

14.3　验证拉格朗日定理对于函数$y=\ln x$在区间$[1,e]$上的正确性.

证：$\because y=\ln x$在$[1,e]$上连续；$y'=\frac{1}{x}$在$(1,e)$

内有意义．故$y=\ln x$在〔1，e〕上满足拉格朗日定理的条件．

$\because\quad y|_{x=1}=0,\quad y|_{x=e}=1.$

“要拉格朗日定理成立应有

$1=y'_{x=\xi}(e-1),\ (1<\xi<e).$”

令 $1=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=\xi}(e-1)$，则

$\xi=e-1$，而$1<e-1<e$.

∴拉格朗日定理对$y=\ln x$在〔1，e〕上是正确的．

14.4 验证拉格朗日定理对于函数$f(x)=\operatorname{arctg}x$在区间〔0，1〕上的正确性．

证：$\because f(x)=\operatorname{arctg}x$在〔0，1〕上连续；$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$在(0，1)内有意义，故$f(x)=\operatorname{arctg}x$在〔0，1〕上满足拉格朗日定理条件．

又$\because f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

令$\left(\dfrac{\pi}{4}-0\right)=\dfrac{1}{1+x^2}(1-0)$，即$\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{1+x^2}$,

得$x=\pm\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$.

取$\xi=\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$，则$0<\xi<1$.

而$\dfrac{\pi}{4}=\left.f'(x)\right|_{x=\xi}(1-0)$成立．

故拉格朗日定理对$y=\text{arctg}x$在区间〔0，1〕上是正确的．

4.5 对于函数$f(x)=4x^3-5x^2+x-2$在区间〔0，1〕上验证拉格朗日定理的正确性．

证：∵ $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间〔0，1〕上连续；

$f'(x)=12x^2-10x+1$ 在（0，1）内有意义．

∴ $f(x)$在〔0，1〕上满足拉格朗日定理条件．

又∵$f(0)=-2$，$f(1)=-2$．

令$f(1)-f(0)=f'(x)(1-0)$，求出x要在（0，1）内．

$$0=12x^2-10x+1,\ \text{则}\ x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}.$$

$$\text{而}\ 0<\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}<1.$$

$$\text{故可取}\ \xi=\frac{5+\sqrt{13}}{12}\left(\text{或}\ \xi=\frac{5-\sqrt{13}}{12}\right),\ \text{则}$$

$$0=f'(x)|_{x=\xi}(1-0).$$

即拉格朗日定理对$y=4x^3-5x^2+x-2$在〔0，1〕上是正确的．

14.6 对函数$f(x)=x^3$及$\varphi(x)=x^2+1$在区间〔1，2〕上验证柯西中值定理的正确性．

证：∵$f(x)=x^3$与$\varphi(x)=x^2+1$在〔1，2〕上连续；

$f'(x)=3x^2$与$\varphi'(x)=2x$在$(1,2)$内存在；而$\varphi'(x)=2x$在$(1,2)$内均不为0.

故$f(x)$及$\varphi(x)$在区间$[1,2]$上满足柯西中值定理的条件.

又$f(1)=1$，　　$\varphi(1)=2$.

$f(2)=8$，　　$\varphi(2)=5$.

令$\dfrac{8-1}{5-2}=\dfrac{3x^2}{2x}$，　　得$x=\dfrac{14}{9}$.

取$\xi=\dfrac{14}{9}$，则$1<\xi<2$，能使

$$\frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)}=\left.\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right|_{x=\xi}$$ 成立.

故柯西中值定理对$f(x)=x^3$及$\varphi(x)=x^2+1$在$[1,2]$上是正确的.

14.7　对函数$f(x)=\sin x$及$\varphi(x)=x+\cos x$，在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上验证柯西中值定理的正确性.

证：$\because f(x)=\sin x$与$\varphi(x)=x+\cos x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续；

$f'(x)=\cos x$与$\varphi'(x)=1-\sin x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内有意义，而且$\varphi'(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内均不为0.

$\therefore f(x)$与$\varphi(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上满足柯西中值定理条件.

又$\because f(0)=0$， $\varphi(0)=1$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$， $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

令 $\dfrac{1-0}{\dfrac{\pi}{2}-1}=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$，

即 $\dfrac{2}{\pi-2}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

$$\frac{2^2}{(\pi-2)^2}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

$$4-4\sin x=(\pi-2)^2+(\pi-2)^2\sin x.$$

$$\sin x=\frac{4\pi-\pi^2}{\pi^2-4\pi+8}.$$

$\because\quad 0<\dfrac{4\pi-\pi^2}{\pi^2-4\pi+8}<1$.

$\therefore\quad 0<\arcsin\dfrac{4\pi-\pi^2}{\pi^2-4\pi+8}<\dfrac{\pi}{2}$.

取 $\xi=\arcsin\dfrac{4\pi-\pi^2}{\pi^2-4\pi+8}$.

则 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\varphi(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$成立.

14.8 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点ξ总是位于区间的正中间.

证：设$y=px^2+qx+r$在$[a, b]$上满足拉格朗日中

值定理的条件，则

$$y|_{x=b}-y|_{x=a}=y'|_{x=\xi}(b-a)\text{成立}(a<\xi<b).$$

即 $$pb^2+qb-pa^2-qa=(2px+q)|_{x=\xi}(b-a).$$

$$p(b+a)+q=2p\xi+q.$$

$$\therefore\quad \xi=\frac{a+b}{2}.$$

即对$y=px^2+qx+r$应用拉格朗日中值定理时所求得的点ξ总是区间的中点.

14.9 证明在$[-1,+1]$上$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$恒能成立.

