

0175-2/3

计算数学讲义 数学基础之三

偏 微 分 方 程

南京大学数学系计算数学专业 编

科 学 出 版 社

1979

内 容 简 介

本书共十章:第一章从物理力学的讨论导出典型方程和定解条件,第二、三章分别介绍常用的分离变量法和积分变换,第四章介绍能量积分和极值原理,第五章讨论常微分方程和偏微分方程的特征值问题,第六章讨论 Green 函数和求解定解问题的 Green 函数方法,第七章论述二阶线性偏微分方程的分类,第八章讨论一阶偏微分方程和方程组,第九、十章介绍差分方法和摄动问题。

本书可供高等学校计算数学专业使用,也可供科技工作者参考。

计算数学讲义 数学基础之三

偏 微 分 方 程

南京大学数学系计算数学专业 编

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979 年 6 月 第 一 版 开本: 787 × 1092 1/32

1979 年 6 月 第 一 次 印 刷 印 张: 10 1/4

印 数: 0001—62,160 字 数: 233,000

统一书号: 13031 · 1047

本社书号: 1469 · 13—1

定 价: 1.05 元

说 明

1. 这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的。

2. 这套讲义共分下列九册：

(一) 数值逼近方法，

(二) 线性代数计算方法，

(三) 常微分方程数值解法，

(四) 偏微分方程数值解法，

(五) 最优化方法，

(六) 概率统计基础和概率统计方法，

数学基础之一：线性代数，

数学基础之二：常微分方程，

数学基础之三：偏微分方程。

由于篇幅的原因，我们把《概率统计基础》和《概率统计方法》合并为一册。

3. 这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材，也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考。

4. 这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志。

讲义各册由我专业有关同志分工负责。

这册《偏微分方程》的编写者为苏煜城同志。

5. 由于理论水平和实践经验所限，讲义中的缺点和错误在所难免，我们衷心盼望读者提出宝贵意见，以便进一步修改。

南京大学数学系计算数学专业

1978年7月

目 录

第一章 典型方程和定解条件	(1)
§1. 典型方程的推导	(2)
✓§2. 定解条件和适定性概念	(9)
第二章 分离变量法	(21)
✓§1. 解齐次弦振动方程的混合问题	(21)
✓§2. 解非齐次弦振动方程的混合问题	(29)
✓§3. 解热传导方程的混合问题	(32)
§4. 圆柱体定常温度分布的 Dirichlet 问题	(38)
习题	(43)
第三章 积分变换	(46)
§1. Fourier 级数和 Fourier 积分	(46)
§2. Fourier 变换的基本性质	(48)
✓§3. Fourier 变换的应用	(52)
§4. Laplace 变换	(59)
*§5. Laplace 变换的基本性质	(61)
§6. Laplace 变换的应用	(67)
附录	(74)
A. Fourier 变换表	(74)
B. Laplace 变换表	(75)
习题	(75)
第四章 能量积分和极值原理	(79)
§1. 弦振动方程的能量积分	(79)
§2. 热传导方程的最大值原理及其应用	(89)

§3. 位势方程的极值原理及其应用	(95)
习题	(103)
第五章 特征值问题	(105)
§1. Sturm-Liouville 问题	(105)
§2. 特征函数	(110)
§3. Bessel 函数	(117)
§4. 奇异的 Sturm-Liouville 问题	(124)
§5. Legendre 函数	(127)
§6. 常微分方程边值问题和 Green 函数	(132)
§7. Green 函数的构造	(138)
§8. 特征值问题和 Green 函数	(142)
§9. 多维特征值问题	(145)
习题	(154)
第六章 Green 函数	(157)
§1. 引言	(157)
§2. δ -函数	(160)
§3. 基本解	(164)
§4. Green 函数	(179)
§5. 利用 Green 函数解一些特殊区域上的边值问题	(191)
§6. 特征函数方法	(202)
习题	(204)
✓ 第七章 二阶线性偏微分方程的分类	(206)
§1. 一些定义	(206)
§2. 自变量变换的选取和方程的简化	(207)
§3. 方程的分类	(213)
习题	(214)
✓ 第八章 一阶偏微分方程和方程组	(215)
§1. 例	(215)

