高等学校试用教材

透平压缩机械

华中理工大学　吴克启　主编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

前　言

本书是根据高等学校流体动力机械专业教材分编审委员会1984年6月制定的教学计划和教学大纲以及审定的编写大纲，并结合作者多年来从事本科高年级学生和研究生教学与研究工作的基础上编写的。

本书首先对透平压缩机械流体力学基础和共同的基本理论进行了综合的叙述。全书在对透平压缩机械三元流动理论和设计方法加以重点说明的同时，还对近代发展的某些设计方法和理论作了较系统的介绍。此外，在附录中还列出了按照一元、二元方法进行设计时的实例与一些使用图线，供工程实际应用。

本书由华中理工大学吴克启主编。书中第四章及附录1由蔡兆林编写，第六章由区颖达编写，其余部分由吴克启编写。华中理工大学乐志成对全书进行了审阅，在此表示深切的感谢。

限于编者水平，错误和不妥之处在所难免，请读者批评指正。

编者　1988.3

目　录

第一章　透平机械流体力学基础

§1-1　绪　　论

一、流体运动的分析方法

流体力学是以满足所给边界条件、求解流体运动状态为最终目的的基础学科。从连续介质模型出发，研究流体运动规律的方法，主要有拉格朗日法和欧拉法。

1. 拉格朗日法

力学的根本法则是关于质点运动的牛顿法则。即质点的速度与作用于该质点的力成比例地变化。由于流体是质点集合的连续体，故可以通过研究其质点的运动来分析流场内流体的速度、压力、密度等的变化。这种分析方法就是流体运动的拉格朗日（Lagrange）方法。

采用拉格朗日方法进行流体运动状态分析时，由于流体质点间力的相互作用，流体质点的运动轨迹有时与预想的差别较大，且数学关系较复杂。同时对于透平机械而言，问题主要在于确定叶面或界壁上的流动状态，往往不需要详细了解流体质点运动轨迹的变化。因此，除了特殊场合以外，在透平机械中很少采用拉格朗日的分析方法。

2. 欧拉法

欧拉（Euler）法是以流场中某固定空间为对象，研究该空间进出口速度与其作用力之间的关系。它不研究流体质点的运动轨迹，而考虑流体在某一空间的运动变化。为此，适用于这种情况的流体运动诸法则，都可以由牛顿力学体系导出。欧拉方法是流体运动的基本分析方法，也是透平机械最常用的分析方法。

二、流体物理量对时间的变化率

为了便于导出透平机械流体力学基础方程，这里首先引入流体物理量变化的一般分析方法。

设在时刻 t，流场内任意点（x，y，z）的物理量为 A，A 为 t，x，y，z 的函数即 $A=f(t,\ x,\ y,\ z)$，这时 A 的变化量 ΔA 按台劳级数展开为：

$$\Delta A=\frac{\partial A}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial A}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial A}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial A}{\partial z}\Delta z+\delta(\Delta t^2,\ \Delta x^2,\ \Delta y^2,\ \Delta z^2)$$

忽视二阶小量 δ，物理量 A 对时间的变化率为：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\partial A}{\partial t}+u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}$$

式中　u，v，w 表示流体速度 $\boldsymbol{V}$ 在 x，y，z 方向的分量。利用偏微分算子

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

物理量 A 的变化可以写成（直角坐标系）：

$$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial A}{\partial t}+u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}\qquad(1\text{-}1)$$

如果用圆柱坐标（r，θ，z）表示时：

$$\frac{DA}{Dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+v_r\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{v_\theta\partial A}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial A}{\partial z} \tag{1-2}$$

式（1-1）、式（1-2）中，右边第一项表示物理量A对于时间的变化。该项不存在时称为定常流动，否则称为非定常流动。第二项以后的式子表示物理量A在空间不均匀，因流体移动所产生的对流变化。它的存在是连续流体力学与刚体力学的重要区别。这两者的和称为物理量A对时间的变化率。

当物理量为矢量时，以上式子亦可适用。例如以流体质点的位置矢量$\boldsymbol{r}$（x，y，z）作为物理量，若采用欧拉法分析，则$\boldsymbol{r}$与t无关，故有

$$\boldsymbol{V}=\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}=u\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} \tag{1-3}$$

