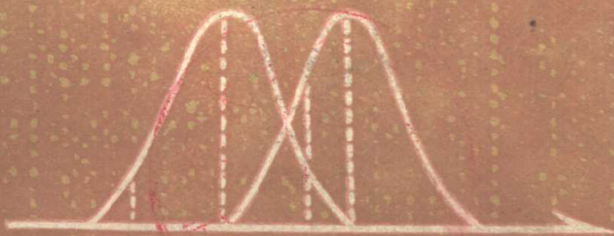
概率统计问答150题

朱秀娟　洪再吉编



湖南科学技术出版社

高等学校理工科参考书

概率统计问答150题

朱秀娟 洪再吉 编

湖南科学技术出版社

概率统计问答150题
朱秀娟　洪再吉编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1982年5月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：13.25　字数：298,000
印数：1——30,700
统一书号：13204·51　　定价：1.40元

前　言

现在，概率统计的思想方法已经渗透到自然科学和社会科学的许多领域中去了．它的应用范围相当广泛．因此，不仅高等院校的许多系要讲习概率统计，而且在中学的数学课程中也加入了这方面的内容；另外，一些业务部门也在举办概率统计的讲座或短训班．学习概率统计的人日益增多．由于概率统计的思想方法有其独特之处，人们在初学时常常感到它的基本概念难懂，习题难做，方法难于掌握．这就需要有适当的辅导书，来帮助他们克服学习中的困难．

概率统计习题解答之类的书已有人出版了．本书则以帮助读者理解、消化基本概念为宗旨．全书采用问答形式，由浅入深地阐明概率统计中的基本概念和思想方法．这些问题大都是初学者的疑难所在．书后附有习题60道，还选编了国内著名大学的各类试卷28份，共有试题350道．我们想，这样安排全书的内容，可能对广大读者比较适用．

在本书编写过程中，我们参阅了国内外许多书籍、文献，从中汲取了丰富的营养；许多老师热情地提供了试题；中国科技大学陈希孺教授在百忙之中审阅了全书原稿．在此，我们一并表示衷心的谢意！

编　者

一九八一年六月

目　录

第一章　排列与组合……………………………………（1）
（一）基本概念与公式……………………………………（1）
（二）问题……………………………………………（2）
1.1　排列与组合含义的区别………………………………（2）
1.2　加法原理和乘法原理………………………………（5）
1.3　几个基本类型问题的解法……………………………（6）
1.4　式子 $\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$ 的含义之一……………………………（8）
1.5　式子 $\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$ 的含义之二……………………………（10）
1.6　能排成多少个四位偶数………………………………（11）
1.7　甲与乙两人间恰有 r 个人的排列有多少种………………（12）
1.8　分房问题……………………………………………（13）
1.9　鞋子配对问题…………………………………………（14）
1.10　在 $n\times n$ 方格的棋盘上有多少个真正的矩形………………（17）
1.11　4×6 棋盘的一种黑白涂染法……………………………（19）
1.12　“最大标号正好是 m”的取法有多少种………………（21）
1.13　“第 m 个数正好等于 m”的取法有多少种……………（22）
1.14　空盒问题……………………………………………（25）
1.15　几个公式的证明………………………………………（26）
1.16　r 个不可分辨的球放入 n 个盒子中可区分的放法种数……（28）
第二章　随机事件和概率……………………………………（29）
（一）基本概念和公式……………………………………（29）

