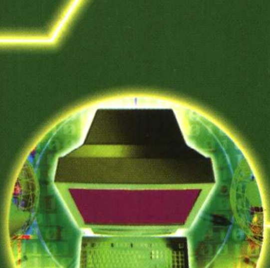
21世纪高等院校基础课规划教材

# 高等数学

梅 挺 主编

邓丽洪 副主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高等院校基础课规划教材

# 高等数学

梅 挺 主 编

邓丽洪 副主编

中国水利水电出版社

## 内 容 提 要

本书是根据高等院校对应用数学基础的基本要求组织编写的，介绍了最基本的知识和解决实际问题的方法。主要内容有：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步等。本书突出了教材内容的针对性和实用性，注重学生基本技能、创新能力和综合应用能力的培养，体现了高等院校应用数学基础教育的特点和要求。

本书内容丰富，图文并茂，语言流畅，通俗易懂，可操作性强。本书配有大量例子、习题和习题答案，可供读者参考和练习。

本书可作为全国高等学校非数学类专业本科教材使用，同时也可作为高等专科学校的教材使用。

**本书提供教学用电子教案，读者可从中国水利水电出版社网站（http://www.waterpub.com.cn/softdown/）下载相关教学资料。**

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学／梅挺主编．—北京：中国水利水电出版社，2007

21世纪高等院校基础课规划教材

ISBN 978-7-5084-4607-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．梅…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第133042号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高等数学 |
| 作　　者 | 梅　挺　主　编　邓丽洪　副主编 |
| 出版　发行 | 中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）63202266（总机）、68331835（营销中心）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京蓝空印刷厂 |
| 规　　格 | 787mm×1092mm　16开本　17.25印张　421千字 |
| 版　　次 | 2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷 |
| 印　　数 | 0001—4000册 |
| 定　　价 | 26.00元 |

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

# 前　言

本书是根据高等院校对数学基础知识教育的具体要求，遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”与“必需、够用为度”的原则组织编写的。本书语言精练，内容深入浅出，实例丰富，具有“系统、实用、通俗”的特点。

本书由长期在教学第一线担任高等数学教学工作的教师编著，他们结合多年的数学教学经验，源于数学教学特点和工作实际，在写作过程中，以初学者的身份和心理量身编写和安排了本书内容，同时列举了大量新颖的例题。书中每章都有小结和习题、每节都有练习，能使学习者很快掌握所学知识并能运用到实际工作中去。

## 主要内容

本书的主要内容包括：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步等。此外，本书还提供每章中习题的答案，还在附录中列出了相关的积分表，以为大家在学习和练习中提供帮助。

## 特点

本书在编写方法上突出了实用性，注重学生基本技能和创新能力的培养。书中引用了大量新颖的例题、习题，这些题目有助于开阔学生视野，启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而不仅会学数学，也会用数学。在编写过程中，确定以应用作为出发点和目的，从具体问题入手，引出问题，然后逐步引出概念和结论。

本书还配套编写了《高等数学学习指导》，该书对每一章的内容都进行了概括和总结，对难度较高的“思考和练习”作出了解答，对每章的习题给出了详细的解题过程，最后提供了一些综合例题和模拟试题。

## 适应对象

本书语言通俗易懂，内容丰富翔实，突出了以实例为中心的特点，适合作为全国高等学校非数学类专业本科教材使用，同时也可作为高等专科学校的教材使用。

## 编写分工

本教材由梅挺任主编，邓丽洪任副主编。其中，第 1 章由叶顺军编写；第 2 章由王霞编写；第 3 章由张明编写；第 4 章由梅挺、张明编写；第 5 章由贾其锋编写；第 6 章由邓丽洪编写；第 7 章由梅挺编写。全书由梅挺负责统稿工作，由邓丽洪和贾其锋负责审校工作。同时参与本书编写的人员还有邹素琼、赵秋云、赵继军、彭艺、曲辉辉、周章、蒋波、徐留旺、曹振宇、张婷、温凌霜、鲁得翠、蒋泽平、魏乐、韩翔、程小英、谭小丽、卢丽

娟、李小琼、周宏、罗吉、许翔燕、陈春、张忠、方小马、黄姹英、周明、宋晶、邓勇等，在此一并表示感谢！

为充分展现本书的编写特点，帮助读者深刻理解本书编写意图与内涵，进一步提高对本书教学的使用效率，我们建立本书使用指导联络方式，是读者与编者之间交流沟通的直通车。欢迎读者将图书使用过程中的问题与各种探讨、建议反馈与我们，本书编者会竭诚为你服务，我们的联系方式 E-mail：china_54@tom.com。同时为了方便教师教学，本书电子教案可以从中国水利水电出版社网站免费下载，网址为 http://www.waterpub.com.cn/softdown/。

