湘教考苑

高考解题策略

学生自悟学法　切入分析精达
解题步骤简便　旨在赢战高考

GAOKAO JIETI CELUE DIANBO WENKE SHUXUE

点拨

文科数学

梁光挂 主编

湖南教育出版社

湘教考苑

高考解题策略点拨

GAOKAO JIETI CELUE DIANBO WENKE SHUXUE

文科数学

梁光挂 主编

湖南教育出版社

序　言

本书作者梁光挂是广西师范大学数学科学学院数学与应用数学专业 2009 级本科在校学生，他给我的印象是积极上进、勤于思考、用心钻研、勇于创新。听说他写了一本书且即将出版，我虽然稍许感到突然，但并不意外，因为这更加验证了我对他印象的正确性。

光挂同学自学美国数学家和数学教育家乔治·波利亚的《怎样解题》、《数学的发现》后，对数学解题具有浓厚的兴趣，特别是解高考题，他不满足于会解题，而是非常注重解题思路。近几年他通过对高考题解答的探索，记录下了自己灵感触发的解题历程，因此他的书给人焕然一新之感。作者以解题者身份进行分析和探究，拉近了与学生的距离，具有较强的适应性。

作者基于数学思想方法的渗透和解题策略的角度，对每类题型进行归纳与总结，比如在“点拨”中，总结了解题过程使用的数学思想方法，指引读者遇到类似题型时应如何思考、联想与反思，力图达到举一反三和举多归一的效果，提升读者的思考力和解题力。

我很高兴光挂同学通过学习和亲身体验真正做到了学思结合，知行合一。希望读者通过研读这本书后收获惊喜。

吴佃华

2012 年 7 月

前　言

本书主要用于指导同学们在做题或考试过程中的方法和技巧，使用本书时，不要只看例子或者答案，而应该注重思想和方法，总结与提升。我们根据多年的做题经验和对历年各省高考题的研究，及高考命题的趋势，来写这本复习指导书，是考前的“兴奋剂”，希望通过这本书能让同学们在考试后尽少地出现拍大腿的现象，助同学们圆大学梦一臂之力！这也是写这本书的最初出发点。

和以往资料不同的是，本书我们站在学生的角度上，采用分题型来分析，即基本按高考中题目的类型（选择题，填空题，解答题的三角函数、概率、立体几何、函数与导数、解析几何、数列）来分析，它的“长相”就如一套高考题，从这点来讲，和以往资料相比，它对高考复习来讲具有较强的针对性和应用性。每类题型，我们都经过精练的总结，精心的选题，精辟的分析，每类题目的难度都是根据近三年高考题的难度决定的，这些是本书最出色的特点，也是它的创新之处。

尤其是高三学生，希望通过阅读专研本书后，懂得自我总结，给自己要解决的题目进行归类扣帽，也希望通过本书激发起你的学习能动性。知道应该从一个题目中得到些什么，也就是我们所说的反思性总结，由此养成良好的解题习惯。

同时，也温馨地提醒考生，假如在高考的考场上，应该怎么处理才能使得“分数时间比”达到最大值。这点是在其他教辅类中难以发现的又一亮点。

基于本书以上的主要特色和创新性，它具有针对性强且实用的特色，这使得此书在高三的复习中将起到很大的作用，特别是在第二轮复习中，“专项训练”＋本书＝事半功倍。同时，相信也能给高三教师一定的参考价值。由此，与目前市场上众多的教辅资料相比，这本书有一定的创新与突破。

使用本书时，不要仅满足于里边使用的方法，而应该多思考是否还有更优解，尝试给自己出题，把“问题”找出来。中国学生解题能力很强，但是能提出问题的却很少，爱因斯坦指出“提问题比解决问题更需要创造性思维”，可见能提问是一种能力。

本书主要分为三章，第一章主要讲做选择题的技巧，通过一些典型的实例进行讲解，对每一个例题进行分析、解答及总结，章末配有练习跟踪巩固。

第二章主要讲做填空题的技巧，通过一些典型的实例进行解析，同样对每个例子进行分析、解答和总结，后面也有相应练习进一步巩固。

第三章分为六个小节，主要是分别针对解答题的六种题型（三角函数、概率、立体几何、函数、解析几何、数列）进行讲解，每一个小节前有对应题型的方法总结与指导，每个小节后面有练习进一步巩固，每种方法后面都紧跟相应例题进行演习。

附录是高中数学的几乎所有公式及常用结论，把公式放在一起，使得同学们在记公式时，以方便比较记忆，给同学们在复习时提供方便。

本书后面有所有练习的参考答案。希望同学们在阅读本书时主要理解每一种方法，勤于思考，注意每个例子的分析和总结，这个才是例子的精华所在，答案只是参考，毕竟解答每种题型每一个题目的方法不是唯一的。总之，多动脑思考才能更大发挥本书的效果，最大最快地提高成绩。