（二）问题…………………………………………………………（33）
2.1 怎样理解“概率”这一概念……………………………（33）
2.2 通过已知事件表达其他事件……………………………（34）
2.3 小概率事件…………………………………………………（35）
2.4 随机抽取一球的含义……………………………………（36）
2.5 事件独立性的含义………………………………………（36）
2.6 独立性与互不相容………………………………………（38）
2.7 多个事件的独立性………………………………………（39）
2.8 m，a，r，y的排列中，某些排列的概率…………………（41）
2.9 哪个裁判组正确裁定的概率大…………………………（45）
2.10 应该检查多少个灯泡……………………………………（46）
2.11 每一节车厢至少进入一个旅客的概率…………………（47）
2.12 机器等待修理的概率……………………………………（51）
2.13 5人生日问题………………………………………………（56）
2.14 正多边形中心位于其顶点所成三角形内部的概率………（57）
2.15 配对问题……………………………………………………（60）
2.16 A，B两袋中球的交换问题………………………………（63）
2.17 系统的可靠性问题………………………………………（65）
2.18 取到A级品的概率………………………………………（68）
2.19 抽签问题……………………………………………………（69）
2.20 肺结核确诊率问题………………………………………（72）
2.21 目标被炸毁的概率有多大………………………………（73）
2.22 不需要等待码头空出的概率……………………………（74）
2.23 蒲丰（Buffon）投针问题………………………………（76）
2.24 下赌注问题…………………………………………………（81）
2.25 $p=\frac{1}{2}$时的n重贝努里试验……………………………（83）
2.26 药效的判断问题…………………………………………（85）
2.27 巴拿赫（Banach）火柴盒问题…………………………（88）
2.28 寿命保险问题………………………………………………（90）

2.29 棋逢敌手，何者先胜……………………………………………………(92)
2.30 父、母、子比赛，父的策略为何最优……………………………(96)
2.31 随机整数三角形……………………………………………………(101)

第三章 随机变量及其分布……………………………………………(104)

（一）基本概念和公式…………………………………………………(104)
（二）问题………………………………………………………………(113)
3.1 两种分布函数定义的比较……………………………………(113)
3.2 怎样使用正态分布表…………………………………………(114)
3.3 由一些假定推导出正态分布…………………………………(118)
3.4 指数分布怎样来的……………………………………………(121)
3.5 候车概率………………………………………………………(122)
3.6 从$P(\xi\geqslant 1)$ 求$P(\eta\geqslant 1)$……………………………………………(123)
3.7 正好有一个错字的页数的百分比……………………………(124)
3.8 合理配备维修工人问题………………………………………(125)
3.9 一维离散型随机变量的函数的分布函数……………………(127)
3.10 均匀分布的特殊性……………………………………………(128)
3.11 二维离散型分布………………………………………………(129)
3.12 二维分布函数的性质问题……………………………………(130)
3.13 用一维密度造二维密度的例子………………………………(132)
3.14 ξ，η，ζ独立同分布时，$\xi=\eta$，……等六个关系
是否成立………………………………………………………(132)
3.15 ζ是ξ的函数，为什么ζ和ξ有时又可以独立………………(135)
3.16 $t^2+tX+Y=0$有实根的概率…………………………………(138)
3.17 商品需要量的概率分布………………………………………(141)
3.18 为什么$(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$与$(\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)})$的
分布不一样……………………………………………………(145)
3.19 串联、并联与系统寿命的关系………………………………(146)
3.20 怎样求$U=\min(\xi,\eta)$，$V=\max(\xi,\eta)$的联合
概率密度………………………………………………………(149)

3.21 离散型变量代换技巧举例……(151)
3.22 连续型变量代换技巧举例……(153)
3.23 已知联合分布$p(x_1, x_2)$时X_1，X_2相互独立的充要条件……(155)
*3.24 随机多项式的分布……(157)
3.25 既非离散型又非连续型的随机变量……(162)
3.26 昆虫繁殖问题……(162)
第四章 随机变量的数字特征……(164)
(一) 基本概念与公式……(164)
(二) 问题……(167)
4.1 碗中筹码的数学期望……(167)
4.2 篮球比赛打几场……(167)
4.3 胸透问题……(169)
4.4 组织多少货源才能使国家收益最大……(173)
4.5 候车多久……(174)
4.6 Gini平均差的期望……(175)
4.7 哪一化验方案好……(176)
*4.8 电梯问题……(179)
4.9 有奖储蓄中奖问题……(181)
*4.10 集合的宽度的数学期望……(188)
4.11 试验的期望次数……(190)
4.12 中位数为何那样定义……(191)
4.13 由贝努里试验引出的二维向量……(192)
4.14 极值分布的期望值和方差……(194)
4.15 设ξ_1，ξ_2服从$N(\mu, \sigma^2)$，试证$E(\max(\xi_1, \xi_2))=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$……(197)
4.16 配对问题的数学期望和方差……(200)
4.17 不相关也不独立的例子……(203)