由于作者水平所限和时间仓促，本教材的覆盖面广，书中错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便我们修订提高。

编者

2007 年 6 月

# 目　　录

# 第 1 章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，极限是高等数学的基础性概念，高等数学中的许多概念都是建立在极限概念的基础之上的，如连续、微分、积分等．本章首先对中学所学函数知识进行复习和补充，然后介绍函数极限和连续的概念．

## 1.1　函数

### 1.1.1　函数的概念

在观察自然现象或研究实际问题时，会遇到很多的量，这些量一般可以分为两种：一种是在所要考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量；还有一种是在这个变化过程中发生变化的量，称为变量．例如，自由落体的物体，下降的时间和下降的距离是变量，而物体的质量在这个过程中就可以看作常量．

**定义 1.1**　设 $X$ 、$Y$ 是非空数集，如果按某个确定的规律 $f$ ，使对于集合 $X$ 中任意一个数 $x$ ，在集合 $Y$ 中都有确定的数 $y$ 与之对应，那么就称 $f(x)$ 是 $X$ 上的函数．记作：

$$y=f(x)\,,\quad x\in X$$

其中，$x$ 称为自变量，$x$ 的取值范围 $X$ 称为函数的**定义域**；与 $x$ 的值相对应的 $y$ 值称为函数值，$y$ 称为因变量，函数值的集合 $Y$ 称为函数的**值域**．

因变量与自变量的对应规律称为函数关系，函数关系除了可以用 $y=f(x)$ 表示外，还可以用其他的字母来表示，如 $y=g(x)$ ， $y=\varphi(x)$ 等，也可以用 $y=y(x)$ 表示．

关于函数定义的几点说明：

（1）构成函数的要素有两个：定义域与对应规律．如果函数的定义域相同，对应规律也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

（2）函数的定义域通常按以下两种情形来确定：在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义来确定；如果函数是由没有明确指出范围的数学表达式给出的，那么函数的定义域就是指使表达式有意义的一切自变量的集合．

（3）函数常用的表示法有解析法、图像法和列表法等．

**例 1**　已知自由落体的运动规律为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ . 假定物体经过了 $T$ 后着地，求此函数的定义域．

**解**　由实际情况知，此函数的定义域为 $0\leqslant t\leqslant T$ ．

**例 2**　求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{4-x^2}$；

（2）$y=\ln\dfrac{x-2}{1-x}$.

**解** （1）只有当根式内的式子 $4-x^2 \geqslant 0$ 时函数才有意义，因此该函数的定义域为 $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

（2）根据对数函数的定义，有 $\dfrac{x-2}{1-x}>0$. 又根据分式中分母不等于零的要求，$1-x \neq 0$. 因此，求此函数的定义域，实际上是解不等式组

$$\begin{cases} 1-x \neq 0, \\ \dfrac{x-2}{1-x}>0. \end{cases}$$

解之得：$1<x<2$.

即 $y=\ln\dfrac{x-2}{1-x}$ 的定义域为 $1<x<2$.

## 1.1.2 函数的几种特性

**1. 单值性与多值性**

对于自变量的每一个取值，函数 $y$ 都有唯一确定的一个值与之对应，这样的函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如，函数 $y=x^3$ 是单值函数；在直角坐标系中，半径为 $r$，圆心在原点的圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，该方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定一个以 $x$ 为自变量 $y$ 为因变量的函数. 当 $x$ 取 $-r$ 或 $r$ 时，对应的函数值只有一个，但当 $x$ 取开区间 $(-r,r)$ 内的任一个数值时，对应的函数值就有两个，所以该函数是多值函数.

以后凡没有特别说明时，函数都指单值函数.

**2. 函数的单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加的，如图 1-1；如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减少的，如图 1-2. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

**3. 函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称（即若 $x \in D$，则必有 $-x \in D$）. 如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

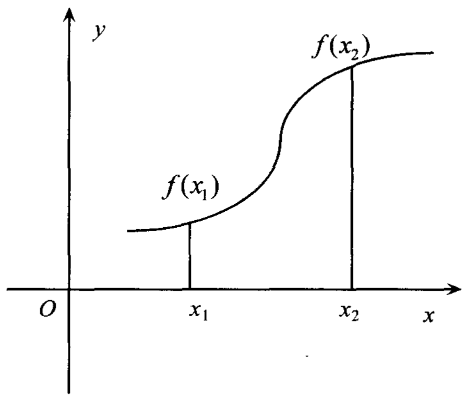



图 1-1

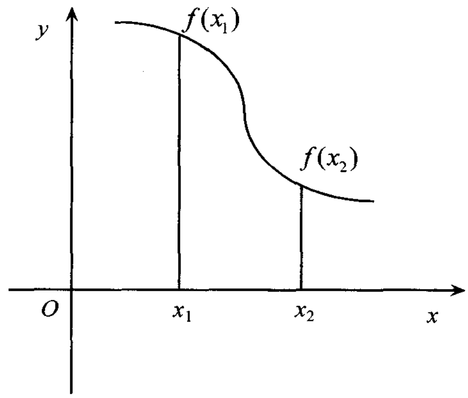



图 1-2

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ . 又例如，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ .

