上海交通大学应用数学系编

高等数学

（上 册）

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

上海交通大学出版社

高 等 数 学

上　　册

上海交通大学应用数学系　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分上下两册，另有上海交通大学出版社出版的《高等数学习题集》与本书相配套。它们编排的章次完全一致。

本书上册内容包括：函数；极限与连续；导数与微分；微分中值定理、导数的应用；不定积分；定积分及其应用；矢量代数与空间解析几何。每章后面还备有附注。

本书可供高等工科院校作为教材，也可供高等院校、成人高校的师生以及报考高等工科院校研究生的读者作为参考用书。

（上）

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 15/625 字数 403000

1987年6月第1版 1987年7月第1次印刷

印数：1—12,000

统一书号：ISBN7-313-00022-7/013 科技书目：154-287

定价：2.95元

前　言

《高等数学》是高等院校一门传统的基础课。它在传授知识、启发学生思维和培养学生能力等方面都具有重要的作用。本书是在我校教师多年教学实践的基础上，参照1980年教育部颁发的《高等工业学校高等数学教学大纲（草案）》的要求，力图贯彻减少课堂教学时数的精神，处理好传授知识和培养能力二者的关系编写而成的。

本书的特点是：文字通俗易懂，便于阅读，为减少课堂教学时数创造条件，以适应精讲与自学相结合的教学改革要求；内容丰富，论证严谨，逻辑性强，并采用了一些现代数学的符号，使叙述更为简洁；在正文中的部分内容前面记有星号，作为教师根据教学的实际情况，进行删减参考；各章后面各有附注，以开拓学生视野，有利于贯彻因材施教原则；例题经过认真选择，具有多样性，有些带有一定的技巧，以启发和培养学生解题的能力；另有与本书相配套的《高等数学习题集》，其编排次序与本书章次完全一致，已由上海交通大学出版社出版。

学习本书时，学生可在教师的指导下，系统地获得高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，培养和提高运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力和空间想象能力，并能运用所学知识去解决有关几何和物理中的问题，也为学习后继课程打下坚实的数学基础。

本书由徐桂芳、曹敏谦主编，参加编写工作的还有李重华、孙薇荣、景继良等同志。在编写过程中得到校系领导的关心和帮助，并听取了我系广大教师的不少宝贵意见，在此谨向他们表示衷心的感谢。尽管如此，本书还会存在许多不足之处，殷切期望

广大师生和读者给予批评指正。

编　　者

1986年10月于上海交通大学

目 录

第一章 函数

函数是高等数学中最基本的概念之一，也是高等数学研究的主要对象。时至十六、十七世纪，随着生产力的发展，有大量问题要求人们去探讨变量以及变量与变量之间的依赖关系，由此产生了函数概念的雏型。使用函数一词始于莱布尼兹①，当时虽然没有给出明确的定义，但他已考虑到变量 x 以及与变量 x 同时变动的变量 y，即变量 x 的函数；后经欧拉②、柯西③以及狄利希莱④等数学家对函数概念不断加以修正、扩充而逐步形成现在较为完整的函数概念。

本章首先给出实数的绝对值和有关的不等式，这是学习高等数学必备的基本知识。然后给出函数的定义以及讨论函数的一些简单性质。最后通过几个实际问题建立变量之间的函数关系。

在高等数学课程中所涉及的数主要是实数。但是，要了解清楚什么是实数并不是一件容易的事。从数学的发展史来看，直到十九世纪下半叶，人们对实数的本质才有较深刻的认识。为了使读者能对实数的本质有一个初步的了解，在本章的附注中介绍了实数的基本公理，以供参考。

---

① 莱布尼兹(G.W.Leibniz，1646～1716)，德国数学家，同牛顿被称为微积分的创始人。

② 欧拉(L.Euler，1707～1783)，瑞士数学家。

③ 柯西(A.L.Cauchy，1789～1857)，法国数学家。

④ 狄利希莱(P.G.L.Dirichlet，1805～1859)，德国数学家。

§1 函数的概念

一、实数的绝对值与不等式

设 a 为任意实数，则定义 a 的绝对值为

$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a\geqslant 0;\\ -a, & 当\ a<0。\end{cases}$$