4.18 若ξ，η都只取两个值，则不相关必独立…………………(206)
4.19 水电公司获利多少……………………………………………(209)
4.20 工人在机器间行走的距离……………………………………(212)
4.21 超几何分布的均值及期望……………………………………(214)
4.22 数学期望和方差不存在的例子………………………………(217)
4.23 经过时间t后放射性物质质量的数学期望………………(217)
4.24 多项分布的协方差阵…………………………………………(218)
*4.25 随机排列的函数的均值与方差………………………………(220)
*4.26 计算电路问题……………………………………………………(227)
4.27 递降联合密度的期望…………………………………………(228)
4.28 不相识顾客的座位排列………………………………………(229)
4.29 正态分布变量的线性组合……………………………………(230)
*4.30 圆内随机区域的期望值………………………………………(232)
4.31 图朝上发生所需抛的次数的期望值…………………………(235)
4.32 票券收集问题……………………………………………………(237)

第五章 极限定理……………………………………………………(240)

(一) 基本概念和公式……………………………………………(240)
(二) 问题……………………………………………………………(242)
5.1 每毫升血液中白细胞数含量的估计…………………………(242)
5.2 如何理解贝努里大数定理……………………………………(243)
5.3 直观说明中心极限定理的例子………………………………(250)
5.4 舍入误差的概率估计…………………………………………(251)
5.5 戏院应设多少个座位…………………………………………(253)
5.6 应供应多少电力才能保证此车间正常生产…………………(254)
5.7 最大顺序统计量的极限分布…………………………………(257)
5.8 斯特灵公式的概率证明………………………………………(258)

第六章 参数估计……………………………………………………(262)

(一) 基本概念和公式……………………………………………(262)

(二) 问题……(267)
6.1 样本加长时怎样计算样本均值和方差……(267)
6.2 荧光屏上闪烁次数的估计……(269)
6.3 未发现的印刷错误个数的估计……(270)
6.4 哪种颜色的球占$\frac{1}{4}$……(270)
6.5 捕鱼问题……(271)
6.6 在$(0,\theta]$上均匀分布的参数θ的最大似然估计用
$\hat{\theta}=\min(x_1,\cdots,x_n)$为什么是错的……(274)
6.7 求分布函数$F(t;\mu,\sigma^2)$的估计……(277)
6.8 对矩估计成立"不变性"吗？……(279)
6.9 最大似然估计是否必有唯一性……(280)
6.10 当$\xi\sim p(x,\theta)=\begin{cases}1 & \theta-\frac{1}{2}<x<\theta+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$时，
较$\mathbf{X}$有效的θ的无偏估计量……(281)
6.11 似然方程的解都是最大似然估计吗？……(285)
6.12 达到方差界的无偏估计量……(288)
6.13 用极差估计正态总体的标准差……(289)
6.14 二项分布$B(n,p)$的参数p的区间估计……(292)
6.15 泊松分布$P(\lambda)$的参数λ的区间估计……(293)
6.16 欲使σ^2的置信区间$\left(\frac{ns^2}{b},\frac{ns^2}{a}\right)$最短，$a$，$b$
应满足什么条件……(294)
6.17 求a，σ^2的无偏估计值，及$100(1-\alpha)\%$的置信区间……(295)
6.18 在二正态总体时如何求均值差和方差比的置信区间……(297)
第七章 假设检验……(300)
(一) 基本概念和公式……(300)
(二) 问题……(309)