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 $y$ 轴对称.

4. **函数的周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ ，如果存在一个不为零的数 $l$ ，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$ ，且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，$l$ 为函数 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$ ，$\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ ，$\cot x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

5. **函数的有界性**

若存在某个正数 $M$ ，使得不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

对于函数 $f(x)$ 定义域 $D$ 内的一切 $x$ 值都成立，则称函数 $f(x)$ 在定义域内是有界函数；如果这样的正数 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在定义域 $D$ 内是**无界**的.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域内有界；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，但在区间 $(1,+\infty)$ 内却是有界的.

### 1.1.3　复合函数

**定义 1.2**　若变量 $y$ 是变量 $u$ 的函数，变量 $u$ 又是变量 $x$ 的函数，即：

$$y=f(u)\,,\quad u=\varphi(x)\,,$$

且 $x$ 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的一部分上取值时所对应的 $u$ 值，使函数 $f(u)$ 有定义，则称 $y$ 是

$x$ 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $u$ 称为**中间变量**.

例如，函数 $y=\sin^3 x$ 是由函数 $y=u^3$，$u=\sin x$ 复合而成，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

复合函数的中间变量可以不止一个. 例如，函数 $y=\sqrt[3]{\lg(\sin^2 x)}$ 是由 $y=u^{\frac{1}{3}}$，$u=\lg v$，$v=w^2$，$w=\sin x$ 四个函数复合而成的，中间变量有三个：$u$，$v$，$w$.

但不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=2+x^2$ 总大于 1，从而使得 $y=\arcsin u$ 没有意义.

## 1.1.4 初等函数

以下六类函数称为基本初等函数.

常值函数：$y=C$；

幂函数：$y=x^{\mu}$（$\mu$ 是实常数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等；

反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

**定义 1.3** 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的且只能由一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})\cdot\arcsin^3 x$ 就是由基本初等函数的常值函数、幂函数、反三角函数和对数函数经过若干次四则运算及复合运算而构成的，所以是初等函数.

应当注意的是，分段函数不是初等函数，虽然它在自变量变化的不同范围内有不同的表达式，但它只是一个函数. 本课程要讨论的函数绝大多数都是初等函数.

# 练习 1-1

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$；　　（2）$y=\dfrac{x}{\sin x}$；

（3）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$；　　（4）$y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

（1）$f(\sin x)$；　　（2）$f(\ln x+1)$；

（3）$f(x^2)$；　　（4）$f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

3. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的：

（1） $y=\cos\ \ln^3\sqrt{x^2+1}$；　　（2） $y=\tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

（3） $y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$；　　（4） $y=\mathrm{e}^{\arctan\,(2x+1)}$.

4．已知 $f(\mathrm{e}^x+1)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1$，求 $f(x)$ 的表达式.

# 1.2　极限

## 1.2.1　极限的概念

极限是继函数之后，高等数学中又一个基础性概念，它描述了函数的变化趋势．本节根据自变量的变化过程，分两种情形来讨论函数的极限，即 $x\to\infty$ 时函数的极限和 $x\to x_0$ 时函数的极限.

下面分别给出在这两种情形下函数极限的描述性定义.

**定义 1.4**　如果自变量 $x$ 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ （当\ x\to\infty）.$$

从几何图形上来看，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表示：随着 $|x|$ 的增大，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=A$ 越来越接近，即当 $x\to\infty$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上的点与直线 $y=A$ 上对应点的距离 $|f(x)-A|$ 趋于零，如图 1-3 所示.

