



快乐阅读书屋

项昭 分册主编

王功琪 编 著

航海带来的启发 ——球面上的几何

happy reading 数学知识类



贵州出版集团
贵州人民出版社

航海带来的启发

——球面上的几何

王功琪 编著



贵州出版集团
贵州人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

航海带来的启发——球面上的几何 / 王功琪编著. —贵阳:

贵州人民出版社, 2013.9

ISBN 978-7-221-11369-6

I. ①航… II. ①王… III. ①几何学 - 普及读物

IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 201355 号

航海带来的启发——球面上的几何

王功琪 编著

出版发行	贵州出版集团 贵州人民出版社
地 址	贵阳市中华北路 289 号
责任编辑	徐 一
封面设计	熊 锋
印 刷	贵阳经纬印刷厂
规 格	850mm × 1168mm 1/16
字 数	120 千字
印 张	9.5
版 次	2014 年 7 月第 1 版
印 次	2014 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-221-11369-6 定 价: 18.00 元

出版说明

兴趣是最好的老师,知识的学习更是如此。如果学习者缺乏兴趣,阅读就将是一个枯燥无味的过程,轻松快乐的学习也就无从谈起。基于这样的事实,本着“兴趣阅读、快乐学习”的理念,我们经过深入调研,与国内的众多专家学者及一线教师全力合作,为所有希望将学习变得轻松愉快的朋友奉献上“快乐阅读”书屋。

“快乐阅读”书屋,以知识的轻松学习为核心,强调阅读的趣味性。它力求将各种枯燥无味的知识以轻松快乐的方式呈现,让读者朋友便于理解接受。它的各种努力,只有一个目标,即力图将知识学习过程轻松化、趣味化。读者朋友在阅读过程中,既能保持心情愉快,又能学有所得。在轻松愉快的氛围中学习,让知识学习成为读者朋友的兴趣,本身就是提高学习效率最有效的途径。

“快乐阅读”书屋首批图书分为“语文知识”、“作文知识”、“数学知识”、“文学导步”、“文学欣赏”、“语言文化”、“个人修养”七大板块,各个板块之下又有细分。英语、生物、化学等相关的知识板块将会在以后陆续推出。针对不同学科知识的特点,本书屋以不同的方式来达到轻松快乐的目的。要么是以故事的形式,在故事的展开之中融入相关知识;要么是理清该知识点的背景,追根溯源,让读者朋友知其然,更知其所以然,让理解更为轻松。总而言之,就是以最恰当的方式呈现相关的知识。

希望这套“快乐阅读”书屋能陪伴每一位读者朋友度过美好的阅读时光。

编 者

2014年5月

在漫长的历史岁月中,人类在地球上繁衍生息,用自己勤劳的双手,建设美好的家园。劳动之余,人们希望更了解自己居住的这片土地,日月星辰的变化、四季的更替、天文历法的制定、土地田亩的划分……然而,观天测地需要有相应的数学知识。到今天,无论是大地测量、卫星定位,还是确定航线、地图学等领域,都离不开一种数学知识,正是这种数学知识的积累,促成了一门数学分支——球面几何的蓬勃发展。



球面几何学发端于古希腊,当时人们热衷于“量天的学问”,它的确比计量财产要引人入胜得多。这是一门关于球面上图形性质的学科,它以球面上三角形边与角的关系为基本研究对象,发展了球面三角学和球面几何学知识,积累了大量有关天体测量和大地测量的经验。到15世纪,球面几何才独立于天文学,成为一门独立学科,它和我们初中学过的平面几何有很多不同之处。在地球上,当你要测量很远的距离,比如,需要在太平洋的海洋测量船上监测“神舟”飞船的运行情况时,就要用到球面几何知识。这门学科在当今社会的科学技术应用中发挥着重要作用。