证：设$f(t)=\arcsin t+\arccos t$，则$f(t)$在$[-1,+1]$上满足拉格朗日定理的条件. 取$-1\leqslant x\leqslant+1$，即x为$[-1,+1]$上任意一点，则$f(t)$在$[-1,x]$上亦满足拉格朗日定理条件，即

$$f(x)-f(-1)=f'(\xi)[x-(-1)],$$

$$(-1<\xi<x)\text{成立}.$$

$$\because\quad f'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=0$$

$$(-1<t<1).$$

$$\therefore\quad f(x)=f(-1).$$

$$\because\quad f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

即　$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

14.10　不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程$f'(x)=0$有几个实根，并指出它们所在的区间.

解：$\because f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$在数轴上连续（$f(x)$为四次多项式）；$f'(x)$在数轴上有意义（为三次多项式）；

又　$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$.

$\therefore f(x)$在$[1,2]$和$[2,3]$及$[3,4]$上都满足罗尔定理的条件. 则分别在$(1,2)$和$(2,3)$及$(3,4)$内罗尔定理成立，故有

$f'(\xi)=0$，ξ在$(1,2)$或$(2,3)$、$(3,4)$内.

即　$f'(x)=0$有三个实根，它们分别在$(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$这三个区间内.

14.11　应用拉格朗日定理证明，当$a>b>0$时，不等式$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$在$n>1$时成立.

证：设$f(x)=x^n$，则$f(x)$在$[b,a]$上满足拉格朗日中值定理条件. 故

$a^n-b^n=f'(\xi)(a-b)$　　$(b<\xi<a)$.

而　$f'(x)=nx^{n-1}$，当$n>1$时，$f'(x)$为增函数.

$\therefore nb^{n-1}(a-b)<f'(\xi)(a-b)<na^{n-1}(a-b)$.

即　$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

$(n>1)$.

14.12 若$0<b\leqslant a$，试证

$$\frac{a-b}{a}\leqslant ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}.$$

证：设$f(x)=lnx$. 则$f(x)$在$[b, a]$上满足拉格朗日定理的条件，故有

$$lna-lnb=f'(\xi)(a-b)\quad(b\leqslant\xi\leqslant a).$$

而 $f'(x)=\frac{1}{x}$，故有$\frac{1}{a}\leqslant f'(\xi)\leqslant\frac{1}{b}$，

即有$\frac{a-b}{a}\leqslant ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$.

14.13 若$x>0$，试证

$$\frac{x}{1+x}<ln(1+x)<x.$$

证：设$f(x)=lnx$，则$f(x)$在$[1, 1+x]$上满足拉格朗日定理的条件，故有

$$ln(1+x)-ln1=f'(\xi)(1+x-1),$$
$$(1<\xi<1+x)$$

即 $ln(1+x)=f'(\xi)x\quad(1<\xi<1+x)$.

而 $f'(x)=\frac{1}{x}$，故

$$\frac{1}{1+x}<f'(\xi)<1,$$

$$\frac{x}{1+x}<f'(\xi)x<x,$$

即 $\dfrac{x}{1+x}<ln(1+x)<x$.

14.14 如果 $0<\beta\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，试证

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant tg\alpha-tg\beta\leqslant\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

证：设 $f(x)=tgx$，则 $f(x)$在 $[\beta,\alpha]$ 上满足拉格朗日定理条件，故有

$tg\alpha-tg\beta=f'(\xi)(\alpha-\beta)$，$(\beta\leqslant\xi\leqslant\alpha)$.

而 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}$.

当 $\beta\leqslant\xi\leqslant\alpha$时，有 $\dfrac{1}{\cos^2\beta}\leqslant\dfrac{1}{\cos^2\xi}\leqslant\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

故有 $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\xi}\leqslant\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$.

即 $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant tg\alpha-tg\beta\leqslant\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$.

14.15 证明下列不等式:

(a) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(b) $|arctga-arctgb|\leqslant|a-b|$;

(c) 当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$.

证：(a) 设 $f(t)=\sin t$，则 $f'(t)=\cos t$. 在 $[y,x]$ 上应用拉格朗日定理有:

$\sin x-\sin y=\cos\xi(x-y)$ $(y<\xi<x)$.

即 $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi|\cdot|x-y|$.

故 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

（b）　设$f(x)=\operatorname{arctg}x$，$f'(x)==\frac{1}{1+x^2}$，故有

$$\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)\quad(a<\xi<b).$$

（在〔a，b〕上应用拉格朗日定理）

故 $|\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right||a-b|$.

即 $|\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b|\leqslant|a-b|$.

（c）　设$f(x)=ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$.

在〔1，x〕上应用拉格朗日定理，有

$$ln x=\frac{1}{\xi}(x-1)\quad(1<\xi<x).$$

$ln x<x-1$，　即　$x<e^{x-1}$.

$\therefore$　$e^x>e\cdot x$.

罗 彼 塔 法 则

在题14.16—14.56中求各极限时，应先判定函数是属于何种不定式:

14.16　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

解：这是$\frac{0}{0}$形.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\cos 5x}{1}=5.$$

14.17 $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \to a} \frac{m x^{m-1}}{n x^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

14.18 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$.

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

14.19 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$.

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1} = 1.$$

14.20 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

14.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$.

解：这是$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2x}=2.$$

14.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

解：这是$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=-2.$$

14.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

解：这是$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{1}=0.$$

14.24 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}5x}$.

解：这是$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to\pi}\frac{3\cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=-\frac{3}{5}.$$

14.25 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}$.

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4\cos 4x}=-\frac{1}{2}.$$

14.26 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

解：这是$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-4(\pi-2x)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4(\pi-2x)\cos x-8\sin x}=-\frac{1}{8}.$$

14.27 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$.