速度矢量$\boldsymbol{V}$对时间的变化为

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z} \tag{1-4}$$

或者

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \tag{1-5}$$

由此可见，在欧拉法中流体质点的加速度由两部分组成。其中第一项称为当地加速度，它是由流场的非定常性引起的。第二项称为对流加速度，它是由流场的非均匀性引起的。对于非均匀流场，即使在定常流情况下，对流加速度这一项仍然存在。

三、流体的变形与涡度

分析微元流体在流场中的运动状态告诉我们，微元流体在流场的运动过程中，一边产生伸缩变形和剪切变形，一边又伴随着回转运动。

如果流场中任意微元流体上任意点（x，y，z）的速度为u，v，w，同一时刻相邻点（$x+dx$，$y+dy$，$z+dz$）的速度分别为$u+du$，$v+dv$，$w+dw$，根据赫姆霍兹速度分解定理，微元流体上该两点的速度差可以表示为：

$$\left.\begin{aligned}du&=\varepsilon_{xx}dx+\varepsilon_{xy}dy+\varepsilon_{xz}dz-\omega_z dy+\omega_y dz\\dv&=\varepsilon_{yx}dx+\varepsilon_{yy}dy+\varepsilon_{yz}dz+\omega_z dx-\omega_x dz\\dw&=\varepsilon_{zx}dx+\varepsilon_{zy}dy+\varepsilon_{zz}dz-\omega_y dx+\omega_x dy\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式中　ε_{xx}，ε_{yy}，ε_{zz}分别表示单位时间内单位长度流体沿x，y，z方向的延伸率：

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-7}$$

$\varepsilon_{yz}(\varepsilon_{zy})$，$\varepsilon_{xz}(\varepsilon_{zx})$，$\varepsilon_{xy}(\varepsilon_{yx})$分别表示微元流体在垂直于$x$，$y$，$z$轴的平面上的剪切变形速度：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{yz}&=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\\varepsilon_{xz}&=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\\varepsilon_{xy}&=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

ω_x, ω_y, ω_z 分别表示微元流体绕坐标轴的回转角速度：

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\\omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\\omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-9}$$

或者

$$\omega=\frac{1}{2}\nabla\times V\tag{1-10}$$

这里 $\nabla\times V$ 表示微元流体回转的强弱，通常称为涡度或涡量。将它写成旋度的形式：

$$\Omega=\mathrm{rot}V=\nabla\times V\tag{1-11}$$

由此可见，微元流体的涡度等于它绕坐标轴回转角速度的 2 倍值。

应用赫姆霍兹速度分解定理，可以把流体的旋转和变形从一般运动中区分开来，使我们有可能将流体运动分成有旋流动和无旋流动，从而可以进行分别研究。同时可以将流体的变形与流体应力联系起来，对于研究粘性的影响有着较大的意义。

流动是否有旋，取决于涡度是否等于零来决定。若 $\nabla\times V\neq0$，称为有旋流动；若 $\nabla\times V=0$，则称为无旋流动。

对于直角坐标系，如果用 ξ，η，ζ 分别表示涡度在 x，y，z 方向的分量，则有：

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\tag{1-12}$$

在圆柱坐标系（θ，r，z）中，对应的涡度分量是：

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{r}\;\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\\eta&=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\\\zeta&=\frac{1}{r}\;\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}\end{aligned}\right\}\tag{1-13}$$

四、速度环量与涡

对于流场中面积为 A、周线为 S 的空间曲面，应用斯托克斯定理，速度环量 Γ 表示为：

$$\begin{aligned}\Gamma&=\iint_A|\Omega|\mathrm{d}A=\iint_A(\xi\mathrm{d}A_x+\eta\mathrm{d}A_y+\zeta\mathrm{d}A_z)\\&=\oint_S(u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y+w\mathrm{d}z)=\oint_S V\cdot\mathrm{d}S\end{aligned}\tag{1-14}$$

式中　A_x，A_y，A_z 分别表示面积 A 在坐标轴 x，y，z 方向的投影面积。由上可知，速度环量与涡度有着密切的关系，同时它在透平机械及其叶栅理论中具有特别重要的意义。