根据定义，明显地有 $|a|\geqslant 0$。并且，当且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$。此外，还有

$$|-a|=|a|,\quad |b-a|=|a-b|。$$

从几何图形上来看，$|a|$ 就是原点到 a 点的距离，而 $|a-b|$ 则为 a b 两点之间的距离。

又对于任意两个实数 a 和 b，有

$$|ab|=|a||b|;$$

当 $b\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}。$$

下面再讨论几个关于绝对值的不等式。

1° 不等式 $|a|\leqslant A$ 等价于 $-A\leqslant a\leqslant A$。

事实上，如果 $|a|\leqslant A$，则 $-|a|\geqslant -A$。又因为 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，故有 $-A\leqslant a\leqslant A$。

反之，设 $-A\leqslant a\leqslant A$，即：

当 $a\geqslant 0$ 时，有 $|a|=a$，因此 $|a|\leqslant A$；

当 $a<0$ 时，有 $|a|=-a$，由假设 $-A\leqslant a$ 得 $A\geqslant -a$，从而有 $|a|\leqslant A$。

2° $|a+b|\leqslant |a|+|b|$。

事实上，由 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$ 及 $-|b|\leqslant b\leqslant |b|$ 相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

由 1° 即得 $$|a+b|\leqslant |a|+|b|。$$

把这个不等式推广，得

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|。$$

3° $|a-b|\geqslant||a|-|b||$。

因为 $a=(a-b)+b$，由 2° 得

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

从而有 $$|a|-|b|\leqslant|a-b|。$$

又因为 $b=a+(b-a)$，故由 2° 得

$$|b|\leqslant|a|+|b-a|=|a|+|a-b|,$$

从而又有 $$-|a-b|\leqslant|a|-|b|。$$

合并以上结果得

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|。$$

由 1° 得 $$|a-b|\geqslant||a|-|b||。$$

二、变量与常量

世界上一切事物都是处于不停地运动和变化之中。在研究事物运动过程时，常常会遇到两种不同的量。在某一过程中可取不同数值的量称为**变量**（或变数）；数值保持不变的量称为**常量**（或常数）。

在高等数学中，常用各种**区间**表示变量的取值范围，借助于集合符号将其表示如下：

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无穷区间 $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$。

图 1－1 给出区间在数轴上的表示法。

以上各种区间中的 a 和 b 称为**区间的端点**，a 称为**左端点**，b 称为**右端点**。属于区间内而不是端点的点称为**内点**。

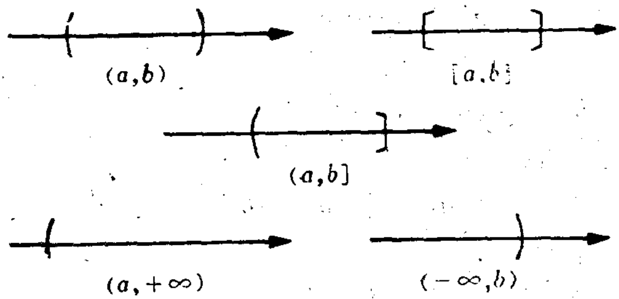

图 1-1

开区间 $(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\ (\delta>0)\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**（或称点 a 的邻域），记作 $U(a,\delta)$，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径；而对于点 a 除外的邻域 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$（见图 1-2）。

