常微分方程习题集

〔苏联〕A. Ф. 菲利波夫
孙广成 张德厚 译

上海科学技术出版社

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1979

常微分方程习题集
孙广成 张德厚 译
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4.75 字数104,000
1981年11月第1版 1981年11月第1次印刷
印数 1—30,300

统一书号：13119·945 定价：(科四) 0.46 元

序　言

本习题集包括了与莫斯科大学数学力学系所采用的大纲相适应的常微分方程课程的习题. 部分习题取自于Н. М. 丘捷尔和Р. О. 库兹明，Г. Н. 别尔曼，М. Л. 克拉斯诺夫和Г. И. 马卡连科的各著名习题集以及В. В. 斯捷潘诺夫，Г. 菲利浦斯等著名教程. 大多数习题是新编的. 较难的习题标上了星号.

在每节的开头，对于该节解题所必须的一些基本方法，都做了简要的叙述或者给出了相应教材的索引. 在有些情形下，还给出了一些典型问题的详细解法.

书中采用了下列各教程的符号：

[1]——В. В. 斯捷潘诺夫，微分方程教程.

[2]——И. Г. 彼德罗夫斯基，常微分方程论讲义.

[3]——Л. С. 庞特利亚金，常微分方程.

[4]——Л. Э. 艾利斯哥尔兹，微分方程和变分法.

[5]——Б. П. 吉米多维奇，稳定性数学理论讲义.

А. Ф. 菲利波夫

1973 年

目　　录

§1. 等斜线.曲线族微分方程的建立

1. 方程 $y'=f(x, y)$通过点(x, y)的解应当在这一点具有等于$f(x, y)$的导数值y'，即它应当与通过该点和 Ox 轴的交角为 $\alpha=\operatorname{arctg} f(x, y)$ 的直线相切. 在(x, y)平面上，使方程$y'=f(x, y)$的解的切线具有同一斜率的切点的轨迹叫做等斜线. 因此，等斜线的方程具有 $f(x, y)=k$ 的形状，其中 k 是常数.

为了近似地求出方程 $y'=f(x, y)$的解，可以画出足够多的等斜线，然后再描出解的图形，即与等斜线$f(x, y)=k_1$, $f(x, y)=k_2$, …在交点上具有斜率分别为 k_1, k_2, …的切线. 应用这一方法的例子见[1]，第I章，§1，第3段，或者[4]，第1章，§1.

2. 为了建立曲线族

$$\varphi(x, y, C_1, \cdots, C_n)=0 \tag{1}$$

所满足的微分方程，应当把y看做x的函数，对等式(1)微分n次，然后再把所得到的那些方程和方程(1)联立，消去任意常数C_1, …, C_n.

例 建立曲线族

$$C_1x+(y-C_2)^2=0 \tag{2}$$

的微分方程.

因为曲线族方程含有两个参数，所以视$y=y(x)$时，将其微分两次：

$$C_1+2(y-C_2)y'=0, \tag{3}$$

$$2y'^2+2(y-C_2)y''=0. \tag{4}$$

先消去C_1. 由方程(3)有$C_1=-2(y-C_2)y'$；将其代入(2)时，就得到

$$-2xy'(y-C_2)+(y-C_2)^2=0. \tag{5}$$

再消去C_2. 由方程(4)我们有$y-C_2=-y'^2/y''$；将其代入(5)时，化简后就得到曲线族的微分方程$y'+2xy''=0$.

3. 与给定曲线族的每条曲线都交成定角 φ 的曲线叫做该曲线族的等角轨线. 轨线和曲线在交点 (x, y) 的切线对于 Ox 轴的倾角 β 和 α 具有 $\beta=\alpha\pm\varphi$ 的关系. 设

$$y'=f(x, y) \tag{6}$$

是给定曲线族的微分方程, 而

$$y'=f_1(x, y) \tag{7}$$

是等角轨线族的方程. 这时 $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, $\operatorname{tg}\beta=f_1(x, y)$. 因此, 如果已知方程(6)和角 φ, 则不难求出 $\operatorname{tg}\beta$, 然后写出轨线的微分方程(7).