对于无旋流动，只要满足无旋条件 $\nabla\times V=0$，不论流体是否可压还是定常或非定常流动，必有速度势 φ 存在，即

$$V=\nabla\varphi=\mathrm{grad}\,\varphi\tag{1-15}$$

或者

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1-16}$$

所以，无旋流动又称为有势流或位势流。

透平机械中还时常用到自由涡的概念，这里加以简单说明。如图 1-1 所示那样，当流体绕中心 o 作同心圆运动时，如果速度 v_θ 与半径 r 满足 $v_\theta r=\kappa=\mathrm{const}$，扇形 $ABCD$ 的速度环量 $\Gamma=r_0\theta\kappa/r_0-r_i\theta\kappa/r_i=0$，这表明该扇形内的流动为无旋流动，象这样的涡称为自由涡运动。在透平机械特别是风机中，大多数情况下是按自由涡流型设计的。

对于包含中心 o 的任意半径 r 的闭曲线（图中的虚线圆），其速度环量值 Γ 等于 $2\pi\kappa$ 并非为零，而为定值，且与半径 r 无关。说明该部分流体随流线一起绕圆心 o 作涡运动。

五、应力张量

为了分析运动流体中的应力张量，这里以图 1-2 所示的微元六面流体加以说明。如图示那样，作用于该微元六面体单位面积的表面力，分为与表面垂直的法向应力 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{zz} 及与表面平行的切向应力 τ。τ 的第一个下角标表示应力作用面的法线方向，后面的下角标为应力的方向。作用于坐标轴 x，y，z 方向的九个应力分量与变形速度，由于对称性，九个分量只有六个独立，分别组成一个二阶对称应力张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 和变形速率张量 $\boldsymbol{\Lambda}$：

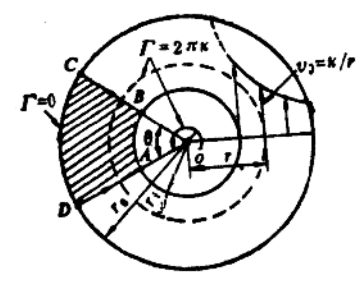

图1-1　自由涡流动

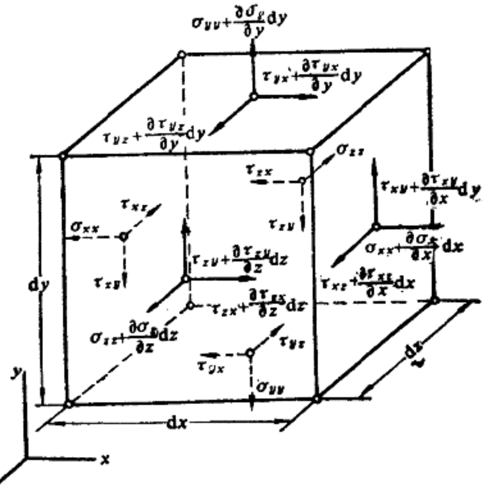

图1-2　微元流体的表面应力

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix} \tag{1-17}$$

根据牛顿粘性公式及式（1-8），可得剪切应力为：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

对于粘性流体运动，严格地说来，并不存在热力学平衡状态上的压力，流体质点的物理量都处在变化过程中，通过任意点的不同表面上的法向应力并不相等，为此，将其平均值定义为流场中任意点的压力 p：

$$p=-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{3}=-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{1-19}$$

式中，负号表示压力为相对于负的法线方向。

对于非粘性流体，法向应力均相等，它与方向无关：

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p \tag{1-20}$$

按照斯托克斯关于应力与变形速率关系的假定，由应力张量分析，可得平均压力 p 与热力学平衡态压力 p_s 的关系为：

$$p=p_s-\mu'\nabla\cdot V \tag{1-21}$$

这里 μ' 称为第二粘度。除了象激波层内的流动以外，对大多数气体和液体的实际流动，都可以按 $\mu'=0$ 处理。

对于粘性流体运动，作用于各表面的法向应力由平均压力 p 和变形速度的粘性力所组成，即

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=-p+\tau_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\sigma_{yy}&=-p+\tau_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\sigma_{zz}&=-p+\tau_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}
\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

式中，粘性力分别用下面式子表示：

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xx}&=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\tau_{yy}&=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\tau_{zz}&=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}
\end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

这里，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

将式（1-18），式（1-22），式（1-23）用应力张量 σ_{ij} 表示的话，可得应力与变形速度的一般关系为：

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\tau_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} \tag{1-24}$$

式中
$$\tau_{ij}=2\mu e_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$$

这里 δ_{ij} 称为克罗内克符号（Kronecker's delta）。当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$； $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