在这本书里,我们将和你一起走进球面几何的世界。在这

里,你先要认识球面上的一些基本图形,比如,什么是“月形”?什么是“球面三角形”?它的“边”和“角”有什么特性……这时,你会发现很多怪现象:比如,球面三角形的“边”和“角”的两边都是弯曲的!三角形的三个内角和并不等于 180° 度,甚至还有三个内角都等于 90° 度的奇异三角形!此外,你还会遇到球面上两条不同的“直线”相交,竟会有两个交点!实际上,在球面上根本没有平行线,所以初中学过的“平行公理”就不成立了!……如何发现和解释这些奇怪的现象?我们会在书中向你一一道来。当然,我们还会为你介绍球面上的正弦定理、余弦定理、勾股定理等等以前在平面几何中你见过的数学知识,只不过它们的外貌不一样了,你可要留神呢!知道了这些定理和性质,你就可以用它们去解决身边的问题,而科学家们正是以这些知识为基础,建立了科学的宏伟大厦。

在你阅读这本书的过程中,不仅会看到球面几何在人们观天测地中的贡献,还可以通过平面几何与球面几何中图形性质的比较,发现它们之间的共性和差异,从中引发出更多地遐想:这些不同的结论,谁是谁非?我们身边是否存在不同的几何学?它们是如何被人们发现的?你愿意参加这个探险的历程吗?那么,请打开这本书,一路欣赏,一路思考,你将会体会到人类智慧的结晶和科学探索的精神!

目 录

第一篇 来自航海的启发	(001)
第一节 平面世界	(005)
第二节 无法穿越的空间	(008)
第三节 角的两边是弯曲的	(016)
第四节 平行公理失灵了	(019)
第五节 三角形的内角和究竟是多少	(023)
第二篇 球面上有趣的几何性质	(029)
第一节 极点	(029)
第二节 特殊的三角形——球面极三角形	(031)
第三节 无处不在的对称	(034)
第四节 球面上的相似	(038)
第五节 关于球面的计算	(047)
第三篇 球面三角及简单运用	(054)
第一节 球面三角那些事	(054)
第二节 由嫦娥奔月说起	(059)
第三节 海战中如何掌握对方的信息	(064)
第四节 球面上的百牛定理	(070)
第五节 球面与平面的联系	(077)



**第四篇 球面性质的进一步探讨 (082)**

第一节 为什么球面不能展开成平面图形 (082)

第二节 球面坐标系与导航问题 (086)

第三节 球面多边形与欧拉公式的证明 (092)

第四节 怎样测量球体的体积 (096)

第五节 再谈球面三角形 (100)

第六节 两种几何的比较 (106)

第五篇 球面几何的启示 (111)

第一节 几何中的“圣经” (112)

第二节 《几何原本》的缺憾 (114)

第三节 非欧几何的萌芽 (117)

第四节 黎曼的突破 (122)

第五节 走向成熟的非欧几何 (125)

第六节 非欧几何的启示 (130)

结语 (136)

第一篇

来自航海的启发

你知道太平洋这个名称是怎么来的吗？你知道第一个拥抱地球的人是谁吗？人类在航海的过程中逐渐积累了一些球面几何的知识，使得球面几何的运用变得更加丰富！现在，我们知道球面上的几何和我们的主观认识格格不入！比如在地球表面上，三角形内角和不见得等于180度；球面上找不到长方形和正方形；存在只有两个角的封闭图形等等……一路欣赏，你将体会到人类智慧的结晶和探索科学的精神！

001

回顾世界航海史，早在公元前2500年以前，古埃及就有人驾驶帆桨船沿地中海东航至黎巴嫩，古希腊人毕菲公元前4世纪在海上探险中发现了不列颠群岛。中国发明的罗盘（指南针）在14世纪前后，分别由阿拉伯人和埃及人传入欧洲，帮助欧洲海洋国家的航海探索取得了巨大的成果。在郑和下西洋之后，1492年意大利人哥伦布横渡大西洋到达美洲，1497年葡萄牙人达·伽马绕过好望角远航印度，1519年葡萄牙人麦哲伦向西作环球航行，都载入了世界航海史册。