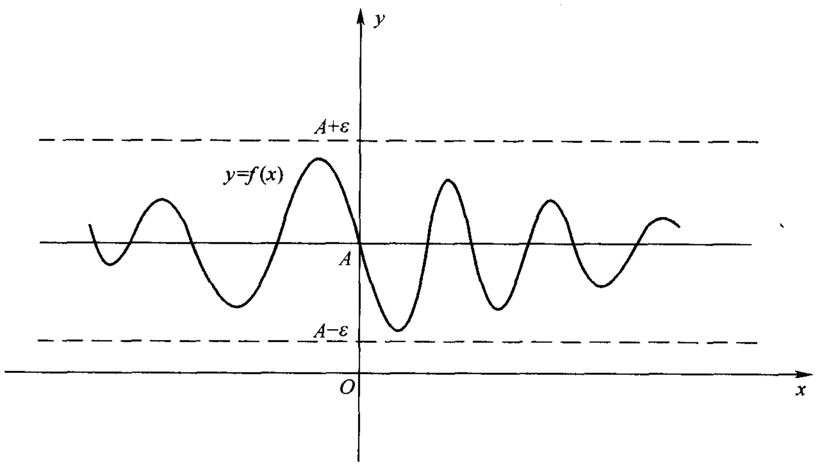



图 1-3

如果仅考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，那么可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

**例 3**　从几何意义可知下列等式成立：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x=0$；　　（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$.

**例 4**　设 $y=\cos x$，当 $x\to\infty$ 时，$\cos x$ 的值在 1 和 $-1$ 之间摆动，不趋近于任何常数，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

**定义 1.5**　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点附近有定义（在 $x_0$ 点可以没有定义），若当 $x$（$x\neq x_0$）无论以怎样的方式趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 都趋近于常数 $A$，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ （当 x\to x_0）.$$

从几何图形上看，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示当 $x$ 无限接近 $x_0$ 但不等于 $x_0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上的点与直线 $y=A$ 上对应点的距离 $|f(x)-A|$ 趋于零.

值得注意的是：

（1）$x\to x_0$ 的方式是任意的，即 $x$ 可以从 $x_0$ 的左侧趋近于 $x_0$，也可以从 $x_0$ 的右侧趋近于 $x_0$. 如果 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限为 $A$，是指 $x$ 无论以哪种方式趋近于 $x_0$ 时，$f(x)$ 都无限趋近于 $A$.

如果只考虑当 $x$ 从 $x_0$ 的左侧趋近于 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 趋近于 $A$，那么称 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的**左极限**，记作：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

同理，如果只考虑当 $x$ 从 $x_0$ 的右侧趋近于 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 趋近于 $A$，那么称 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的**右极限**，记作：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 显然，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在的充分必要条件就是函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左右极限都存在，并且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

因此，如果一个函数在某点的两个单侧极限有一个不存在，或虽然两个都存在但不相等，那么这个函数在该点的极限一定不存在.

（2）当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在 $x_0$ 点是否有定义及在 $x_0$ 点的函数值无关.

**例 5**　函数 $f(x)=2x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，当 $x$ 趋近于 $\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的变化趋势是怎样的？

**解**：如图 1-4 所示，当 $x$ 越来越接近 $\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 就越来越接近于 2.

**例 6**　函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时该函数无定义，但从图 1-5 可以看出，当 $x$ 沿 $x$ 轴以任何方式趋近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 总是无限趋近于 2.

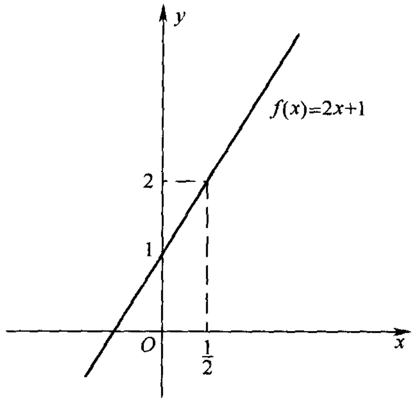



图 1-4

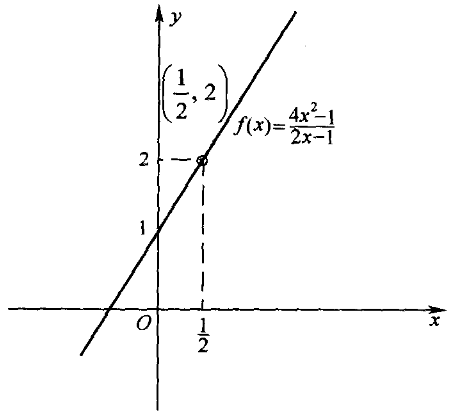



图 1-5

**例 7**　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时极限不存在.

**证**　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，左极限不等于右极限，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

## 1.2.2　极限的四则运算

为了求比较复杂的函数的极限，需要掌握极限的四则运算法则.

**定理 1.1**　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量 $x$ 的同一变化过程中极限分别为 $A$ 和 $B$，即

$$\lim f(x)=A，\quad \lim g(x)=B，$$

则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

特别地

$$\lim[kf(x)]=k\lim f(x)=kA \text{（}k\text{ 为常数）；}$$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）.

**注意**：定理 1.1 所指的“同一变化过程”是指 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，另外，结论（1）（2）可以推广到有限个函数的情形.

**例 8**　求 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$.

**解**　$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2)-\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}1$