最后祝同学们身体健康，学习生活愉快，感谢您的大力支持！

怎样解题

是否有过这样的感受：老师讲解时似乎听懂了，但是自己去动手做或考试的时候又不懂了。我认为出现这个现象的根本原因是你没有真正弄懂，你只是模仿了老师的“套路”，得到的是“死”经验，因此，可以下结论：你没有弄懂为什么老师这样想，还没有真正领悟这个解题方案是怎么想出来的。简而言之，能力没有提上来。为了解决这样的问题，你可尝试接受波利亚的解题思想，持之以恒，养成良好的解题习惯。

本文是经过研读美国著名数学家和数学教育家波利亚的《怎样解题·数学思维的新方法》后结合自己的解题经验整理出来的解题四步骤，借本书的出版，推广波利亚解题思想，愿和广大读者一同分享！波利亚解题主要分为以下四个步骤：

第一步，理解题目

根据多年的解题经验，我们都有过这样的感受：我们解一个题目时，一般要花50%～70%的时间用于理解题意上。这就说明理解题目是解题的重要环节，是考验我们思维能力的环节。理解题目，也就是审题，那么理解什么？理解题目后，我们要达到的目标是：弄清楚题目是关于哪方面知识的，未知量是什么，已知数据或条件是什么，这些条件可否直接满足我们的需要，也就是能否直接利用这些数据、条件求出或证明出我们要解决的问题。

第二步，拟定方案

所谓拟定方案，就是我们决定或选择解决问题的策略或决定从什么角度着手，并拟定出具体方案的过程。

可以说能否拟定出解题的方案，是你能否解这个题目的标志。这是列等式，列方程，形成数学模型的过程。

经过第一步认真审题后，我们对题目有了基本的了解，然后解题进入拟定方案环节，一般我们会先思考：已知与未知有什么联系？能否用一些式子表示这些关系？如果这些式子不能求解出待求的未知量或还不能直接找到未知与已知的关系时，我们就会想“之前见过它吗”或者“见过类似的题型吗”。想到这些后，我们会回过头来，继续盯紧我们的目标：求什么？知道什么？这些相关的题目的结论、方法、思维等将会激发我们的灵感（波利亚称为“好的念头”），使我们最终找到解题的方案。

如果经过这样的一番思考，我们仍然无法解决，再回过头仔细审题，是不是哪个概念没有理解透，是不是有些已知条件没有用到等等。再不行，我们就开始考虑引入一些恰当的辅助元（一个图形、一条直线、一个点、一个题目、一条定理或引理、一个数等），引入辅助元后，观察分析新元与已知量之间的关系，然后列出我们的方案。

第三步，执行方案

执行方案是一个数学的计算问题，计算过程中，我们要注意每一步的正确性，当然有些计算还需要一定的技巧性，比如配方法、换元法、消元等，这里不细谈。

第四步，回顾

回顾是一个重要的环节，然而好多学生在解完题后，往往不注重甚至忽略了这个重要环节。波利亚解题“四步表”里边对回顾的要求是：“你能检验这个结果吗？你能检验这个结论吗”、“你能以不同的方式推导这个结果吗”、“你能在别的题目中利用这个结果或这个方法吗”。这些反思很重要，我认为，反思和总结是我们经验形成、能力提高的根本途径，是我们数学思想意识形成的重要手段！

解题不在多而在深，肤浅地解决许多问题，在题海中浮游，就捕捞不到有价值的东西；反之，认真地研究一个问题，深入地钻研进去，就会进入另一番境界；总结出几条可供借鉴的规律，以后若遇到类似的或相近的题目，就不但会解，还可能多方面去解，甚至推而广之，这就是以一当十、以少胜多的奥妙。

高三复习之我见

十二年的寒窗苦读，如今到了最后最关键的一年，如何完成好复习计划将是我们是否取得高考胜仗的主要关键之一。高考是我们人生中的一个重要转折点，因此几乎全社会各个领域的人都或多或少的对它予以关注，我也是其中之一。所以，现就高三的复习谈谈自己的粗略看法，当然这里主要针对于高三数学科的复习，希望能给高三的老师和同学一点参考。

一般我们把高三复习分为三个主要阶段，即三轮。

第一轮复习：

第一轮复习，我们主要的任务是把几本课本 “走”一遍，结合高考考纲，扫描每一个知识点和考点。这个阶段很关键，把第一轮的工作做好，是我们后面复习顺利进展的前提。所以，不得急躁，而应该脚踏实地，把每个知识点落实到位。

第二轮复习：

在第一轮复习之后，我们对整个高中的知识已有了大致的了解，至少有了模糊的整体感，对于高考考什么也有一些了解了。尽管如此，多少还是有些凌乱分散的感觉，接着进入第二轮复习，进一步解决我们的疑惑。第二轮复习，我们主要的任务有三个：1. 把第一轮所复习的内容再整理一遍，使整个高中数学知识得以系统化、网络化，对自己查缺补漏。2. 专项训练。专项训练使得我们对每一块知识点的运用更加熟悉，我们一般分集合、函数、三角函数、向量、不等式、直线与圆、圆锥曲线、立体几何、排列组合、概率统计、导数、复数等，进行专项突破，主要结合典型或代表性题目进行训练。3. 题型分类。在专项训练之后，我们已基本了解各块知识点的考查方式及基本招式，但是用来对付高考，还有一定的距离，因为高考一般不是单独考查某个知识点，而是在知识网络交汇处进行考查。因此，我们需要研究一定量的高考真题，给高考题进行分类，总结每一类题型的特点。一般

