BANG NI TIANSHE FUZHUXIAN

帮你添设辅助线

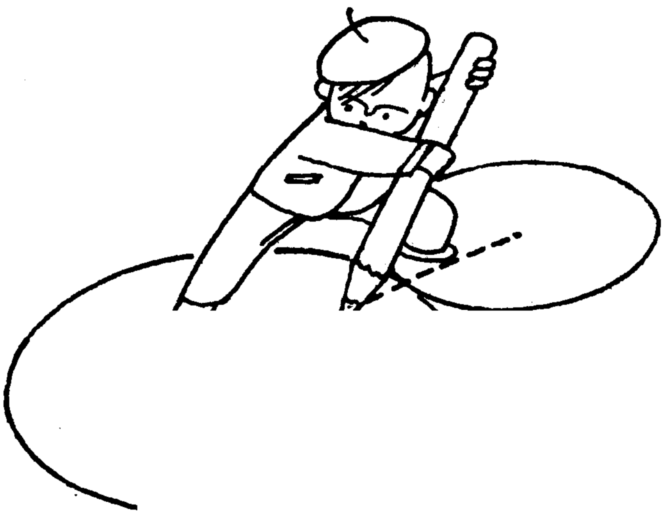
胡杞　李湘凤　著

中国少年儿童出版社

帮你添设辅助线

BANGNI TIANSHE FUZHUXIAN

胡杞 李湘凤 著



中国少年儿童出版社

封面设计：王庆生
责任编辑：陈效师
美术编辑：林继勋

帮你添设辅助线

胡 杞 李湘凤 著

*

中国少年儿童出版社出版 发行
中国青年出版社印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 5.75印张 88千字
1988年2月北京第1版 1988年2月北京第1次印刷
印数 1—17,000册 定价 1.05元

内 容 提 要

添设辅助线是初中平面几何中的难点。学好这部分知识对培养同学们的逻辑思维能力和创造性思维能力十分有益。

本书主要分为两大部分：一部分详尽介绍了在平面几何中常用辅助线的添设方法；另一部分重点介绍了在平面几何证明中四种重要的思想方法：构造、化归、待定、变换。如果说第一部分是解题的钥匙，那么第二部分则是制造钥匙的方法。你手中有了钥匙，又有了制造钥匙的方法，那还有什么不可解决的难题呢？

目　　录

第一章　函数与极限

微积分研究的对象是函数．所谓函数就是变量之间单值的依赖关系．极限是研究函数的一个基本工具.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，并建立一些有关极限的运算法则．

第一节　变量与函数

一、函数的概念

1．常量与变量

在所研究的问题中有各种不同的量，只取一个确定数值的量叫常量，可取不同数值的量叫变量．例如，在计算圆面积的公式 $A=\pi r^2$ 中，圆周率 $\pi=3.14159\cdots$，它是一个常量，圆半径 r 和圆面积 A 可取不同数值，它们是变量．通常用字母 a, b, c 等表示常量，用字母 x, y, z, t 等表示变量．

任何一个变量总有一定的变化范围．有时变量 x 可取的数值没有限制，可取所有实数，它的变化范围是 $-\infty<x<+\infty$，就是 x 在开区间 $(-\infty, +\infty)$ 内变化；有时变量 x 可取的数值有限制，如果它的变化范围是 $a<x<b$，就说 x 在开区间 (a, b) 内变化；如果它的变化范围是 $a\leqslant x\leqslant b$，就说 x 在闭区间 $[a, b]$ 上变化；如果它的变化范围是 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$，就说 x 在半开半闭区间 $(a, b]$ 或半闭半开区间 $[a, b)$ 内变化．用不等式或间表示的变量的变化范围也可用数轴上的一条线段（或射线）

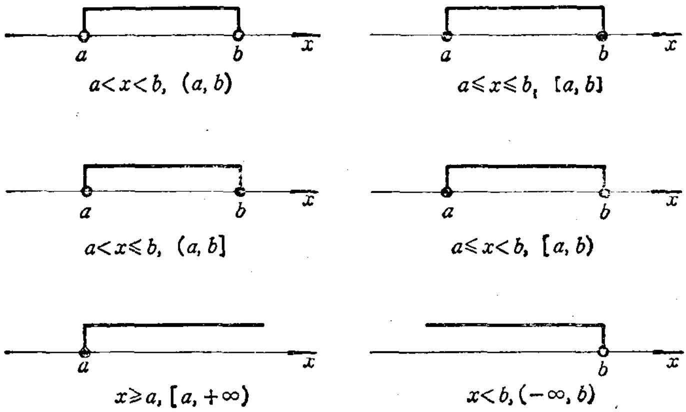


图 1-1

表示，如图 1-1 所示.