7.1 在统计假设检验中，如何确定零假设H_0和对立假设H_1 ……(309)
7.2 新药是否更有效……(310)
7.3 若要犯两类错误的概率同时减少，“只有增大容量n”的例子……(313)
7.4 质量管理中的假设检验……(314)
7.5 求显著性水平与第二类错误的例……(315)
7.6 求犯第一类错误的概率和检验法功效的例……(317)
7.7 化学疗法家的治癌方法是否更有效……(318)
7.8 新的计算系统优于旧的系统吗……(320)
7.9 哪个药厂的麻疹疫苗抗体强度高……(320)
7.10 维尼纶纤度总体的标准差是否正常……(322)
7.11 橡胶配方中能改变一下某一成份的含量吗……(322)
7.12 新的提炼法比旧的好吗……(323)
7.13 电话交换台接到的呼唤次数ξ服从泊松分布吗……(325)
7.14 如何确定最佳检验……(326)

第八章 回归 ……(329)

(一) 基本概念和公式……(329)
(二) 问题……(335)
8.1 老鼠中血糖的减少量和注射胰岛素的剂量间的关系……(335)
8.2 树高与树直径的回归关系……(336)
8.3 气体压力和体积的回归关系……(338)
8.4 化学反应中未转化的物质的量与化学反应时间的回归关系……(339)
8.5 收缩压关于体重和年龄的回归……(341)

练习题（60道） ……(344)
练习题答案 ……(353)

概率统计试题（共有试卷28份）……………………………………（357）

一 非数学专业类 10份……………………………………（357）

二 数学专业类 14 份……………………………………（377）

三 考研究生类 4 份……………………………………（398）

四 竞赛题 1份……………………………………（403）

附录 常用分布的密度、期望、方差表……………………………（405）

参考书目……………………………………………………（409）

第一章　排列与组合

（一）　基本概念与公式

1．乘法原理：设完成一件事有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，……，第 n 步有 m_n 种方法，且完成这件事必须经每一步，则完成这件事共有 $m_1\times m_2\times m_3\times\cdots\times m_n$ 种方法。

2．加法原理：设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类方法中的一种方法，这件事就可以完成。若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，……，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，那末完成这件事就有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法。

3．排列

(1) 选排列与全排列：从 n 个不同元素中，无放回地取出 m 个 $(m\leqslant n)$ 元素进行排列，共有

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\qquad(1)$$

种，称这种排列为选排列。当 $m=n$ 时称它为全排列，共有

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!\qquad(2)$$

种。规定 $0!=1$。

(2) 有重复的排列：从 n 个不同元素中有放回地取 m 个的

排列，共有

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m\text{个}}=n^m \tag{3}$$

种.

(3) 不全相异元素的全排列：若n个元素中，有m类($1<m\leqslant n$)本质不同的元素，而每类元素分别有$k_1,k_2,\cdots,k_m$个相同的($k_1+\cdots+k_m=n$, $1<k_i<n$, $i=1,2,\cdots,m$)，将此n个元素取来全排列，共有

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \tag{4}$$

种.

4. 组合

(1) 组合：从n个不同元素中取出m个元素而不考虑其顺序，称它为组合，其总数为

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{5}$$

有时C_n^m又记为$\binom{n}{m}$，且$\binom{n}{0}=1$，若$r>n$，$\binom{n}{r}=0$.

(2) 组合数的两个性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m}, \tag{6}$$

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}. \tag{7}$$

(二) 问　　题

1.1 (排列与组合含义的区别) 在解排列组合应用问题时，

怎样判断是排列问题还是组合问题？

答：主要是排列与顺序有关而组合与顺序无关。根据这一点，结合问题的具体含义去分析，就不难得出正确的答案。

例如：某班有30个同学，现要从中选出三人组成班委会，三人分别担任班长、学习委员、文体委员。有二种选举方法，第一种只从这30人中选出3人来组成班委会，由被选到的人自己去分工；第二种则谁担任什么职务也由选举决定。这两种选法中，问哪个是排列性质而哪个是组合性质呢？

若把三个职务排成一顺序，则第一种选法只要选出三人即可，而不必顾及3人的顺序，因此，应属于组合问题。总共的选法应是

$$C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!27!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}=5\cdot 29\cdot 28=4060$$

