数学物理方程及其反问题研究

田立平　著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

数学物理方程及其反问题研究

田立平　著

机 械 工 业 出 版 社

本书是作者在大学本科以及研究生教学的讲义基础上整理编写的。书中共包括两部分，第1部分是有关数学物理方程的求解方法介绍，如分离变量法、行波法、积分变换法和格林函数法，并简介了变分法及应用；第2部分是数学物理方程的反问题，包含了作者在该领域研究的一些主要成果，以线性与非线性热传导方程的反问题和一类双曲方程的反问题的研究为主。前6章每章后面配有一定量的习题，在第6章末附有部分习题参考答案。

本书具有实用、通俗和便于自学等特点，可作为高等院校理工科专业的大学生、研究生教材或教学参考书，还可供研究该领域的相关学者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其反问题研究/田立平著. —北京：机械工业出版社，2010.1

ISBN 978-7-111-29158-9

Ⅰ.数… Ⅱ.田… Ⅲ.数学物理方程—研究 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第217555号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
责任编辑：牛新国　封面设计：赵颖喆
责任校对：陈立辉　责任印制：李　妍
北京铭成印刷有限公司印刷
2010年1月第1版第1次印刷
169mm×239mm ·8.75印张·167千字
0001—2000册
标准书号：ISBN 978-7-111-29158-9
定价：23.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销 售 一 部：(010)68326294
销 售 二 部：(010)88379649
读者服务部：(010)68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　言

微分方程是人类认识自然、改造自然的一种工具，也是数学理论联系实际的桥梁。同时数学物理方程也是理工科专业学生的一门重要的数学课程。该门课程既涉及物理、力学、热学、光学、电学等背景知识，同时又要用到数学分析、复变函数、积分变换、常微分方程和泛函分析等多门数学工具，许多学生反映学习起来比较困难。为解决这些困难，特编写本书。本书力求简明、通俗易学，注重实用性和应用性，对一些公式或定理的推证没有做过多的阐述，也许这样对于初学者、自学者和一些工程技术人员来说更容易理解和掌握。本书的第1部分为数学物理方程，共6章，每章分为如下几个模块：

(1) 内容要点和基本要求。阐述该章内容要点，便于读者理清思路，了解基本要求，把握该章的重点以及对该章内容掌握的程度。

(2) 方法概述与例题解析。方法概述力求简明、通俗实用，例题力求典型且有实际背景，使读者更好地巩固基本概念，掌握解题的基本方法以及使用该方法时应注意的问题。

(3) 小结。每章后面都做了小结，帮助读者归纳该章的主要内容、主要方法，以使读者能更系统、清楚地把握内容。

(4) 习题。每章后面都配有一定量的习题，习题的选取不求多而求精，而且习题类型尽量保持与例题相近。通过做这些习题使读者能够掌握该章内容。在第6章末给出了部分习题的参考答案，便于读者检验。

本书的第2部分为数学物理方程的反问题。已知微分方程和定解条件(称为定解问题)而求该定解问题的解称为“正问题”，这也是我们一般常见的研究问题；而如果微分方程中的系数、右端项、定解条件和定义域等是未知的，一方面要确定这些未知项，另一方面又要求解微分方程，这类问题通常称之为微分方程的反问题。微分方程的反问题领域非常广阔，它来源于各种实际问题，属于多学科的应用理论范畴，不管是对理论研究还是实际应用都具有重要意义。近20年来，在资源勘探、航天工程、大地物理、大气测量、海洋工程、遥感技术、控制与识别、生物器官性态模拟与分析、遗传工程及量子力学和弹性力学等各自然科学和工程技术领域相继出现了大量微分方程的反问题。目前一些专家学者从不同的角度带着不同的新工具对这一领域的研究产生了一大批研究成果，但是要掌握整个反问题的研究状况还比较困难，不同方程甚至同一个方程在不同场合，边界条件问题的解都会出现很大的差异，所以目前对该方面的研究还不够成熟，有些

结果略显零乱。本书的第 2 部分主要是作者近 10 年来在该领域的部分研究成果，其中大部分内容涉及的是热传导方程的反问题，其中包括一维和高维、线性和非线性、未知函数项系数以及右端项的反问题，包括解的存在性、唯一性研究，有些也给出了求反问题的算法；研究方法涉及近代数学中的拓扑度理论，Galerkin 逼近方法和压缩映像原理等。在最后给出了一类双曲型方程反问题的研究结果。如果这些结果对读者有所帮助和借鉴，那将是我最大的快慰！

本书的编写得到北京市优秀教学团队——数学公共基础系列课程教学团队项目(项目编号:PHR200907230)支持。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，恳求读者提出宝贵意见。