在世界航海探险史上，人们永远不会忘记意大利伟大的航海家哥伦布。尽管哥伦布相信地球是圆的，相信横渡大西洋一直向西航行可抵达东方，但遗憾的是，他最终并没有实现环球航行的梦想。真正实现环球航行梦想的，是另一位名彪青史的葡萄牙航海家——斐迪南·麦哲伦。

航海带来的启发——球面上的几何

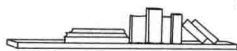




图 1-1 斐迪南·麦哲伦

麦哲伦出生于葡萄牙的一个骑士之家。从青少年时代起,他就被葡萄牙迪亚士、达·伽马和意大利的哥伦布等著名航海家的探险故事所吸引。传闻他们从东方带回了多得令人难以置信的黄金、象牙、珠宝、香料等等,这更让麦哲伦心驰神往,幻想着有朝一日也能来到富庶的东方,实现人生的壮丽与辉煌。然而,有志于航海探险的麦哲伦在自己的国家中得不到国王的信任,反而遭到无端的诬告陷害。失望和悲愤之际,他转而寻求葡萄牙的敌国——西班牙国王的帮助。令人不可思议的是,他居然幸运地得到了西班牙国王的支持。

1519年8月1日,西班牙的塞维利亚码头热闹非凡。望着前来送行的人群,想到即将踏上远航探险的征程,麦哲伦心潮澎湃,感慨万千。送行的枪炮声响了,麦哲伦心里暗暗发誓:“我一定要载誉归来!”随后,他一声令下,一支由5艘大船、265名水手组成的西班牙船队立刻拉起风帆,破浪远航了。按照计划,麦哲伦沿着哥伦布当年的航线前进。一路上,他率领船员们战胜了无数艰难险阻,镇压了船队内部西班牙人发动的叛乱,终于使全体船员成为自己的忠实追随者!1520年10月18日,麦哲伦的船队继续行驶在南美洲海岸的南部。这一天,麦哲伦对船员们宣布说:“我们沿着这条海岸向南航行了这么久,但至今仍然没有找到通向‘南海’的海峡。现在,我们将继续往南前进,如果在西经 75° 处找不到海峡入口,那么我们将转向东航行。”于是,这支船队又沿海岸向南方前进了3天。21日麦哲伦在南纬 52° 附近发现了一个通向西方的狭窄入口。麦哲伦激动地看着这个将给

他带来希望的入口,坚定地命令船队向这个看上去险恶异常的通道前进。船员们紧张地看着两旁耸立着的1000多米高的陡峭高峰,小心翼翼地迎着通道中的狂风怒涛前进。海峡越来越窄,没有人知道再往前走面临的是死亡还是希望,但是坚定的信念和冒险的精神推动着麦哲伦义无反顾地勇往直前。他大胆而豪迈地鼓舞士气:“眼前的海峡正是我们所要寻找的从大西洋通向东方的通道。穿过这个海峡,我们就成功了!”在麦哲伦的鼓舞下,船队一步一步地绕过了南美洲的南端。

1520年11月28日,船队在经历了千辛万苦之后,突然看见了一片广阔的大海——他们终于闯出了海峡,找到了从大西洋通向太平洋的航道!麦哲伦和船员们激动得热泪盈眶!哥伦布没有实现的梦想,他们实现了!这个海峡后来就被称作“麦哲伦海峡”。此后,船队在这片大洋中航行了3个多月,海面一直风平浪静。因此,他们就为这片海洋取名叫“太平洋”。

这个时候船队水尽粮绝,他们只得靠饮污水、吃木屑,甚至吃在船上的老鼠为生,许多水手因此得了坏血病在途中死去。1521年3月,麦哲伦抵达菲律宾群岛,在岛上与当地居民发生了冲突。麦哲伦在这场冲突中被杀死,剩下的船员继续航行,经过印度洋,绕过好望角,沿非洲大陆西海岸北上。1522年9月,这支历时3年的远航队伍只有18个人回到了西班牙。图1-2就是他们船队的路线图。