对于圆柱坐标系，应力与变形速度的关系为：

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}&=\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}\right)\\
\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}&=\mu\left(\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\\
\tau_{zr}=\tau_{rz}&=\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-25}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\sigma_\theta&=-p+2\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)-\frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{V}\\
\sigma_z&=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{V}
\end{aligned}\right\} \tag{1-26}
$$

这里
$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\frac{\partial}{r\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

六、作用于单位质量流体的表面力

作用于单位质量粘性流体的表面力 $\boldsymbol{F}_i$，由压力梯度项和粘性摩擦力项构成。它的矢量形式用下式表示：

$$\boldsymbol{F}_i=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+f \tag{1-27}$$

式中
$$\mathrm{grad}=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$$
$$f=(f_x,\ f_y,\ f_z\ 或\ f_r,\ f_\theta,\ f_z)$$

式（1-27）在不同坐标系中的分量为：

直角坐标系：

$$
\left.\begin{aligned}
F_x&=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x}+f_x\\
F_y&=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial y}+f_y\\
F_z&=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}+f_z
\end{aligned}\right\} \tag{1-28}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
f_x&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\\
f_y&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\\
f_z&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-29}
$$

圆柱坐标系：

$$
\left.\begin{aligned}
f_r &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{r\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\right) \\
f_\theta &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}\right) \\
f_z &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{r\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-30}
$$

将式（1-27）中的f用式（1-30）代替，便可得到圆柱坐标的作用于单位质量流体的表面力。

§1-2　三元流动基本方程组

求解透平机械内流体运动时，空间坐标（x，y，z）及时间t作为四个独立变量，而流体的状态量压力、密度、温度加上流体速度V的三个分量u，v，w，共有六个未知数。它们的求解可以利用下列方程组：

（1）状态方程（表示流体状态量之间的关系式）；

（2）连续方程（根据质量守恒法则）；

（3）运动方程（根据运动量守恒法则）；

（4）能量方程（根据能量守恒法则）。

其中运动方程的矢量形式，对于空间坐标具有三个标量方程式，于是以上方程组的个数与未知数相同。所以，对于不同问题的求解，当初始条件和边界条件给定时，理论上可以完全确定满足边界条件的流体运动状态。

以上方程组就是透平机械流体动力学微分形式的基本方程组，通常简称透平机械基本方程。其中状态方程比较简单，亦可从其它书本上查到，这里予以省略。

应该指出，透平机械中还经常用到积分形式的动量定理及动量矩定理，来确定气流作用在壁面上的力及总的能量传递关系，在本节的最后将给予讨论。

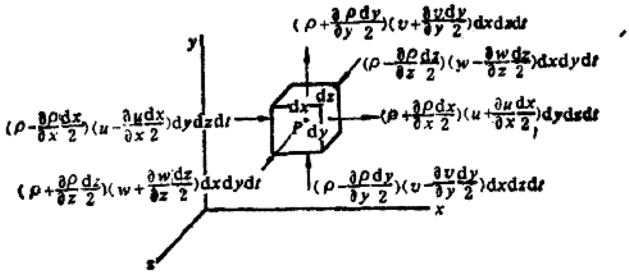

图1-3　连续方程的推导说明

一、连续方程

如图 1-3 所示，现以空间任一点P（x，y，z）为中心的微元六面体来考虑。该点的速度为u，v，w，密度为ρ。单位时间dt内通过垂直于x，y，z轴平面的进出口流量已写在图中。由图可见，垂直于x轴的平面进出口流量差q_x为：

$$
q_x = \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydzdt - \left(\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) \times \left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydzdt
$$

$$=\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

故有

$$q_x=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

同理可得垂直于 y，z 轴平面的进出口流量差：

$$q_y=\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$q_z=\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

于是微元六面体流出的流量 q 为：

$$q=q_x+q_y+q_z=\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\mathrm{d}z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

该出口流量 q 应等于微元体内因密度的变化而使得质量减少，即

$$q=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由以上两式，最后可得直角坐标系的连续方程为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{1-31}$$

或

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0 \tag{1-32}$$

对于定常流动：

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{1-33}$$

对不可压缩流动，无论定常还是非定常：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1-34}$$

由上可知，$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})$ 表示通过空间内某点单位体积的出口流量。对于二元定常流动，必然存在着自动满足上述连续条件的流函数 ψ，它与速度的关系为：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}u,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_0}v \tag{1-35}$$