如果给定曲线族的微分方程是

$$F(x, y, y')=0 \tag{8}$$

的形状, 则在建立等角轨线方程时也可以不从(8)中解出 y'. 此时需要在方程(8)中以 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta\mp\varphi)$ 代替 y', 其中 $\operatorname{tg}\beta=y'$ 是轨线切线的斜率.

如果这个曲线族的方程所给定的形状为 $\varphi(x, y, C)=0$, 则应该首先写出这个曲线族的微分方程, 并且只有在此之后才能写出轨线的微分方程.

在 1~14 各题中, 利用画等斜线(近似地)给出方程的解.

1. $y'=y-x^2$.

2. $2(y+y')=x+3$.

3. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2}-1$.

4. $(y^2+1)y'=y-x$.

5. $yy'+x=0$.

6. $xy'=2y$.

7. $xy'+y=0$.

8. $y'+y=(x-y')^3$.

9. $y'=x-e^y$.

10. $y(y'+x)=1$.

11. $y'=\dfrac{y-3x}{x+3y}$.

12. $y'=\dfrac{y}{x+y}$.

13. $x^2+y^2y'=1$.

14. $(x^2+y^2)y'=4x$.

15. 写出方程 $y'=f(x, y)$ 的解的极大值或者极小值点 (x, y) 的轨迹方程．如何区分极大值点与极小值点？

16. 写出下列各方程解的图形中拐点的轨迹方程：① $y'=y-x^2$；② $y'=x-e^y$；③ $x^2+y^2y'=1$；④ $y'=f(x, y)$.

在 **17～29** 各题中，建立给定曲线族的微分方程。

17. $y=e^{Cx}$.

18. $y=(x-C)^3$.

19. $y=Cx^3$.

20. $y=\sin(x+C)$.

21. $x^2+Cy^2=2y$.

22. $y^2+Cx=x^3$.

23. $y=C(x-C)^2$.

24. $Cy=\sin Cx$.

25. $y=ax^2+be^x$.

26. $(x-a)^2+by^2=1$.

27. $\ln y=ax+by$.

28. $y=ax^3+bx^2+cx$.

29. $x=ay^2+by+c$.

30. 建立圆心在直线 $y=2x$ 上，半径为 1 的圆的微分方程．

31. 建立其轴与 Oy 轴平行，并且同时与 $y=0$ 和 $y=x$ 两直线相切的抛物线的微分方程．

32. 建立同时与 $y=0$ 和 $x=0$ 两直线相切，并且位于第一象限和第三象限的圆的微分方程．

33. 建立其轴平行于 Oy 轴，并且通过坐标原点的所有的抛物线的微分方程．

34. 建立与横坐标轴相切的所有的圆的微分方程。

在 **35**、**36** 两题中，求出给定曲线族所满足的微分方程组．

35. $ax+z=b,\ y^2+z^2=b^2$.

36. $x^2+y^2=z^2-2bz,\ y=ax+b$.

在 **37~50** 各题中，建立与给定曲线族交成定角 φ 的轨线的微分方程①：

37. $y=Cx^4,\ \varphi=90°$. **38.** $y^2=x+C,\ \varphi=90°$.

39. $x^2=y+Cx,\ \varphi=90°$. **40.** $x^2+y^2=a^2,\ \varphi=45°$.

41. $y=kx,\ \varphi=60°$. **42.** $3x^2+y^2=C,\ \varphi=30°$.

43. $y^2=2px,\ \varphi=60°$. **44.** $r=a+\cos\theta,\ \varphi=90°$.

45. $r=a\cos^2\theta,\ \varphi=90°$. **46.** $r=a\sin\theta,\ \varphi=45°$.

47. $y=x\ln x+Cx,\ \varphi=\operatorname{arc\,tg} 2$.

48. $x^2+y^2=2ax,\ \varphi=45°$.

49. $x^2+C^2=2Cy,\ \varphi=90°$.

50. $y=Cx+C^3,\ \varphi=90°$.

§2. 可分离变量的方程

1. 可分离变量的方程能够写成

$$y'=f(x)g(y) \tag{1}$$

的形状，以及

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0 \tag{2}$$

的形状. 为了解出这类方程，我们在它的两端乘以或者除以一个因式，使在方程的一端只出现 x，在另一端只出现 y，然后对两端积分.

当用含有未知量 x 和 y 的因式去除方程的两端时，可能丢掉使这个因式为零的解.