§2. 线性和拟线性一阶偏微分方程	(219)
§3. 一阶非线性偏微分方程	(227)
§4. 弱解	(250)
§5. 一阶拟线性双曲型方程组	(259)
习题	(273)
第九章 差分方法	(275)
§1. 微分方程问题	(275)
§2. 差分格式和稳定性定义	(275)
§3. 一些估计式	(277)
§4. 两个引理	(281)
§5. 存在定理的证明	(285)
第十章 奇异摄动和渐近方法	(289)
§1. 引言	(289)
§2. 线性变系数常微分方程的初值问题	(293)
§3. 线性变系数常微分方程的边值问题	(304)
§4. 二阶线性椭圆型方程	(311)

第一章 典型方程和定解条件

在物理、力学和其他自然科学以及工程技术中,经常提出大量的偏微分方程问题。例如,在水坝的温度应力分析中需要研究热传导方程,在电磁现象研究中会遇到 Maxwell 方程,而在大型水利工程中必须研究河渠不稳定流动的 Saint-Venant 方程。数学物理方程就是以描述物理现象和物理过程的偏微分方程为主要研究对象的一门学科。

在本书中主要讨论数学物理方程(不包括积分方程)。数学物理方程是一门具有悠久历史的学科。十七世纪工业生产的高度发展,促进了力学、天文学和物理学的相应发展,这就要求数学工具的革新,于是微积分产生了。此后不久,从工程技术以及力学、天文学和物理学方面相继提出许多微分方程问题,逐渐形成数学物理方程这一学科。对数学物理方程的深入研究,反过来又大大地促进了力学、天文学、物理学的发展,最终也推动了工程技术和工业生产的发展。这就是毛主席所教导我们的“理论的基础是实践,又反过来为实践服务。”

在这门基础课中不可能对各种数学物理方程问题进行全面研究,我们只讨论弦振动方程, Laplace 方程、热传导方程以及一阶偏微分方程和方程组的定解问题。希望通过这些内容的学习,使读者初步了解如何将生产实际和科学研究中的这些典型问题归结为偏微分方程的定解问题,以及这些问题的基本事实和解决这些问题的一些基本方法和技巧。

§1. 典型方程的推导

1.1. 热传导方程 在工程技术中,例如水坝的建筑,在混凝土浇注后的冷却过程,为了避免因温度控制不当而产生裂缝,就必须研究它的散热状况和温度分布. 这些问题的研究归结为热传导方程定解问题.

现考虑某物体 G 的热传导问题. 以函数 $u(x, y, z, t)$ 表示物体 G 在位置 (x, y, z) 、时刻 t 的温度.

根据 Fourier 热传导定律可知,在无穷小时段 dt 内流过物体的一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 由下式确定:

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad} u \cdot \vec{n} \quad (1)$$

其中 $k(x, y, z)$ 是物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数,它应取正值; n 是外法线; $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是温度函数在 (x, y, z) 处沿外法线 n 的方向导数. 规定 n 所指的那一侧为 dS 的正侧. (1) 式表示在 dt 时间内从 dS 的负侧流向正侧的热量.

对于 G 内任一封闭曲面 S , 从时刻 t_1 到时刻 t_2 经曲面 S 流出的热量为

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt. \quad (2)$$

设物体的比热(即使单位质量的物体温度升高一度所需要的热量,量纲为大卡/公斤·度)为 $c(x, y, z)$, 密度(量纲为公斤/米³)为 $\rho(x, y, z)$, 那么无穷小体积 $dV = dx dy dz$ 的温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 升高到 $u(x, y, z, t_2)$ 所需的热量

$$dQ = c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]dV.$$

因此使物体内部各点温度变化 $\Delta u(x, y, z, t) = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$ 所需热量等于

$$Q_2 = \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV. \quad (3)$$

最后考虑热源提供的热量。设物体内部的热源密度为 $F(x, y, z, t) > 0$ ，则在时间 (t_1, t_2) 内物体所产生的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dV dt, \quad (4)$$