图1-2 麦哲伦航海路线图





麦哲伦环球航行是世界航海史上的伟大成就,这次航行成功不仅开辟了新航线,而且在科学史上也有着极其重要的意义:他们用实际行动证明,人类居住的地球的确是一个圆球体,从而最终结束了有关地球形状的无休止争论。因为在此之前,人们不认为地球的形状是圆的,例如古代中国人认为天是圆的,地是方的;古代巴比伦人认为大地是圆的,大地周围是河流;古代欧洲人认为大地是一个平面,海的尽头是无底洞。所以,古希腊人绘制的地图上,海的尽头画着一个巨人,巨人手中举着一块路牌,上面写着:到此止步,勿再前进。到15世纪,欧洲大多数人还认为大地是平的,海洋尽头是无底深渊。

麦哲伦的航行还证明了世界各大洋都是相通的,世界第一次开始缩小,原先各自孤立而不相联系的大陆和国家被联系在一起。而且地球上海洋的面积明显超过陆地面积,从而推翻了陆地大于海洋的误解。为此,人们称麦哲伦是第一个拥抱地球的人。

但这次拥抱地球的代价极大。据记载,当时一起出航的船有5艘、水手有265人,历时3年最后只有18人生还。他们用自己的亲身实践证实了地球是一个球体,地球表面类似于一个球面!现在如果想了解宇宙的形状,我们很难在没有充足信息的情况下用“麦哲伦方法”去进行检验。

不过,到了17世纪,数学家高斯在他担任测量局长期间,曾经利用测量面积的方法验证了地球是圆的。他在地表上取三点,并切割成许多小三角形,再量取每个小三角形的面积相加起来,这样所得的结果并不近似于直接用平面上的三角形面积公式计算的结果,而是近似于用球面三角形面积公式计算的结果。这个实验给我们一个启示:即使我们不航行宇宙,也可以依靠理论推导来了解宇宙的形状。

麦哲伦环球航行的举动将地理大发现带上了最高点,从那以后航海技术不断发展,逐渐过渡到“定量航海”时期。此后航海逐渐发展成为一类学科。这类学科要解决的问题主要有:1、拟定一条安全、经济的航线和制定一个切实可行的航行计划;2、航迹推算,它是驾驶员在任何情况下,求取任何时刻的船舶位置的最基本的方法,也是陆标定位、天文定位和电子定位的基础;3、测定船位(简称定位),船舶航行中,要求航海人员尽一切可能随

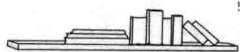
时确定本船的位置所在。这样,才可能结合海图,了解船舶周围的航行条件,及时采取适当、有效的航行方法和必要的航行措施,确保船舶安全、经济地航行。航迹推算和定位是船舶在海上确定船位的两类主要方法。而要研究以上问题,人们就必须掌握航海学基础知识。在战时特别是海战,战斗人员掌握一定的天文航海的基本知识可以为战斗顺利进行和海上自救提供一定的保证。这些知识主要包括坐标、方向和距离等,而这些知识都是建立在地球表面的。因此要研究坐标、方向和距离等航海基本问题,必须首先对地球的形状和大小作一定的了解。这就涉及到与平面几何不同的另一种几何——球面几何!

人类生活在地球上,而地球的表面非常接近于一个球面。在科学技术不发达的时代,人类的活动范围非常有限,人们把大地理解成一个平面。在测量土地、计算面积时用平面几何知识就可以了。但是,航海技术发展起来以后,人们逐渐了解到大地不是一个平面,仍然用平面几何的知识来计算航海路线将会产生很大的误差。因此需要了解球面几何图形的性质,即学习球面几何的知识。

航海推动了球面几何的发展,球面几何学研究的正是我们身处的空间的几何性质,它和天文观测、土地测量、航海航空等有着密切的联系,在这些领域有着广泛的应用。虽然我们不能跳出这个空间去观察我们生存的世界,但是可以通过理论的计算和推导对我们身处的这个空间的形状和性质有一定程度了解。下面就让我们带你走进奇妙的球面几何世界里去吧!