例 解方程

$$x^2y^2y'+1=y. \tag{3}$$

把方程化为(2)的形状：

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1;\quad x^2y^2\,dy=(y-1)dx.$$

① 在 37~50 各题中所得到的方程均可用在以后各节中所讲的方法求解.

再将方程的两端除以 $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy=\frac{dx}{x^2}.$$

变量已经被分离. 积分方程的两端:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,dy=\int\frac{dx}{x^2};\quad \frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C.$$

当用 $x^2(y-1)$除时, 可能丢解 $x=0$ 和 $y-1=0$, 即 $y=1$. 显然, $y=1$ 是方程(3)的解, 而 $x=0$ 不是.

2. 用代换 $z=ax+by$(或者 $z=ax+by+c$, 其中 c 为任意常数) 可以将形如 $y'=f(ax+by)$的方程化成可分离变量的方程.

在 **51～65** 各题中, 解出给定的方程, 并对每个方程画出一些积分曲线. 同时求出满足初始条件 (在那些给定初始条件的问题里) 的解.

51. $xy\,dx+(x+1)dy=0.$ **52.** $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy.$

53. $(x^2-1)y'+2xy^2=0;\ \ y(0)=1.$

54. $y'\operatorname{ctg}x+y=2;\ \ y(0)=-1.$

55. $y'=3\sqrt[3]{y^2};\ \ y(2)=0.$

56. $xy'+y=y^2;\ \ y(1)=0.5.$

57. $2x^2yy'+y^2=2.$ **58.** $y'-xy^2=2xy.$

59. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$ **60.** $z'=10^{x+z}.$

61. $x\frac{dx}{dt}+t=1.$ **62.** $y'=\cos(y-x).$

63. $y'-y=2x-3.$

64. $(x+2y)y'=1;\ \ y(0)=-1.$

65. $y'=\sqrt{4x+2y-1}.$

在 **66** 和 **67** 两题中, 求出方程当 $x\to+\infty$ 时满足给定条件的解.

66. $x^2y'-\cos 2y=1$; $y(+\infty)=9\pi/4$.

67. $3y^2y'+16x=2xy^3$; 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$有界.

68. 求出下列各曲线族的正交轨线: ① $y=Cx^2$; ② $y=Ce^x$; ③ $Cx^2+y^2=1$.

在 **69*** 和 **70*** 两题中分离变量，但是所得到的积分不能用初等函数表示. 然而在研究其收敛性之后，就可以给出问题的答案.

69*. 试证明，方程 $y'=\sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ 的每条积分曲线都有两条水平渐近线.

70*. 研究方程 $y'=\sqrt{\dfrac{\ln(1+y)}{\sin x}}$ 的积分曲线在坐标原点邻域内的性质. 证明，自第一象限边界上的每一点只能引出一条通过该象限内部的积分曲线.

§3. 几何与物理问题①

1. 为了求解以下所引进的几何问题，需要画出图形，用 $y=y(x)$表示所求的曲线(如果问题是在直角坐标系中求解)，并且用 x, y 和 y' 表示问题中所提到的各个量. 这时在问题的条件下所给定的关系式就将成为微分方程，从中便可以求出未知函数 $y(x)$.

2. 在物理问题中首先应该解决，把什么值取作自变量，把什么值取作未知函数的问题. 然后要表示出，当自变量 x 得到增量 Δx 时，未知函数 y 将改变多少，即用问题中谈到的值的大小表示出差 $y(x+\Delta x)-y(x)$. 将这个差除以 Δx，并且当 $\Delta x\to 0$ 时取极限，就得到从中可以求

① 本节的所有问题都可以化成可分离变量的方程. 化成其它形状方程的问题可在相应的各节中找到. 对于解题时所需要的指数函数值与对数函数值可从书末的表中查找.