这里 ρ_0 表示参考点的密度。对不可压缩二元流场，ψ 可写成常见的形式：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v \tag{1-36}$$

对于圆柱坐标系，按照类似的推导，写出该坐标系的连续方程为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{1-37}$$

对于定常流动：

$$\mathrm{div}(\rho V)=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{1-38}$$

对于不可压缩流动：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{1-39}$$

对于定常流动，当考虑轴对称时：

$$\mathrm{div}(\rho V)=\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\rho v_r}{r}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{1-40}$$

圆柱坐标系中可压或不可压情况下的流动函数关系分别为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\rho}{\rho_0}v_\theta,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\rho}{\rho_0}v_r\\&\frac{\partial\psi}{\partial r}=-v_\theta,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=v_r\end{aligned}\right\} \tag{1-41}$$

顺便指出，对于相对坐标系，只要将式（1-37）中的速度$\boldsymbol{V}$换成相对速度$\boldsymbol{W}$后，便可得到该坐标系的连续方程表达式。

二、运动方程

1. 直角坐标系

运动方程可以用牛顿第二定律来描述，即某物体的质量和加速度的乘积，与作用于该物体的力相等。据此写出图 1-2 所示的单位质量六面体的运动方程式为：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}_t \tag{1-42}$$

作用于该单位质量流体的力 $\boldsymbol{F}_t$，除了外力$\boldsymbol{F}(x, y, z)$外，还包括内部应力产生的表面力 $\boldsymbol{F}_i$。将式（1-27）代入上式，运动方程可以写成：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\boldsymbol{f} \tag{1-43}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+f_x\\\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+f_y\\\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+f_z\end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

式（1-43）、式（1-44）也就是通常所称的纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程或N-S方程。式中右边第一项为外力（如质量力），第二项为压力梯度,第三项表示摩擦力。左边表示单位质量流体的惯性力。所以N－S方程也称平衡方程。

对于动力粘度 $\mu=\nu\rho$ 为常数的粘性流体（ν 为运动粘度），把式（1-18）、式（1-23）、式(1-29)代入上式，可得：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}&=X-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\ \nu\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}&=Y-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\ \nu\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}&=Z-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\ \nu\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

或者

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}\,p+\nu\nabla^2\boldsymbol{V}+\frac{1}{3}\nu\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}) \tag{1-46}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于不可压缩粘性流动：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\nu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1-47}$$

对于非粘性流体，不论压缩性有无：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \tag{1-48}$$

或者

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\ \mathrm{grad}|\boldsymbol{V}|^2-\boldsymbol{V}\times\ \mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \tag{1-49}$$

将式（1-48）写成分量有：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}&=X-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}&=Y-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}&=Z-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-50}$$

式（1-48）、式（1-49）、式（1-50）即是人所共知的欧拉方程。

2．圆柱坐标系

对于如图 1-4 示出的圆柱坐标系，微元流体在 r，θ 方向的运动量变化，除了加速度 $\mathrm{D}v_r/\mathrm{D}t$ 和 $\mathrm{D}v_\theta/\mathrm{D}t$ 外，分别还有离心加速度（$-v_\theta^2/r$）和哥氏加速度（$v_r v_\theta/r$）所引起的运动量变化。作用于该单位质量流体的力有外力 $\boldsymbol{F}(R,\ \Theta,Z)$ 和表面力 $\boldsymbol{f}(f_r,\ f_\theta,f_z)$，故圆柱坐标系的 N－S 方程为：

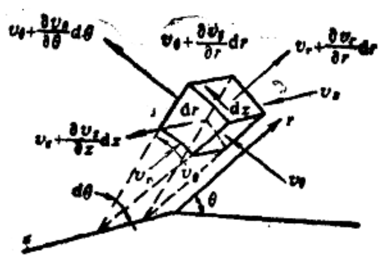

图1-4　圆柱坐标的速度变化

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}v_r}{\mathrm{D}t}-\frac{v_\theta^2}{r}=R+f_r\\&\frac{\mathrm{D}v_\theta}{\mathrm{D}t}+\frac{v_r v_\theta}{r}=\Theta+f_\theta\\&\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}=Z+f_z\end{aligned}\right\}\tag{1-51}$$

对于不可压缩粘性流动：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}v_r}{\mathrm{D}t}-\frac{v_\theta^2}{r}=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)\\&\frac{\mathrm{D}v_\theta}{\mathrm{D}t}+\frac{v_r v_\theta}{r}=\Theta-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)\\&\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z\end{aligned}\right\}\tag{1-52}$$