当 $F(x, y, z, t) < 0$ 时， Q_3 为热源吸收的热量。

设 S 是 V 的表面。根据热量守恒定律应有

$$Q_2 = Q_3 - Q_1,$$

即

$$\begin{aligned} & \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt. \end{aligned} \quad (5)$$

假设函数 $u(x, y, z, t)$ 关于变量 x, y, z 具有二阶连续偏导数，关于 t 具有一阶连续偏导数，则由 Gauss 公式可将 (5) 式化为

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) - F(x, y, z, t) \right] dV dt = 0. \end{aligned}$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 是任意取的，而积分号下的函数是连续函数，因此在任何时刻在 G 内任意一点都有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t), \quad (6)$$

这就是温度函数 $u(x, y, z, t)$ 应满足的热传导方程。

如果物体是均匀的, 此时 k, c 及 ρ 均为常数. 令 $a^2 = k/c\rho$, 方程 (6) 化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t),$$

$$(f = F/c\rho). \quad (7)$$

在没有热源的情况下方程 (7) 化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

如果考虑的是一均匀杆的热传导过程, 则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

1.2. 位势方程

1. 稳定温度场. 在热传导方程中温度 $u(x, y, z, t)$ 不仅随点的位置而异, 而且随时间 t 的不同而变化. 如果物体内各点温度随时间的推移而发生的变化不显著, 我们就说温度分布趋于稳定. 这就是说物体温度与时间 t 无关, 故近似地

有 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 此时方程 (7) 和 (8) 分别化为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-f(x, y, z)}{a^2}, \quad (10)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

方程 (10) 称为 Poisson 方程, 方程 (11) 称为 Laplace 方程; 符号 Δ 称为 Laplace 算子. 方程 (10), (11) 就是稳定温度场中每一点温度应满足的方程.

2. 静电场位势. 设 G 是闭曲面 Γ 所包围的空间区域, 其中

充满了介电常数为 ε 的介质, 设介质内有体密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$ 的电荷, 那么在区域 G 内形成一个静电场, 其电场强度记为 \mathbf{E} . 从物理上知道, 静电场是有势的, 即存在纯量函数 $u(x, y, z)$, 使

$$\mathbf{E} = -\text{grad } u. \quad (12)$$

称函数 $u(x, y, z)$ 为静电场 \mathbf{E} 的电位.

根据电学中的一条基本定律: 通过电场内任一封闭曲面的电位移量等于该曲面所包围的总电荷的 4π 倍, 即

$$\iint_{\Gamma^*} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iiint_{G^*} \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (13)$$

其中 Γ^* 是 G 内任一封闭曲面, G^* 是 Γ^* 所包围的空间区域. \mathbf{n} 是 Γ^* 外法线方向的单位向量. 由 Gauss 公式, 得到

$$\iint_{\Gamma^*} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{G^*} \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) dx dy dz. \quad (14)$$

由 (12)

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma^*} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_{G^*} \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) dx dy dz \\ &= -\varepsilon \iiint_{G^*} \text{div}(\text{grad } u) dx dy dz. \end{aligned} \quad (15)$$

由 (13), (15) 得到

$$\iiint_{G^*} \text{div}(\text{grad } u) dx dy dz = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \iiint_{G^*} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

由于 Γ^* 是任意选取的, 最后得到

$$\text{div}(\text{grad } u) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(x, y, z),$$

即

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (16)$$

这就是静电场电位 $u(x, y, z)$ 应满足的微分方程, 也是 Poisson 方程. 若没有体电荷, 即 $\rho \equiv 0$, 则电位 $u(x, y, z)$ 满足 Laplace 方程. 电位也称电势. 故静电场的电位所满足的方程亦称位势方程.