出未知函数的微分方程，在大多数问题中都要给出某些条件，利用这些条件就可以确定出在微分方程的通解中出现的常数．有时利用导数的物理意义，还可以用比较简单的方法建立微分方程（如果自变量是时间 t，则 $\frac{dy}{dt}$ 就是 y 值的变化速度）．

在有些问题里，建立方程时需要用到前文问题（或者一些问题）中所阐述过的物理定律．

例 现有每公升含 0.3 千克食盐的水溶液，以每分钟 2 公升的速度将其连续注入盛有 10 公升纯水的容器里．溶液到容器里经过稀释后又以同样的速度自容器中流出．问经过 5 分钟后，容器里将剩有多少食盐？

解 把时间 t 取作自变量，而把试验开始后经过 t 分钟时容器里食盐的数量取作未知函数 $y(t)$．我们来求出在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内食盐的变化量是多少．在一分钟内注入食盐溶液 2 公升，而在 Δt 分钟内则注入 $2\Delta t$ 公升；在这 $2\Delta t$ 公升中含有 $0.3\cdot 2\Delta t=0.6\Delta t$ 千克的食盐．另一方面，在 Δt 时间内自容器中流出 $2\Delta t$ 公升的溶液．在时刻 t 整个容器（10 公升）中含有 $y(t)$ 千克的食盐．因此，如果在 Δt 时间内容器中所含的食盐数量不变，则在流出的 $2\Delta t$ 公升的溶液中将含有 $0.2\Delta t\cdot y(t)$ 千克的食盐．但是在这段时间里当 $\Delta t\to 0$ 时它改变一个无穷小量，那么在流出的 $2\Delta t$ 公升的溶液中将含有 $0.2\Delta t(y(t)+\alpha)$ 千克的食盐，其中当 $\Delta t\to 0$ 时 $\alpha\to 0$．

因而，在 $(t,\ t+\Delta t)$ 这段时间内流入的溶液中含有 $0.6\Delta t$ 千克的食盐，而在流出的溶液中含有 $0.2\Delta t(y(t)+\alpha)$ 千克．于是在这段时间内食盐的增量 $y(t+\Delta t)-y(t)$ 等于所求出的值之差，即

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0.6\Delta t-0.2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha).$$

除以 Δt，并且当 $\Delta t\to 0$ 时取极限．在左端得到导数 $y'(t)$，而在右端得到 $0.6-0.2y(t)$，因为当 $\Delta t\to 0$ 时 $\alpha\to 0$．

于是，我们有微分方程 $y'(t)=0.6-0.2y(t)$．解这个方程，得

$$y(t)=3-Ce^{-0.2t}. \tag{1}$$

因为当 $t=0$ 时容器里没有食盐，所以 $y(0)=0$．在(1)中令 $t=0$，我们

求出 $y(0)=3-C$; $0=3-C$; $C=3$. 把这个 C 值代入(1)时，得到 $y(t)=3-3e^{-0.2t}$. 当 $t=5$ 时容器中将有

$$y(5)=3-3e^{-0.2\cdot 5}=3-3e^{-1}\approx 1.9$$

千克的食盐.

71. 求一曲线，使由其上任意一点的切线、过切点平行于 Oy 轴的直线和横轴所围成的三角形的面积等于常数 a^2.

72. 求一曲线，使在上题中所作三角形的两条直角边的和等于常数 b.

73. 求出具有下列性质的曲线：从曲线上任一点所引出的切线和法线在横轴上所截得的线段长等于 $2a$.

74. 求一曲线，使其上任意一点的切线与横轴交点的横坐标等于切点横坐标的一半.

75. 求出具有下列性质的曲线：从曲线上任一点引出分别平行于坐标轴的两条直线，使这两条直线与坐标轴所围成的矩形的面积被曲线分成的比为 1:2.

76. 求一曲线，使其上任意一点的切线与极半径的夹角等于该切线与极轴的夹角.

在 **77～79** 各题中，可认为流入的气体(或者液体)因搅拌而均匀地分布于容器之中.

77. 有一充满空气(80% 的氮气和 20% 的氧气)的容器，其容积为 20 公升. 以每秒钟 0.1 公升的速度向其中流入氮气，不断搅拌，同时混合后的气体又以同样的速度流出. 问经过多长时间容器里将有 99% 的氮气？

78. 在一水槽中，盛有 100 公升共含 10 千克食盐的水溶液. 向其中连续注入纯水(每分钟 5 公升)，稀释后的食盐

溶液又以同样的速度流出．问经过1小时后，水槽中将剩有多少食盐？

79. 有一容积为200米^{3}的房间，其中的空气含有0.15%的碳酸气(CO_2)．通风机在每一分钟内送入含CO_2 0.04%的空气20米^3．问经过多长时间，房间里的空气所含的碳酸气将减少三分之二？