作 者

目　录

第 2 部分　数学物理方程反问题研究

第 1 部分

数学物理方程

第 1 章　方程的导出和定解条件

本章主要内容：

(1) 掌握有关偏微分方程的一些概念。

(2) 掌握三类典型数理方程的推导过程和建立(导出)数理方程的一般方法、步骤、标准形式以及类型判别方法。

(3) 掌握定解条件以及在各自定解问题中的含义，正确写出一些典型物理问题的定解问题和定解条件。

(4) 掌握用数理方程描绘研究物理问题的一般步骤。

1.1　概念

1.1.1　有关数学物理方程的一些概念

1.1.1.1　数学物理方程的概念

数学物理方程通常是指物理学、力学、工程技术和其他学科中出现的偏微分方程。我们重点讨论二阶线性偏微分方程，其一般形式为

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \tag{1-1}$$

式中，n 代表方程的维数，a_{ij}，c，f 可以为常数也可以是连续的泛函，$a_{ij} = a_{ji}$。

1.1.1.2　数学物理方程的分类

数学物理方程的分类方法比较多，一般有如下几种：从数学分析的角度有线性、非线性和拟线性之分；从方程有无右端项的角度有齐次和非齐次之分；从数学上三类典型问题的角度有双曲型、抛物型和椭圆型之分，而与之对应的在物理学上又分别称之为波动或振动方程、热传导方程以及位势方程或拉普拉斯(Laplace)方程；从方程的形式角度有一般形式和标准形式方程之分；从未知函数及其导数前面的系数角度有常系数和变系数偏微分方程之分。

1. 二阶线性偏微分方程形式上的分类问题

一般二阶线性偏微分方程通过作变换可以化为如下形式的标准方程(以三维情况为例)，即

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z) \quad （椭圆型） \tag{1-2}$$

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t),\ a > 0 \quad （抛物型） \tag{1-3}$$

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t),\ a>0\quad（双曲型）\tag{1-4}$$

判别类型的方法有如下结论：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示二阶线性偏微分方程最高阶导数前系数矩阵，n 是自变量的个数，则

1）若 A 的特征值都是正数或都是负数(即 A 是正定的或负定的)，则方程为椭圆型的；

2）若 A 的特征值有正数也有负数但没有0，则方程为双曲型的；

3）若 A 的特征值中至少有一个为0(即 A 是奇异矩阵)，则方程为抛物型的。

例1.1 判别下列方程所属类别。

1）$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z)$

2）$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t)$，$a>0$

3）$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t)$，$a>0$

解：1）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，易知 A 的特征值为1，1，1，所以原方程为椭圆型的；

2）$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-a^2&0&0\\0&0&-a^2&0\\0&0&0&-a^2\end{pmatrix}$，易知 A 的特征值为0，$-a^2$，$-a^2$，$-a^2$，所以原方程为抛物型的；

3）类似地，可判断方程是双曲型的。

2. 线性、非线性和拟线性方程的划分

一般而言，如果一个方程中关于未知函数及其偏导数(包括高阶偏导数)都是一次的，则称这个方程为线性偏微分方程，否则称为非线性偏微分方程。所谓拟线性方程是指通过变换可以化为线性的偏微分方程。比如例1.1中的三个方程都是线性的，而方程 $(u_x)^2+u_y=8x^2$ 则是非线性的。

1.1.2 定解条件和定解问题

一般而言，只有一个偏微分方程而没有再给出其他限制条件，则这个方程称为泛定方程，对应的问题就是不确定问题。对于一个确定的物理过程，仅建立表征该过程的物理量所满足的泛定方程是不够的，还需要附加一定的条件，这些条件统称为定解条件。定解条件应该恰恰足以说明系统的初始状态及边界上的物理情况，所提出的条件既不能多也不能少，而且要与泛定方程相匹配，这些要求称为条件的相融性。泛定方程和定解条件一起所构成的问题称为定解问题。定解条

件又分初值条件、边值条件和混合条件，相应的问题分别称为初值问题(又称 Cauchy 问题)、边值问题和混合问题。

1. 初值条件

表征某过程“初始”时刻状态的条件称为初值条件，一般对时间自变量而言。例如

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)；\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y,z) \tag{1-5}$$

2. 边值条件

表征某过程的物理量在系统边界上所满足的物理条件称为边值条件。边界条件根据不同的状态和不同的形式又分为三类。

1）第一类边界条件：一般形式为$u\big|_{\partial G}=g(x,y,z,t)$，其中 ∂G 表示区域 G 的边界。

2）第二类边界条件：一般形式为$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=f(x,y,z,t)$，例如，对于热传导问题而言，表示物体表面的热流量，则由傅里叶(Fourier)热传导定律，有 $-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=q(x,y,z,t)\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=f(x,y,z,t)$，其中 k 为导热系数，若物体表面绝热，则$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=0$。