1.3. 弦的微小横振动方程 我们考虑两端拉紧的柔软的有弹性的弦的微小横振动. 所谓横振动是指弦的运动发生在一个平面内, 而且弦上各点的位移与弦的平衡位置垂直. 取弦的平衡位置为 Ox 轴, 弦上各点的位移用 $u(x, t)$ 表示. 我们研究弦的微小振动, 认为 $u_x^2 \ll 1$.

如果在某一点 x 把弦截为两部分, 则右边部分给左边部分的影响表现为张力 $T(x, t)$, 在弦是柔软的情况下, 它不抵抗弯曲, 因此张力沿切线方向.

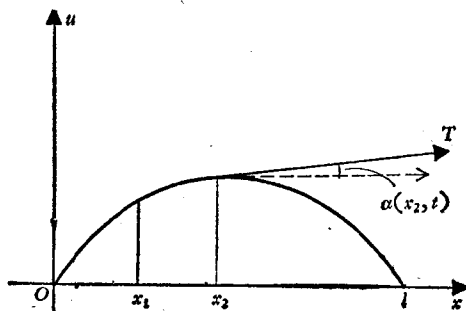


图 1.1

我们现在在弦上任取一段 $[x_1, x_2]$, 分别研究这段弦沿 Ox 方向和 Ou 方向的运动. 沿 Ox 方向: 这段弦在 $[t_1, t_2]$ 时间内所受的力的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) \cos \alpha(x_2, t) - T(x_1, t) \cos \alpha(x_1, t)] dt,$$

其中 $\alpha(x, t)$ 是弦的切线与 Ox 轴的夹角. 由于弦上各点的

位移都垂直于 Ox 轴,故沿 Ox 方向各点速度皆等于零. 因此根据在 Ox 方向的动量守恒定律,有

$$\int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) \cos \alpha(x_2, t) - T(x_1, t) \cos \alpha(x_1, t)] dt = 0. \quad (17)$$

沿 Ou 方向: 这段弦在 $[t_1, t_2]$ 时间内所受的力的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) \sin \alpha(x_2, t) - T(x_1, t) \sin \alpha(x_1, t)] dt.$$

而它在这段时间内沿 Ou 方向的动量变化为

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx,$$

其中 $\rho(x)$ 是弦的线密度. 由于沿 Ou 方向动量守恒. 故得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) \sin \alpha(x_2, t) - T(x_1, t) \sin \alpha(x_1, t)] dt \\ = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx. \end{aligned} \quad (18)$$

现再进一步简化(17)和(18). 因为 $\alpha(x, t)$ 是张力 $T(x, t)$ 与 Ox 轴的夹角, 所以

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1,$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x(x, t).$$

因此(17), (18)可写为

$$\int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) - T(x_1, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx dt = 0; \quad (19)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t) u_x(x_2, t) - T(x_1, t) u_x(x_1, t)] dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx, \quad (20)$$

(20)左端等于

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt,$$

而其右端等于

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt.$$

故有

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt. \quad (21)$$

由于 $[x_1, x_2]$, $[t_1, t_2]$ 都是任意的, 故由 (19), (21) 得到

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (23)$$

由(22)知张力 T 与 x 无关. 实际上, 在我们所作假设 $u_x^2 \ll 1$ 下, T 与时间 t 也无关, 因为在振动过程中弦长

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \int_0^l dx = l.$$

它表明在我们所取的精确度范围内, 应认为在振动过程中并未伸长. 因此, 由 Hooke 定律知道, 弦上每点的张力 T 的数值不随时间而变. 方程 (23) 就是我们所要求的弦振动方程.

如果弦是均匀的, 即 $\rho(x)$ 为常数, 则方程 (23) 可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (24)$$

其中 $a^2 = T/\rho$ 为已知常数.

如果弦作强迫振动, 即弦在 u 方向受外力作用, 设外力的

线密度为 $f(x, t)$, 则在以上推导中弦段 $[x_1, x_2]$ 所受的力的冲量除

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} [T(x_2, t)u_x(x_2, t) - T(x_1, t)u_x(x_1, t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \end{aligned}$$

外, 还有

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt.$$

此时弦振动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (25)$$

其中 $a^2 = T/\rho$, $F(x, t) = f(x, t)/\rho$.