在**80～82**各题中，将用到如下事实：物体冷却(或者加热)的速度与物体和周围介质的温度差成比例．

80. 在10分钟内物体的温度从100°冷却到60°．周围空气温度保持为20°．问需要多长时间物体的温度将冷却到25°？

81. 向一盛有温度为20°，质量为1千克的水的容器中放入一个比热为0.2，温度为75°，质量为0.5千克的铝质物体．经过1分钟后水的温度增加2°．问需要多长时间水和物体的温度将差1°？用于容器加热和其它热量的耗损忽略不计．

82. 将温度为a度的金属块放入炉中，在1小时内其温度均匀地从a度上升到b度．当炉中的温度与金属的温度相差T度时．金属以每分钟为kT度的速度被加热．求出经过1小时后金属块的温度．

83. 小船在水的阻力作用下做减速运动，阻力的大小与船的速度成比例．船的初速度为1.5米/秒，经过4秒钟后其速度变为1米/秒．问经过多长时间其速度将减到1厘米/秒？小船将走过多少路程才能停止？

在**84～86**各题中将用到放射衰变定律：放射性物质在单位时间内衰变的数量，与在研究时所具有的这种物质的

数量成比例.

84. 放射性物质在30天中衰变原有数量的50%. 问经过多长时间将剩下原有数量的1%?

85. 根据实验, 在1年里每克镭衰变0.44毫克. 问经过多少年将衰变现有镭的数量的一半?

86. 在所研究的一块矿石里含有100毫克的铀和14毫克的铀铅(урановый свинец)①. 已知, 铀在$4.5\cdot10^9$年中衰变原有数量的一半, 并且当238克的铀全部衰变时生成206克的铀铅. 试确定这块矿石的年龄. 认为在矿石形成时不含有铅,并且存在于铀和铅之间的放射结果忽略不计(因为它们的衰变比铀快得多).

87. 光耗损于薄水层的数量与射入水中光的数量、水层的厚度成比例. 厚度为35厘米的水层耗损射入光的一半. 问厚度为2米的水层将耗损怎样一部分光?

为了建立**88~90**各题中的微分方程, 把速度取作未知函数是比较方便的. 取重力加速度等于10米/秒^2.

88. 跳伞员从1.5千米的高度跳下,到0.5千米的高度张伞. 问经过多长时间他落到了张伞的地方? 已知人在正常密度的空气中降落的极限速度为50米/秒. 略去空气密度随高度的不同而发生的变化. 空气的阻力与速度的平方成比例.

89. 将一重为0.4千克的足球以20米/秒的速度上抛. 空气阻力与速度的平方成比例,并且当速度为1米/秒时阻力等于0.48克. 试计算球的上升时间和最大高度. 当不计空气阻力时,这些结果将发生怎样的变化?

---

① 系指铀放射出α线后所得到的铅. 这里指$U^{238}\longrightarrow 8\,He^4+Pb^{206}$中的铅($Pb^{206}$). ——译者注

90. 一球从 16.3 米的高处无初速度地落下. 试计算出在考虑空气阻力时的降落时间(见 89 题). 求出降落的末速度.

在 **91～95** 各题中, 将用到下述事实: 液体从容器中流出的速度等于 $0.6\sqrt{2gh}$, 其中 $g=10$ 米/秒^2 为重力加速度, h 为流孔上方水平面的高度.

91. 有一直径为 $2R=1.8$ 米, 高为 $H=2.45$ 米的圆柱形水槽. 柱轴竖直放着. 柱底有一直径为 $2r=6$ 厘米的小圆孔. 问在多长时间内可使全槽中的水经小圆孔全部流尽?

92. 在圆柱水平放置而小圆孔位于圆柱的最下部时求解上题.

93. 竖直放置的圆柱形水槽底部有一小孔. 在 5 分钟内可流出全槽水的一半. 问在多长时间内流尽所有的水?

94. 漏斗是一个底圆半径 $R=6$ 厘米、高 $H=10$ 厘米的顶点向下的圆锥形. 问在多长时间内可由锥顶直径为 0.5 厘米的小圆孔中流尽所有的水?