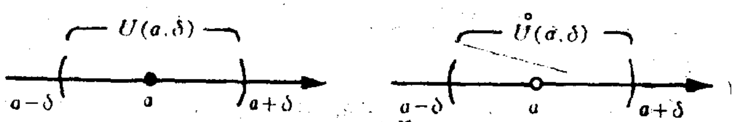

图 1-2

三、函数概念

自然界中各种现象的变化不是孤立的、各不相关的，而是互相依赖的。例如，在气缸内一定质量的气体，它的压强 p、体积 V 及（绝对）温度 T 之间有下列关系，称为克拉伯龙（Claperon）公式：

$$pV=RT$$

其中 R 是常数。为了使讨论问题简单化，可假定温度保持不变，于是压强与体积两个变量之间互相依赖的规律为

$$p=\frac{c}{V},$$

其中 c 为常数。这个关系式称为波义尔-马略特（Boyle-Mariot-te）定律。

又如一质点在一单位圆周上作等角速转动时，其直角坐标 x、y 随时间 t 而定的情况可由下式表达：

$$x=\cos\omega t,\ y=\sin\omega t,$$

其中常量 ω 是质点旋转的角速度。自然界中这种例子是很多的。从这些例子抽出它们共同的特性，可建立一重要概念，这就是函数概念。

定义 设有一变量 x，它的取值范围是一数集 X，如果在 X 内所取的每一数值 x，根据一确定法则 $f(\quad)$，有另一变量 y 的唯一确定的数值与它相对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作：

$$y=f(x),\quad x\in X。$$

称 x 为**自变量**，y 为**因变量**。X 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，y 值构成的数集 Y 称为函数 $f(x)$ 的**值域**。

如果函数的定义域为区间，则称这区间为函数的**定义区间**。

例如：函数 $y=ax+b$，$y=x^2$，$y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$，它们的定义区间是 $(-\infty,+\infty)$；而函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ $(a<b)$，$x\in[a,b]$，它的定义区间是 $[a,b]$。约定：当不考虑函数中两个变量所表示的实际意义时，函数的定义域将由解析式子本身来确定。

在函数定义中，重要的是必有一确定法则存在。据此，自变量取定后，函数随着必有唯一的定值，至于法则的内容，是否能用一个公式加以表达，是另一回事，不是函数定义所要求的。例如

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1-x, & \text{当 } 1<x\leqslant 2 \end{cases}$$

是一个函数。其中 y 随 x 而定的法则，用两个公式分别来说明，

这种表达形式的函数常称为**分段函数**。

只要有一条明确的法则，不问其内容、说明方式如何，当自变量在某数集内任取一值时，必有因变量的唯一数值，依据此法则随着而定，那末，这就是一个函数，它的法则常用记号 $f(\ \ )$ 表达。对函数定义域内任何 x 运用法则 $f(\ \ )$，从而获得的 $f(x)$，它就是对应于 x 的 y 值：$y=f(x)$，称为 x 的**函数值**。不同的法则用不同的符号来表示，例如

$$g(\ \ )\text{或}\varphi(\ \ )\text{或}F(\ \ )$$

等等。有时，也用 $y(\ \ )$ 来表示因变量 y 的对应法则。

这样抽象而广泛地来理解的函数概念，在近代数学中所产生的影响是深远的。

下面再举三个常用的函数例子。

例 1 符号函数（也称克罗内克尔①函数）：

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \\ 1, & \text{当 } x>0。\end{cases}$$

通过它可以表示任何实数 x 的绝对值：$|x|=x\operatorname{sgn}(x)$。因此 $\operatorname{sgn}(x)$ 起了 x 的符号作用，故称它为符号函数。

例 2 取整函数：对于任意实数 x，对应的 y 是不超过 x 的最大整数，记作

$$y=[x]。$$

下面列出它的几个函数值：$[1.2]=1$；$[3.9]=3$；$[0]=0$；$[0.3]=0$；$[-0.7]=-1$；$[-3.1]=-4$。

例 3 狄利希莱函数：

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}。\end{cases}$$

在讨论函数时除了对应法则之外，还应注意它的定义域。为了加深对函数定义的理解和记忆，作一表格再次说明函数的概

①克罗内克尔（L. Kronecker，1823～1891），德国数学家。

念。

x 在 X 中取值 $x\in X$	确定的法则 $f(\quad)$	对应于 x 的 y 值 $y=f(x)$
例 1 $x\in(-\infty,+\infty)$	$(\quad)^2$	$y=x^2$
例 2 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin(\quad)$	$y=\sin x$
例 3 $x\in[0,\ +\infty)$	$e^{-(x)}[\sin(\quad)$ $+\cos(\quad)]$	$y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$