以后，我们还要用到有关点的邻域的概念.

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域，点 a 叫这个邻域的中心，δ 叫这个邻域的半径. 由于上述绝对值不等式与下列不等式

$$-\delta<x-a<\delta,$$

即

$$a-\delta<x<a+\delta$$

是等价的，所以点 a 的 δ 邻域就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$（图 1-2）.

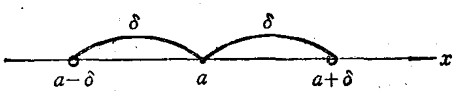


图 1-2

2. 函数的定义

定义 在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x

的每一个可取的值，按照某个对应法则，总有唯一确定的 y 值与它对应，那么就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

x 叫做自变量，y 叫做因变量.

自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域，因变量 y 的变化范围叫做函数的值域.

函数是由对应法则及其定义域所确定的. 因此，在研究函数时，必须注意它的定义域. 例如：

函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是 $x-2\neq0$ 的解 $x\neq2$，即 $(-\infty, 2)$，$(2, +\infty)$；

函数 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 $x^2-1\geqslant0$ 的解 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$，即 $(-\infty, -1]$，$[1, +\infty)$；

函数 $y=\ln(x+1)$ 的定义域是 $x+1>0$ 的解 $x>-1$，即 $(-1, +\infty)$；

函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域是 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant1$ 的解 $-1\leqslant x\leqslant5$，即 $[-1, 5]$.

3．*函数的表示法*

表示函数的方法，常用的有以下三种：

(1) 公式法：用数学公式表示自变量与因变量之间的对应法则的方法叫做公式法. 这是最常用的表示函数的方法.

(2) 表格法：在实际应用中，常将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格，如对数表，三角函数表等，这种表示函数的方法叫做表格法(或列表法).

(3) 图象法：用平面直角坐标系中的一条曲线表示函数的对应法则的方法叫做图象法. 如自动记录仪描绘的气温变化

曲线.

函数的三种表示法各有优缺点，在使用时应根据需要选取适当的表示法，或结合使用.

在用公式法表示函数时，常用一个公式来表示一个函数，如计算圆面积的公式 $A=\pi r^2$. 但有时需要在自变量的不同变化范围内用不同公式来表示一个函数，这叫做函数的分段表示. 这样表示的函数称为分段函数，例如

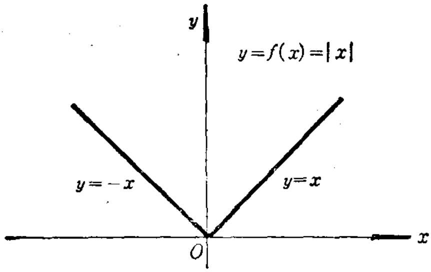


图 1-3

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，图象如图 1-3.

$$y=g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

它的定义域为 $[0, 2]$，图象如图 1-4.

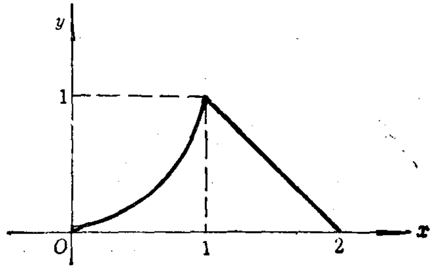


图 1-4

4. 函数的记号

在函数的定义中已经说过，自变量 x 的函数 y 可用记号 $y=f(x)$ 来表示，但也可用 $y=g(x)$ 等等表示．这里的记号 f 或 g 都表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，而不是 f 或 g 乘以 x。例如可用 $f(x)$ 表示由式子 x^2-2x+3 所表示的函数，即

$$f(x)=x^2-2x+3.$$

当自变量 x 取某个定值 x_0 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}$$

表示．例如对于函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 来说，

当 $x=0$ 时，$f(0)=0^2-2\cdot 0+3=3$，

当 $x=-1$ 时，$f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+3=6$，

当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=x_0^2-2x_0+3$，

当 $x=1+h$ 时，$f(1+h)=(1+h)^2-2\cdot(1+h)+3=h^2+2$。

在研究函数时，$f(x)$ 可表示 x 的任何函数，但是在同一个问题中，几个不同的函数必须用不同的函数记号来表示．例如

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$f(-2)=-(-2)=2, \quad g\left(\frac{3}{2}\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

如果存在某个正数 M，对于函数 $f(x)$ 的定义域（或定义域中的某一区间）内的一切 x 值，能使不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 在其定义域（或定义域中的某一区间）内

是有界的(或称 $f(x)$ 为有界函数).