95. 以每秒钟 1.8 公升的速度向底面为 60 厘米×75 厘米、高为 80 厘米的矩形水槽注水. 水槽底部有一面积为 2.5 厘米^2 的小孔. 问在多长时间内可以注满水槽? 将结果与底部为无孔水槽的注满时间相比较.

96. 长为 1 米的橡皮条在 f 千克力的作用下伸长 kf 米. 如果把一根长为 l、重为 P 的这样的橡皮条的一端挂起来, 问在其自身重力的作用下它将伸长多少?

97. 假如地面上的大气压强等于 1 千克/厘米^2, 空气的密度为 0.0012 克/厘米^3, 求出高为 h 处的压强. 利用密度与压强成比例的波义尔 (Бойл)-马略特 (Мариотт) 定律(即略去空气的温度随高度而发生的变化).

98. 为使河船停在码头，要从船上抛下绕向码头立柱上的缆绳. 如果缆绳围立柱绕三圈，缆绳对立柱的摩擦系数等于 $1/3$，并且工人在码头上以 10 千克的力拉住缆绳的自由端，问对船将产生多大的牵制力？

99. 在一容积为 v 米^3 的密闭房间里，放有一开口盛水的容器. 水的蒸发速度与水蒸气的数量 q_1 和 q 之差成比例，其中 q_1 是在给定温度下 1 米^3 空气中饱和水蒸气的数量，q 是在所考虑的时刻 1 米^3 空气中具有水蒸气的数量（可以认为空气和水的温度以及进行蒸发的面积都不变）. 在初始时刻容器中有 m_0 克的水，而在 1 米^3 的空气中有 q_0 克的水蒸气. 问经过一段时间 t，容器中将剩有多少水？

100. 火箭在储满燃料时的质量为 M，未储燃料时的质量为 m，从火箭喷出燃烧物的速度等于 c，火箭的初速度为零. 求出燃料燃烧以后火箭的速度，重力和空气阻力略去不计（齐奥尔可夫斯基（Циолковский）公式）.

§4. 齐次方程

1. 齐次方程可以写成

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形状，以及 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 的形状，其中 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 是同次齐次函数①. 为了解出此方程，可以用代换 $y=tx$ 把它化为可分离变量的方程.

例 解方程 $xdy=(x+y)dx$.

这是齐次方程. 我们设 $y=tx$. 这时 $dy=tdx+xdt$. 代入方程，

① 如果对于所有的 $k>0$，都有 $M(kx, ky)\equiv k^nM(x, y)$，那么函数 $M(x, y)$ 叫做 n 次齐次函数.

得到

$$x(x\,dt+t\,dx)=(x+tx)dx;\ x\,dt=dx.$$

解这个可分离变量的方程

$$dt=\frac{dx}{x};\ t=\ln|x|+C.$$

回到原来的变量 y 时，就得到 $y=x(\ln|x|+C)$. 此外，还有用 x 除时丢掉的解 $x=0$.

2. 形如

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

的方程，可以用把坐标原点移到直线 $ax+by+c=0$ 和 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 的交点上的方法化成齐次的. 如果这两条直线不相交，则 $a_1x+b_1y=k(ax+by)$; 因此，方程具有 $y'=F(ax+by)$ 的形状，用代换 $z=ax+by$ (或者 $z=ax+by+c$) 可化成可分离变量的方程，见 § 2, 第 2 段.

3. 有些方程可用代换 $y=z^m$ 化为齐次的. 数 m 通常是预先未知的. 为了求出此数，应当将 $y=z^m$ 代入方程. 为了使方程成为齐次的，如果可能的话，要求从中求出数 m. 如果这样做不行，则方程就不能用这种方法变为齐次的.

例 给定方程 $2x^4yy'+y^4=4x^6$. 作代换 $y=z^m$ 后方程具有 $2mx^4z^{2m-1}z'+z^{4m}=4x^6$ 的形状. 这个方程当其各项的次数彼此相等，即 $4+(2m-1)=4m=6$ 时将是齐次的. 当 $m=3/2$ 时，这些方程同时被满足. 因此，用代换 $y=z^{3/2}$ 就可以把方程变为齐次的.

解方程 **101～129**.

101. $(x+2y)dx-x\,dy=0$.

102. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

103. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

104. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$. **105**. $y^2+x^2y'=xyy'$.

106. $(x^2+y^2)y'=2xy$. **107**. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.