种。第二种选法，除了要选出3个人外，还得确定他们担任什么职务，这表示选出的3个人还有一个顺序问题，这里的顺序从表1—1中看得很清楚。

表1—1

班　　长	学　习　委　员	文　体　委　员
A_1	A_2	A_3
A_1	A_3	A_2
A_2	A_1	A_3
A_2	A_3	A_1
A_3	A_1	A_2
A_3	A_2	A_1

其中A_1，A_2，A_3表示从30人中选出的3人，从表中看出同样3个人有6种不同的分工方式，就是6种不同的排列。既然这里有个顺序问题，就是排列问题，因此其选法的总数应为

$$A_{30}^{3}=30\cdot29\cdot28=24360.$$

通常排列问题与组合问题是有密切联系的，例如第二种选法中，从30个人中选出 3 人的方式数是 C_{30}^{3}，而这 3 人再进行分工(即进行排列)有3!种排法，故按乘法原理第二种选法的总数为

$$C_{30}^{3}\cdot3!,$$

即 $$A_{30}^{3}=C_{30}^{3}\cdot3!,$$

一般，排列数A_n^m与组合数C_n^m有下列关系：

$$A_n^m=C_n^m\cdot P_m.$$

为此，若在一具体问题中要计算的是取m 个的排列或组合的方法数的比值$\frac{A_r^m}{A_n^m}$，则因为$\frac{A_r^m}{A_n^m}=\frac{C_r^m\cdot P_m}{C_n^m\cdot P_m}=\frac{C_r^m}{C_n^m}$,用排列来计算与用组合来计算结果是一样的.

例如，某店出售10个某种产品，其中 7 个为合格品， 3 个为不合格品．每人买一个，问第一人与第二人都买到不合格品的概率是多少？像这个问题既可以用组合来做，也可以用排列来做．所求概率为

$$\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3\times2/2}{10\times9/2}=\frac{1}{15},$$

或

$$\frac{A_3^2}{A_{10}^2}=\frac{3\cdot2}{10\cdot9}=\frac{1}{15}.$$

为了使你自己能熟练地掌握排列与组合的区别，不妨对下列诸题去进行分析对比，并求出正确答案．

(1) 有10个同学两两握手，问共握了几次手？如果两两互赠照片--张，总共需几张？

(2) 假期中有10个同学，每两人互相通了一次电话，问共

打了几次电话？如果每两人中各给对方写信一封，问共写了几封信？

(3) 从5本不同的书里选两本，一共有多少种不同的选法？如果选两本分送给甲、乙两人，一共有多少种送法？

现把答案分别列出，以便查对：(1) C_{10}^2，A_{10}^2；(2) C_{10}^2，A_{10}^2；(3) C_5^2，A_5^2。

1.2（加法原理与乘法原理） 在解决实际问题时什么情况用加法原理，什么情况用乘法原理？

答： 这可以结合实际问题来加以说明．例如某人从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘轮船．在这一天不同的时间中，火车有5次，轮船有3班，问此人的走法有几种？在这个问题中，因为坐火车可从甲地到乙地，坐轮船也可从甲地到乙地．从这个意义上来说每次车和每班船的地位都是平等的．而乘车走有5种(即C_5^1)走法，乘船走有3种(即C_3^1)走法，故从甲地到乙地共有$C_5^1+C_3^1=8$种走法．一般若从甲地到乙地有火车m次，轮船n班，则共有

$$C_m^1+C_n^1=m+n$$

种走法．

又例如某人从底楼到三楼．今知从底楼到二楼有四个楼梯可走，又从二楼到三楼又有2个楼梯可走，那末此人从底楼到三楼共有几种走法？在这个问题中，因从底楼到三楼必须分以下二步完成：先从底楼到二楼，此时有4种(即C_4^1种)走法，再从二楼到三楼，此时有2种(即C_2^1种)走法，每一种底楼到二楼的走法与每一种二楼到三楼的走法相配合就得到底楼到三楼的一种走法．所以此时底楼到三楼的走法共有

$$C_4^1\cdot C_2^1=4\times 2=8$$

种．若在底楼到三楼的这个问题中，加上2个电梯，可直接从