式中
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于非粘性流体，不论有无压缩性，圆柱坐标的欧拉方程写成与式（1-50）的对应形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}v_r}{\mathrm{D}t}-\frac{v_\theta^2}{r}=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\&\frac{\mathrm{D}v_\theta}{\mathrm{D}t}+\frac{v_r v_\theta}{r}=\Theta-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\&\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{1-53}$$

利用式（1-1）、式（1-2）分别把式（1-50）和式（1-53）左边的第一项展开，便可得到欧拉方程的常用分量形式。

3．相对圆柱坐标系

研究透平机械内部流动计算时，往往采用相对圆柱坐标系。由绝对速度与相对速度的关系，

$$v_r=w_r,\quad v_\theta=w_\theta+r\omega,\quad v_z=w_z\tag{1-54}$$

或者

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\tag{1-55}$$

可得绝对坐标和相对坐标系的加速度关系为：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{W}}{\mathrm{D}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r}\tag{1-56}$$

式中　ω为角速度。

将式（1-56）替代式（1-48），便可得到相对直角坐标系中的欧拉方程：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{W}}{\mathrm{D}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p\tag{1-57}$$

或者

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}|\boldsymbol{W}|^2-\boldsymbol{W}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{W}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p \tag{1-58}$$

当不考虑外力时，由式（1-53）可以直接写出相对圆柱坐标系的欧拉方程的常见形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}w_r}{\mathrm{D}t}-\frac{(w_\theta+\omega r)^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial r}\\
&\frac{\mathrm{D}w_\theta}{\mathrm{D}t}+\frac{w_r w_\theta}{r}+2\omega w_r=-\frac{1}{r\rho}\ \frac{\partial p}{\partial \theta}\\
&\frac{\mathrm{D}w_z}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-59}$$

利用热力学关系：

$$\frac{\nabla p}{\rho}=\nabla i-T\nabla s \tag{1-60}$$

运动方程式（1-49）可以改写成：

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=-\nabla I+T\nabla s+\boldsymbol{F} \tag{1-61}$$

式中　总焓 $I=i+v^2/2$

对于定常流动、且不考虑外力时，绝对运动方程为：

$$-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=-\nabla I+T\nabla s \tag{1-62}$$

利用相对坐标与绝对坐标的速度关系式（1-55），相对运动方程式（1-58）又可写成：

$$-\boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{W}+2\boldsymbol{\omega})=-\nabla I_R+T\nabla s \tag{1-63}$$

式中　转子焓

$$I_R=I-r\omega v_\theta \tag{1-64}$$

三、能量方程

单位质量流体（如图1-5）$\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在$\mathrm{d}t$时间内，其内能的变化及在压力作用下因体积变化对外所作的功为：

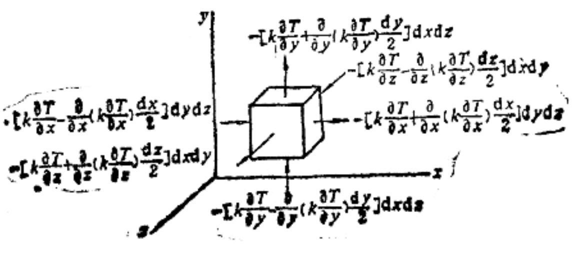

图1-5　微元质量流体的传热

$$\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left[\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\,\frac{\mathrm{D}(1/\rho)}{\mathrm{D}t}\right]\mathrm{d}t$$

按照热力学第一法则，它应与流体从外界所得到的热量 q（忽略辐射热）及流体因粘性

产生的热量Φ的和相等：

$$\rho dxdydz\left[\frac{De}{Dt}+p\frac{D(1/\rho)}{Dt}\right]dt=(q+\Phi)dxdydzdt$$

于是可得能量方程为：

$$\frac{De}{Dt}=-p\frac{D(1/\rho)}{Dt}+\frac{1}{\rho}(q+\Phi) \tag{1-65}$$

由于热传导，单位时间、单位体积内流体所获得的热量q，由傅里叶法则可以写成：

$$q=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}T) \tag{1-66}$$

式中　k表示热导率。k与动力粘度μ一样，系压力p和温度T的函数。当k为常数时，上式可以表示为：

$$q=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=k\nabla^2 T \tag{1-67}$$