如果不论正数 M 多么大，在定义域(或定义域中的某一区间)内总有这样的 x 值，使得

$$|f(x)|>M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在其定义域(或定义域中的某区间)内是无界的(或称 $f(x)$ 为无界函数).

例如，对于任何实数值 x 都有

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1.$$

所以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的，因为不论 M 多么大，在 $(0, 1)$ 内总有这样的 x 值，当 $0<x<\dfrac{1}{M}$ 时，使得 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}>M$ 成立. 但是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(1, 2)$ 内是有界的，因为当 $1<x<2$ 时，总有 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}<1$ 成立.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的，它的图象是单调上升的曲线(图 1-5).

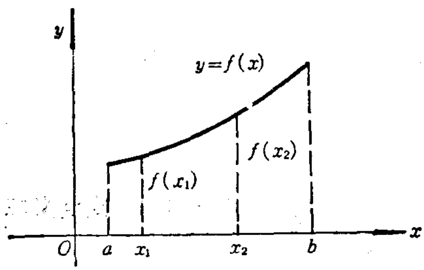


图 1-5

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而减小，即对于 (a, b) 内的任意两点

x_1 和 x_2，总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减小的，它的图象是单调下降的曲线（图 1-6）.

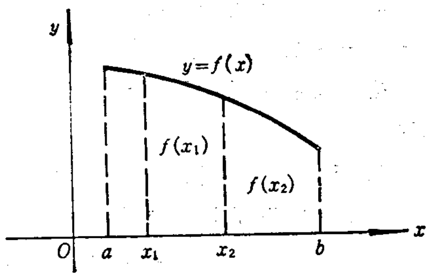


图 1-6

例如，函数 $y=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（图 1-7）.

又如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减小的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的（图 1-8）. $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 称为 $y=x^2$ 的单调区间.

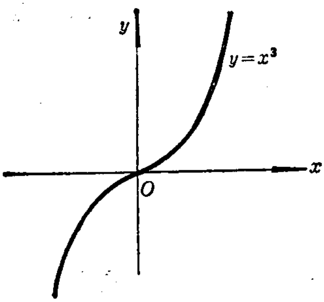


图 1-7

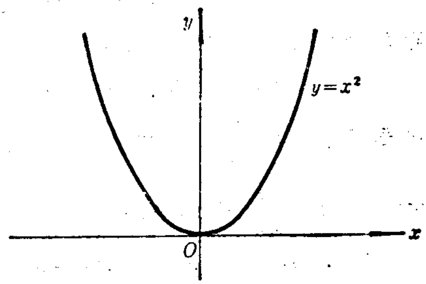


图 1-8

3. 函数的奇偶性

如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；如果 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数.

例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

又如，$g(x)=x^2$ 是偶函数，因为

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

再如，$\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

奇函数的图象关于原点中心对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

4．函数的周期性

如果存在正数 l，能使关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 值都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数.

能使上述关系式成立的最小正数 l，叫做函数 $f(x)$ 的周期，或者说 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数.

我们知道，基本三角函数都是周期函数：$\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期是 2π，$\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的周期是 π.

$y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$（其中 ω 和 φ 都是常数）的周期都是 $l=\frac{2\pi}{\omega}$，因为 $\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $\cos\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\cos(\omega x+\varphi)$.

同样，$y=\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\operatorname{ctg}(\omega x+\varphi)$ 的周期都是 $l=\frac{\pi}{\omega}$.

三、基本初等函数

初等函数是最常用的一类函数，因此掌握它们的性质是非常必要的．现将五种基本初等函数的主要性质概述如下：

1．幂函数

函数 $y=x^\alpha$（α 为实数）叫做幂函数．例如 $y=x$，$y=x^2$，$y=$

x^3, $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$, $y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 等都是幂函数，其定义域随着指数 α 的不同而各异．但对于任意实数 α，幂函数 $y=x^\alpha$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 内都有定义．

幂函数 $y=x^\alpha$ 的性质在 $\alpha>0$ 时与 $\alpha<0$ 时有很大的不同．

当 $\alpha>0$ 时，$y=x^\alpha$ 具有下列共同性质：

(1) 在区间 $[0, +\infty)$ 内有定义，且单调增加；

(2) 图象通过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$．

当 $\alpha<0$ 时，$y=x^\alpha$ 具有下列共同性质：

(1) 在区间 $(0, +\infty)$ 内有定义，且单调减小；

(2) 图象通过点 $(1, 1)$．

图 1-9 是 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的图象，图 1-10 是 $y=x^{-\frac{3}{2}}$ 的图象．