四、隐函数与显函数

平面上一条直线的方程是

$$Ax+By+C=0。$$

这是一个二元一次方程，其中 x 及 y 不能各自独立地取值；若 x 任意取定一值时，为了能满足方程，y 当然不能任意取值。这样一个方程表示两个变量间相依而变的关系。若指定 x 为自变量，y 为因变量，则当 $B\neq 0$ 时，

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它的对应法则是

$$f(\quad)=-\frac{A}{B}(\quad)-\frac{C}{B}。$$

因而方程 $Ax+By+C=0$ 确定了函数 y，称 y 是自变量 x 的隐函数。

一般说来，设有两个变量 x、y 的方程为

$$F(x,y)=0,$$

如果存在一个函数 $y(x)$，$x\in X$，将它代入上列方程，得恒等式

$$F(x,y(x))\equiv 0,$$

则称方程 $F(x,y)=0$ 定义了 y 为 x 的**隐函数**。如果函数 y 能够通过自变量 x 直接表达为 $y=f(x)$ 形式，则称为**显函数**。

例如，椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

定义了 y 为 x 的隐函数，它的显函数为

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad x\in[-a,a]$$

和

$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad x\in[-a,a]。$$

实际上，显函数与隐函数并没有严格的界限，有时可以从隐函数 $F(x,y)=0$ 解出显函数来。但是。一般说来，解一个方程并不容易，因此，将隐函数化为显函数就有一定的困难。例如，方程 $y^5+xy+x^5=0$ 定义的隐函数就不能用代数的方法化为显函数。

§2 函数的简单性质

讨论函数，主要是认识函数值随自变量而定的规律性，这就需要研究函数的一些性质。随着数学工具的发展，可以逐步对函数作深入的研究。这里只能讨论函数的一些简单性质。此外，为了使函数的规律性能有直观形象，可对函数作图：应用笛卡儿①直角坐标系，以 x 为横坐标，以对应于 x 的函数值 $y=f(x)$ 为纵坐标，作出平面上满足这函数关系的点 (x,y)，这种点的集合（通常是曲线）构成函数 $y=f(x)$ 的图形。

下面列出函数的几个性质。

---

① 笛卡儿(R. Descartes, 1596～1650)，法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家，解析几何的创始人。

(1) 单值线

根据函数的定义，在定义区间内函数值是唯一的，这称为函数的单值性。例如，由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$确定的关系式

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

应当分别看作两个函数

$$f(x)=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ g(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

而每一个都是单值的。函数的单值性，反映到它的图形上是：任何与Oy轴平行的直线，如果与它的图形相交，只能有一个交点（图1-3）。

(2) 奇偶性

设有函数$y=f(x)$，它的定义域X对称于原点。如果对任何$x\in X$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称$f(x)$为**奇函数**；如果对于任何$x\in X$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$为**偶函数**。奇函数的图形对称于原点，而偶函数的图形对称于Oy轴。例如函数$y=x^3$（图1-4）、$y=\sin x$（图1-5）和$y=\mathrm{tg}\,x$（图1-6）都是奇函数；$y=x^2$（图1-7）和$y=\cos x$

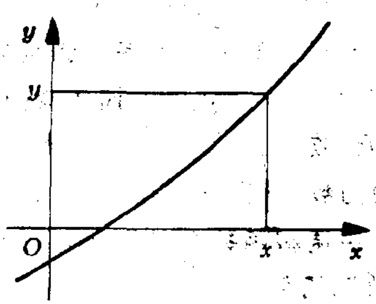

图 1-3

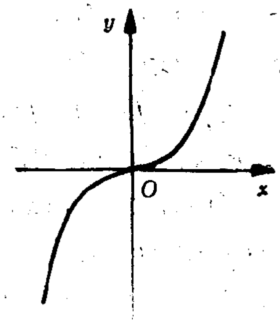

图 1