第一节 平面世界

让我们先来了解一下平面世界。所谓的平面是相对的,在不大的空间内,可以认为地面是平的。首先来考察可以向两个方向无限延伸的直线(我们可以把它称为“一维空间”),在此直线上有无数个点。为了标识出直线上每一个点的位置,即它的“住址”,我们用某种方法把直线变成一个数





轴。这样一来,只要在直线上规定原点、单位长度和正方向,那么就可以确切地确定每一个点的位置。想象有一个“寄宿”在平面(我们把它称为“二维空间”)中的小生物,假设它就是一个想象中的平面人——他只有长度和宽度,没有厚度。他是平的,他只能在平面上移动,既不能跳出平面,也不能从平面外观察“本身世界”。当他移动时,他在平面上占据某个位置,就像我们在空间中占有某个位置一样。只是这个平面人不管怎样移动,他只能在平面上进行“观察”,他绝不可能跑到平面外来观察自己所在的平面!因为他只能看到平面上发出的光线,因此平面人只能在自己的世界里观察这一切。

以上描述的是中学欧氏几何中的几个关键元素——点、直线、平面,这几个元素构成欧氏几何的基本概念,有了这些基础就可以演绎出欧氏几何的逻辑体系。

现在,让我们再来简单回忆一下平面世界的那些几何事实吧!假如这个平面人在平面上沿着一条直线行走,那么他无论往哪个方向行走,都无法走到这条直路的尽头;而当两条直线相交时,有且只有一个交点;在平面世界中我们看到的两条平行直线,是可以无限延伸的,且没有交点;那么在平面世界中,由线段围成的最简单的封闭图形是什么?回答一定是三角形,对,就是这个图形,而且我们还知道它的内角和是 180° ,这是几千年来不变的事实!至少你现在还这样认为!我们还知道三角形两边之和大于第三边、两边之差小于第三边、大边对大角;三角形的三条中线交于一点,三条高交于一点,三条内角平分线交于一点;三个对应角相等的两个三角形相似。我们还知道,过平面外一点有且只有一条直线与已知直线平行,这就是欧氏几何的平行公理,也称为普莱菲尔公设。这个公设很神奇,它能让几何世界变得那么的不安宁,同时也促进了几何学的伟大变革。

上面说的是我们已经很熟悉的欧氏几何事实了,如果我们改变欧氏几何的载体(将平面变成球面)这些结论还成立吗?你能自己找到答案吗?随着你的知识不断丰富,你会发现很多和我们熟悉的事实相悖的现象,这就需要我们辩证地看问题,不能一味地认为我们的直觉都是正确的,要依靠一定的条件和逻辑演绎知识作为支撑,球面几何的出现说明了我们只具

备平面几何知识还不够,我们还需要更多的几何知识才能满足我们的需要。继续阅读,你会发现几何世界是那么的精彩和充满挑战。

为此,我们先提出一个实际问题,看看你如何解决?王教授想从北京出发,前往智利的圣地亚哥参加国际学术会议。假如只有两种旅行方案供选择:

甲方案:从北京出发飞往美国纽约,再从纽约飞往圣地亚哥。

乙方案:从北京出发飞往澳大利亚的弗里曼特尔,再从弗里曼特尔飞往圣地亚哥。

为了挑选一个合理的方案,我们当然希望航程短,省时省钱,那么,哪条航线更短呢?请你打开地图或对照地球仪,找找答案吧!

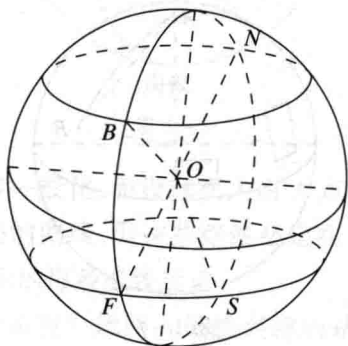


图 1-3

为简单起见,请你参看图 1-3(图中 B、N、S、F 分别表示北京、纽约、圣地亚哥和弗里曼特尔的位置),我们把北京的地理位置粗略地认为是:东经 120 度,北纬 40 度;纽约的地理位置大致是:西经 70 度,北纬 40 度;澳大利亚的弗里曼特尔的地理位置大致位置是:东经 120 度,南纬 30 度;智利的圣地亚哥的地理位置大致是:西经 70 度,南纬 30 度。假设飞行航线走的都是球面距离,你认为怎样才能确定最短的航程呢?