3）第三类边界条件：一般形式为$\left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_{\partial G}=\omega(x,y,z,t)$，例如，对于热传导问题而言，设 G 周围介质的温度为 $\theta(x,y,z,t)$，h 为热交换系数，则一方面有 $-k\dfrac{\partial u}{\partial n}=q$，另一方面又有 $h(u-\theta)=q$，所以 $-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=h(u-\theta)\Rightarrow$ $\left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_{\partial G}=\omega(x,y,z,t)$，其中 $\omega=h\theta$。

注：泛定方程和第一类、第二类、第三类边值条件分别称为第一、第二、第三边值问题，所构成的边值问题，又分别称为狄利克雷(Dirichlet)、纽曼(Numann)、洛平(Robin)问题。

3. 定解条件的提法

从数学角度讲，如果没有定解条件，方程有解的话不会唯一。

从物理角度讲，所建立的泛定方程只适合系统的内部规律，而实际问题不可能不受到初始状态和边界状态的影响。

如果边界条件影响不到研究系统内部的“中心”处，或者说区域很大，可不考虑边界，或者说系统不受边值条件的影响，则只谈初始条件。

如果系统处于稳定状态或定常态，此时系统将不再受时间的影响，此时只谈边界条件。

1.1.3 解的适定性

一个定解问题提出之后，我们要问这个定解问题的解是否存在，这便是解的存在性问题；如果解存在，我们自然关心这个定解问题的解是否只有一个，这便是解的唯一性问题；此外我们还要考虑当定解条件或自由项的值作微小变化的时候，这个定解问题的解是否也只作微小变化，这就是解的稳定性问题。定解问题的存在性、唯一性和稳定性统称为定解问题的适定性，一个问题如果存在唯一稳定的解，就称这一问题是适定的，否则就应该修改定解问题的提法，使其适定。

1.1.4 数学物理方程研究的内容

一个实际问题，运用物理规律，经过合理假设、分析、简化得到一个数学模型即偏微分方程，然后对模型进行理论分析，包括解的存在性、唯一性、稳定性，再对问题求解，包括解析解、近似解或数值解，最后结合实际问题进行检验，这些就是数学物理方程的“正问题”。如果微分方程中的系数、右端项、定解条件、定义域等还含有一些未知的参数，则确定这些参数并求出问题的解的过程称为数学物理方程的反问题。

1.2 三类方程的导出及定解问题的提法

1.2.1 热传导方程及其定解问题

1.2.1.1 问题的陈述

如果空间某物体 G 内各点处的温度不同，则热量就会从温度较高点向温度较低点处流动，这种现象称为热传导。设有一个导热物体，在空间占据区域为 G，边界面为 ∂G，确定该物体内部在任意时刻、任意位置的温度 $u(x,y,z,t)$。

1.2.1.2 模型的建立

1. 物理规律

1）Fourier 热传导定律：物体在无穷小的时段 dt 内流过一个无穷小面积 ds 的热量 dQ，与物体沿曲面法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比，即 $dQ=-k\frac{\partial u}{\partial n}dsdt$，其中 k 为导热系数，可以是常数也可以是函数，当物体为均匀且各向同性时 k 为常数，否则为函数，但 k 总取正值，n 为曲面 ds 沿热流方向的法线。

2）热量守恒定律：由 $t_1\sim t_2$ 时刻温度升高(降低)的热量 $Q=t_1\sim t_2$ 时刻从边界进入(流出)的热量 Q_1 + 热源提供(吸收)的热量 Q_2，即 $Q=Q_1+Q_2$。

2. 假设条件

设 G 的比热(单位质量的物体温度改变 1℃吸收或放出的热量)为 $c(x,y,z)$，密度为 $\rho(x,y,z)$，D 为物体内任取的一小块区域，∂D 表示 D 的边界面，$k(x,y,z)>0$ 为热传导系数，$F(x,y,z,t)$ 表示热源强度(单位时间从单位体积内放出或吸收的热量)。

3. 热量的计算

1）D 内温度改变的热量 Q

$$\mathrm{d}Q = c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V = c\rho\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}t$$

所以
$$Q = \iiint\limits_D \left(c\rho\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}V$$

2）从边界 ∂D 进入 D 的热量 Q_1

$$\mathrm{d}Q_1 = k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

由两类曲面积分之间的联系，再由高斯公式可得

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V\right\}\mathrm{d}t$$

3）热源提供的热量 Q_2

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_D F(x,y,z,t)\mathrm{d}V\right\}\mathrm{d}t$$