如果研究的是薄膜微小横振动, 则得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t).$$

§ 2. 定解条件和适定性概念

2.1. 定解条件提出 在前一节中我们从物理模型导出了三种方程: 热传导方程, 位势方程和弦振动方程. 这些方程在偏微分方程的研究中具有典型意义, 它们描述了相应的物理过程的一般规律. 例如热传导方程是热学规律 (Fourier 定律) 的数学形式, 即热传导服从 Fourier 定律时温度函数就应满足这一方程. 因此对具有相同系数 k, c, ρ 的物体, 不管它的形状、所处的外界条件以及起始时的温度状况如何, 它都

满足此方程。又如弦振动方程,不论弦是有限长还是无限长,不论在它的两 endpoint 满足那些约束条件,不论开始时的振动情况如何,位移函数都满足这一方程。因此这些方程本身只是确定了一般规律,不能确定一个具体物理过程的具体状态。因而这些方程的解有无穷多个,这和常微分方程的情况是相似的。例如弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 对于任何两个可微分的函数 f_1 及 f_2 来说,函数 $u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$ 都是此方程的解。为了确定具体的物理状况,就不能只依赖于方程,而必须另外附加条件,即考察物体所处的外界状况以及起始时的状况。描述这种状况的数学条件分别称为边界条件及初始条件。这些条件通称为定解条件。

1) 热传导方程的定解条件。根据以上分析,为了唯一确定一个特定的物理过程,还必须另外附加条件。对热传导问题,很明显,如果知道物体在边界上的温度状况(或热交换状况)和物体在初始时刻的温度分布,就可以完全确定物体在以后时刻的温度分布。

若初始时刻的温度分布为 $\varphi(x, y, z)$, 则 $u(x, y, z, t)$ 应满足下列初始条件:

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in G. \quad (26)$$

现考虑边界条件的提法。最简单的情形是物体与外界接触的表面温度是已知的。这个条件的数学形式为

$$u(x, y, z, t)|_{(x, y, z) \in \Gamma} = f(x, y, z, t), \quad (27)$$

其中 Γ 是物体 G 的边界曲面, $f(x, y, z, t)$ 是定义在 $(x, y, z) \in \Gamma, 0 \leq t \leq T$ 上的已知函数。这种边界条件称为热传导方程的第一边界条件。

另一种情形是:已知边界 Γ 的热流密度 $q(x, y, z, t)$ (即在单位时间内通过 Γ 的单位面积上的热量)。根据 Fourier

定律,有

$$q(x, y, z, t) dS dt = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt.$$

在此情况下边界条件为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(x, y, z) \in \Gamma} = f(x, y, z, t), \quad (28)$$

其中 $f(x, y, z, t) = -q(x, y, z, t)/k(x, y, z)$ 是已知函数. $k(x, y, z) > 0$ 是热传导系数. $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是曲面 Γ 的外法向导数. 这种边界条件称为热传导方程的第二边界条件.

第三种情形是: 已知物体周围介质的温度 $\theta(x, y, z, t)$. 根据 Newton 热交换定律: 物体从一种介质流到另一种介质的热量和两种介质间的温度差成正比, 我们有

$$dQ = h(\theta - u) dS dt, \quad (29)$$

其中 $h = h(x, y, z)$ 是两种介质间的热交换系数, 它也取正值; $u = u(x, y, z, t)$ 是物体的表面温度. (29) 表示在 dt 时段内从物体外部流入物体无穷小面积 dS 上的热量. 此热量通过 dS 流入物体内部, 由 Fourier 定律, 应有

$$dQ = k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt.$$

根据热量守恒定律,

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = h(\theta - u),$$

或

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu = h\theta = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (30)$$

其中 k, h, f 都是已知函数. 如此得到热传导方程的第三边界条件.

以上我们从热传导过程出发导出了三种边界条件, 当然