这个问题是两地之间怎样走距离最短的问题,若用平面几何知识解决,用“两点之间线段最短”,显然是不现实的,因为这两地是球面上的两点,在后面我们会慢慢揭示出问题的答案。但在此之前,我们有必要了解





一些球面上的几何事实,这样有助于对我们身处的空间有个更深入的认识。

现在让我们追随前人的足迹大胆地去遨游不同于平面的那样一个世界吧!我们考察的是球的表面,也就是球体的边缘,我们感兴趣的只是表面,人们习惯于把它叫做球面。我们想象有一个寄居在球面上的生物,称他为“球面人”。他只能在球面上移动、活动,但是不可能朝里面钻进或者脱离这个球面,同时他也不可能从外面某个地方观看这个世界。当他在球面上移动时,他将占据球面的一系列位置,就像平面人移动时发生的情形一样。同样地,他没有厚度,他在球面上的表现就像一块不能伸展的薄膜,如图1-4。

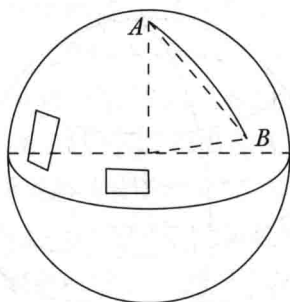


图1-4

第二节 无法穿越的空间

影视上有大量穿越时空的故事,古代和现代互相穿越。那么空间是否真的能够穿越呢?按目前的技术,似乎不太可能或者成本太大。比如,我们要从北京乘船到旧金山去,我们当然希望走最短的路程。按平面几何的知识,两点之间直线段最短,如果把北京和旧金山看成两个点,连结这两点的直线段距离最短,但要走这条最短的路线实际上是不可能的。

因为北京和旧金山分别在地球的东半球和西半球上,如图1-5,要走直线路程只能打一个地洞穿越地球内部,显然,这在当前是无法实现的。

可能的读者会提出另一种办法,那就是沿地球表面航行,由于北京和旧金山在地球上基本上是在同一纬度,旧金山在北京的东面,那么轮船只需沿纬线向东航行就行了,可是这样的航线就是两地的最短距离吗?后面你会看到,事实并非如此!

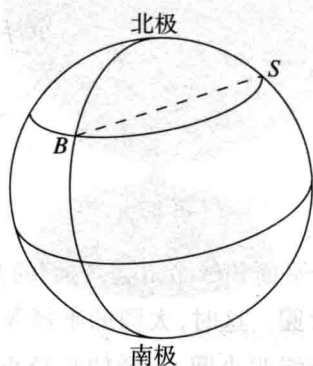


图 1-5

009

把这个问题进一步一般化,假设球面人由 A 点移动到 B 点(见图 1-4),自然,他可以走不同的路线,但这些路线必定在球面上,因为他不可能穿越球体如图 1-4 所示的那条虚线运动。

那么怎样走才能最短呢?球面人最感兴趣的是这样的线。这也是我们最关心的问题之一,在现代的航空航海活动中,要从一个地方航行到很远的另一个地方,怎样确定航线才使航行的路程最短呢?

为了说明这样的路线存在,我们再来了解与球面相关的一些知识。

空间中到一个定点的距离等于同一常数的所有点的集合,称为球面。这个定点叫做球面的球心,连接球心和球面上任意一点的线段叫做球面的半径。也可以把球面看成半圆绕着直径旋转一周所得到的轨迹,如图 1-6,将左图半圆绕着直径 AB 旋转一周,得到的图形是一个球面,如右图所示。

航海带来的启发——球面上的几何