流体因粘性所产生的热流量Φ，能够通过作用于微元六面体任意相对应两面的粘性力与变形之间的关系求得。它可以写成：

$$\Phi=\left(\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\left[\tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \tag{1-68}$$

把式（1-18）、式（1-22）代入上式加以整理得到，

$$\Phi=-\frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{V})^2+2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \tag{1-69}$$

Φ是因为内部应力的粘性效果，使得流体摩擦（变形）以热量耗散所产生的能量损失，故常称Φ为能量耗散函数。可以证明，耗散函数Φ永远为正值。

如果引入单位质量气体比焓$i=e+p/\rho$的关系，则能量方程式（1-65）又可表示为：

$$\frac{Di}{Dt}=\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+\frac{1}{\rho}(q+\Phi) \tag{1-70}$$

对于完全气体有：

$$e=c_vT,\quad i=c_pT \tag{1-71}$$

把上式和式（1-67）代入式（1-65）和式（1-70）可得：

$$c_p\frac{DT}{Dt}-\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}=c_v\frac{DT}{Dt}+p\frac{D(1/\rho)}{Dt}=\frac{1}{\rho}(k\nabla^2T+\Phi) \tag{1-72}$$

对于不可压缩流体，上式则变为：

$$c_v\frac{DT}{Dt}=\frac{1}{\rho}(k\nabla^2T+\Phi) \tag{1-73}$$

利用式（1-73），于是可以求得流场的温度分布。

对于理想完全气体，将式（1-71）及状态方程$p=\rho RT$代入式（1-70），可以得到：

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0 \tag{1-74}$$

式中　$\gamma=c_p/c_v$称为比热[容]比。引入完全气体熵的热力学关系式：$s=c_v\ln(p/\rho^{\gamma})$ +常数并代入上式，可得理想完全气体在绝热流动时的能量方程为：

$$\frac{Ds}{Dt}=0 \tag{1-75}$$

上式表明，当理想完全气体作绝热流动时，流体沿每条流线的熵值保持不变，即作等熵流动。

下面讨论欧拉方程的积分形式，可以得到伯努利(Bernoulli) 方程的一般表达式。

为了便于对欧拉方程式（1-49）进行积分，假设定义：

$$P=\int\frac{dp}{\rho}=\int\frac{dp}{f(p)}$$

当P亦为p的函数时，于是有：

$$\frac{1}{\rho}\text{grad}\,p=\text{grad}\,P$$

当外力只是重力，根据质量力有势条件：

$$\boldsymbol{F}=-\text{grad}\,U \tag{1-76}$$

式中　U为质量力势。把上述关系代入欧拉方程式（1-49），可以得到：

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}=-\text{grad}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2+P+U\right)+\boldsymbol{V}\times\text{rot}\boldsymbol{V} \tag{1-77}$$

对于无旋流动，必有速度势φ的关系式（1-15）存在，把该式代入上式并积分得到：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2+P+U=F(t) \tag{1-78}$$

式中　$F(t)$为时间t的任意函数。式（1-78）就称为伯努利方程的一般表达式，亦称压力方程式。

对于定常流动，对式（1-77）积分后可得常见形式的伯努利方程为：

$$\frac{1}{2}V^2+P+U=\text{常数} \tag{1-79}$$

对于不可压缩流动，当不考虑位置变化时，其伯努利方程可写成：

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{1-80}$$

这里$P=p/\rho$。该式说明，对不可压缩流动，沿流线的动压和静压保持不变。

四、动量方程和动量矩方程

利用连续方程的关系，对运动方程进行积分，便能获得动量方程。应用动量方程虽然不能求解流场内部流动的有关数据，但是用它可以方便地了解流场的总性能和能量转换。它无论对粘性流体还是理想流体，也无论内部流场是层流还是湍流运动，或经历何种热力过程，它是一个普遍适用的流动关系式，亦是透平机械的一个重要的基本方程，下面对此进行一般的讨论。

这里取流场中某一闭曲面S所围成的控制体R来考虑。将运动方程式（1-43）用于该控制体，并在空间R内对式（1-43）进行积分有：

$$\iiint_R\rho\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}\,dR=\iiint_R\rho\boldsymbol{F}dR+\iiint_R\text{grad}\,p\,dR+\iiint_R\rho\boldsymbol{f}\,dR \tag{1-81}$$