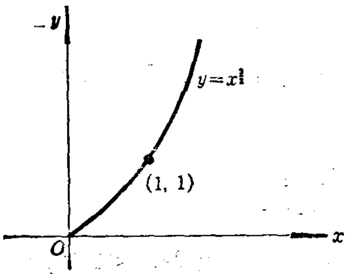


图 1-9

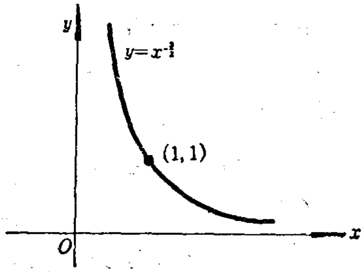


图 1-10

2．指数函数

函数 $y=a^x$ ($a>0$，且 $a\neq1$) 叫做指数函数．它的定义域为 $-\infty<x<+\infty$，值域为 $y>0$．图 1-11 是 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象．

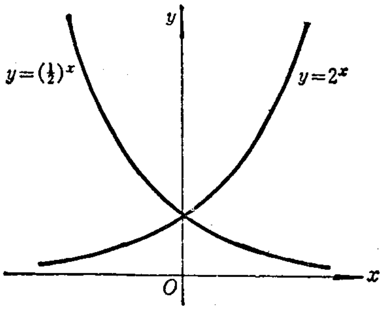


图 1-11

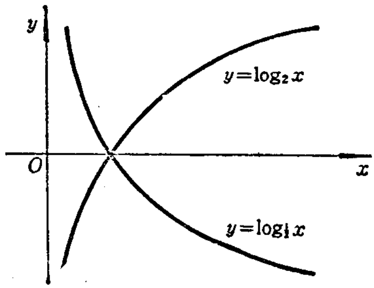


图 1-12

指数函数 $y=a^x$ 具有下列性质:

(1) 图象在 x 轴上方,且通过点$(0, 1)$;

(2) 当 $a>1$ 时, $y=a^x$ 单调增加; 当 $0<a<1$ 时, $y=a^x$ 单调减小.

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x(a>0$, 且 $a\neq 1)$叫做对数函数. 它的定义域为$(0, +\infty)$,值域为$-\infty<y<+\infty$. 图 1-12 是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象.

对数函数 $y=\log_a x$ 具有下列性质:

(1) 图象在 y 轴的右方,且通过点$(1, 0)$;

(2) 当 $a>1$ 时, $y=\log_a x$ 单调增加, 当 $0<a<1$ 时, $y=\log_a x$ 单调减小.

4. 三角函数

函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 是四个基本的三角函数.

$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 具有下列性质:

(1) 定义域都是$(-\infty, +\infty)$, 值域都是$[-1, 1]$, 因此都

是有界函数;

(2) 它们都是以 2π 为周期的周期函数;

(3) $y=\sin x$ 是奇函数, $y=\cos x$ 是偶函数. 图象如图 1-13 和图 1-14.

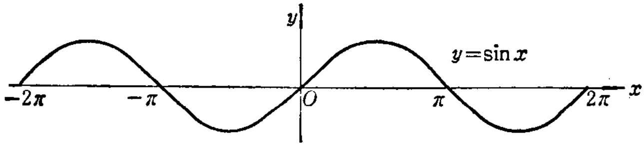


图 1-13

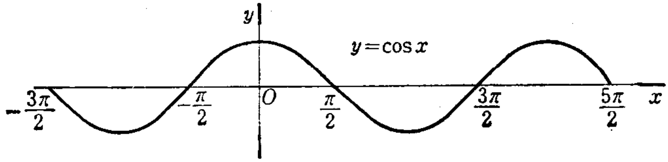


图 1-14

$y=\operatorname{tg} x$ 和 $y=\operatorname{ctg} x$ 具有下列性质:

(1) $y=\operatorname{tg} x$ 的定义域为

$$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$y=\operatorname{ctg} x$ 的定义域为

$$x\neq k\pi, (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

它们的值域都是$(-\infty, +\infty)$, 因此都是无界函数;

(2) 它们都是以 π 为周期的周期函数;

(3) 它们都是奇函数. 图象由无穷支组成, $y=\operatorname{tg} x$ 的每一支都单调增加; $y=\operatorname{ctg} x$ 的每一支都单调减小. 图象如图 1-15 和图 1-16.

5. 反三角函数

函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$