由 $Q=Q_1+Q_2$ 及 t_1，t_2 和区域 G 的任意性以及被积函数的连续性可得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x,y,z,t)$$

若 k 为常数，并记 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$(通常称其为 Laplace 算子)，则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,y,z,t)$$

式中，$a^2 = \frac{k}{c\rho}$，$f(x,y,z,t) = \frac{1}{c\rho}F(x,y,z,t)$。

1.2.1.3　定解条件

1. 初值条件

由于只含有对时间的一阶偏导数，故只需给出一个初始条件。一般情况下直接给出初始状态下的温度函数，形式为 $u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$。

2. 边值条件

1）第一类边值条件：一般形式为 $u|_{\partial G} = \psi(x,y,z,t)$，其物理意义表示物体

G 的表面温度。

2）第二类边界条件：一般形式为$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=f(x,y,z,t)$，其物理意义表示温度函数在边界曲面上的外法线导数是已知的，可由 Fourier 热传导实验定律得到。

3）第三类边界条件：一般形式为$\left.\left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_{\partial G}=\omega(x,y,z,t)$，其中 h 为热交换系数，其物理意义表示物体不仅有导热发生，而且物体表面与周围介质还产生热交换。

1.2.1.4　热传导中常见的定解问题

1. 初值问题(柯西问题)

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f\\ u|_{t=0}=\varphi\end{cases}\tag{1-6}$$

2. 边值问题

1）第一边值问题(狄利克雷问题)

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ u|_{\partial G}=\psi\end{cases}\tag{1-7}$$

2）第二边值问题(纽曼问题)

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=\psi\end{cases}\tag{1-8}$$

3）第三边值问题(洛平问题)

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ \left.\left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_{\partial G}=\omega(x,y,z,t)\end{cases}\tag{1-9}$$

3. 混合问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f\\ u|_{\partial G}=\psi\ \text{或}\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=\psi\ \text{或}\left.\left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_{\partial G}=\omega(x,y,z,t)\\ u|_{t=0}=\varphi\end{cases}\tag{1-10}$$

1.2.1.5　对模型分析

1）若系统内部无热源，则 $f=0$，泛定方程变为 $u_t=a^2\Delta u$；

2）若系统为稳态或定常态，则$\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$，泛定方程变为 $\Delta u=f$；

3）将物体改为薄板，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，模型是二维的，泛定方程变为 $u_t=$

$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f$；

4）将物体改成导线或细杆，则$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，模型是一维的，泛定方程变为$u_t=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f$。

1.2.2　波动方程及其定解问题

1.2.2.1　问题的陈述

设有一条拉紧时长为 l 的均匀、柔软的弦(柔软的含义是发生于弦中的张力的方向总是沿着弦的瞬时侧影的切线方向,也就是说弦不抵抗弯曲)，平衡时沿一条直线绷紧，在受到小扰动后作微小的横向振动，研究弦的振动规律。

1.2.2.2　模型的建立

1. 物理规律

1）动量原理：弦段在 Δt 时间内 u 轴方向的动量等于沿 u 轴方向的作用力的冲量和，即 $Ft=mv$；

2）胡克定律：弦上各点的张力与时间无关。

2. 假设条件

1）由于受微小振动，振幅极小，故张力与水平方向的夹角 α_1、α_2 也很小，所以

$$\sin\alpha_2\sim\tan\alpha_2=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2},\quad \sin\alpha_1\sim\tan\alpha_1=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1},\quad \cos\alpha\sim 1,\quad \mathrm{d}s\sim\mathrm{d}x;$$

2）由于弦是均匀的，可设弦的线密度 ρ 为常数；

3）由于是细弦，与张力相比弦的重量可以忽略不计；

4）由于弦是柔软的，故弦上任一点处的张力方向沿弦的切线方向。

3. 公式推导

1）u 轴方向的动量的变化

动量元素
$$\mathrm{d}Q=\rho\mathrm{d}x\left[\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}\right]=\rho\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \tag{1-11}$$

动量为
$$Q=\int_{x_1}^{x_2}\rho\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \tag{1-12}$$

2）u 轴方向作用力的冲量

首先考虑外力所产生的冲量 Q_1。设所受外力的线密度为 $F(x,t)$，则所受外力为 $F(x,t)\mathrm{d}x$，冲量元素为 $\mathrm{d}Q_1=F(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，冲量为 $Q_1=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}F(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。

其次考虑张力 T 产生的冲量 Q_2。张力 T 在 u 轴上的投影为