思路、一般解法，反思每类题型的命题特点，包括题目难度、考查方式及考查背景等。这也是本书出现的必要性。

第三轮复习：

经过前面两轮的复习，我们对高考各个类型的题目，有了基本的了解，也有了一定的应对策略。在这个基础之上，我们进入第三轮复习的主要任务是模拟高考。按照高考的考查题型和方式，我们由“一类题”走进“一套题”，成套训练，这个过程，我们要达到的目的是调整好答题时间分配、精力的分配、答题顺序的安排及心态的调整，寻找到最适合自己的答题模式。每做完一套题目，我们都要进行反思，反思我们的答题策略，反思哪些题目哪些分应该得到等等。这里需要注意的是，作答每一套题要严格规定和高考一样的时间，因此，要找连续两个小时的时间来做一套题，就如完成一篇作文一样，不得间断性完成。

经过三个轮次复习的轰炸后，我们的复习基本进入尾声了，收尾工作大致分三点：1. 再次回课本，浏览主要公式和结论，回忆每类题型一般用到的基本思想方法，回忆每个典型的解题方法。2. 调整好应考心态，接受“紧张”是正常心理状态，适当的紧张可以让我们最大发挥我们的水平，同时也接受“失眠”也是正常的，要正确看待失眠，失眠基本不影响我们的发挥，但是，如果因为失眠而产生过度的焦虑，甚至给自己“失败”的意念，那将是危险的。你要意识到，你失眠，但是还有很多人像你一样也失眠，你不是孤独的。3. 考前一天做一套中等偏下难度的题目，保持答题的激活状态，注意：达到“激活”作用即可，不必记分。

目录

Contents

第一章　选择题做题技巧　001

一　数学选择题的解题方法　001

二　选择题的几种特色运算　007

三　选择题中的隐含信息之挖掘　009

四　选择题解题的常见失误　011

第一章　习题　013

第二章　填空题做题技巧　016

一　常用的解决方法　016

二　开放型填空题　023

第二章　习题　025

第三章　解答题各类题型总结　026

一　三角函数　026

三角函数习题　033

二　概率统计　040

概率统计习题　047

三　立体几何　053

立体几何习题　062

四　函数　068

函数习题　074

五　解析几何　081

解析几何习题　091

六　数列　097

数列习题　110

附录　高中数学常用公式　116

参考答案　124

后　记　148

第一章 选择题做题技巧

数学选择题在高考试卷中，不但题目多，而且占分比例高(40%)，尽管近几年一些省份试题的题量发生了一些变化，选择题由原来的 12 题改为 10 题，但其分值仍占到试卷总分的三分之一. 数学选择题具有概括性强，知识覆盖面广，小巧灵活等特点，尽管如此，大多还是较基础简单的题，当然有些题也有一定的综合性和深度等特点，考生能否迅速、准确、全面、简捷地解好选择题，成为高考成功的关键，而要解决这个关键，就要求考生有一定的技巧.

解答选择题的基本策略是准确、迅速. 准确是解答选择题的先决条件，选择题不设中间分，一步失误，造成错选，全题无分，所以应仔细审题、深入分析、正确推演、谨防疏漏，以确保准确；迅速是赢得时间获取高分的必要条件，对于选择题的答题时间，应该控制在 45 分钟(具体因人而异)以内，速度越快越好，这里的速度必须是在效率保证下的速度. 高考要求每道选择题在 1～3 分钟内解完，要避免“超时失分”现象的发生.

高考中的数学选择题一般是容易题或中档题，个别题属于较难题，当中的大多数题的解答可用特殊的方法快速选择，也就是所谓的技巧. 解选择题的基本思想是既要看到各类常规题的解题思想，又要看到选择题的特殊性. 数学选择题的四个选择支中有且仅有一个是正确的，因此，在解答时应该突出一个“选”字，尽量减少书写解题过程，要充分利用题干和选择支两方面提供的信息，依据题目的具体特点，灵活、巧妙、快速地选择解法，以便快速智取，这是解选择题的基本策略. 总之，方法是多种多样的，这里介绍几个常用到的方法.

一 数学选择题的解题方法

直接法

就是从题设条件出发，通过正确的运算、推理或判断，直接得出结论再与选择支对照，从而作出选择的一种方法. 运用此种方法解题需要扎实的数学基础，主要针对较简单的选择题.

【例 1】 复数$\frac{2+i}{1-2i}$的共轭复数是 (　　)

A. $-\frac{3}{5}i$　　B. $\frac{3}{5}i$　　C. $-i$　　D. i

【分析】 本题主要考查复数的运算、共轭复数的概念，复数除法实质是分母实数化.

解题思路： 因为$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5i}{5}=i$，所以$\frac{2+i}{1-2i}$的共轭复数为$-i$. 故选 C.

【点拨】 实部相同虚部互为相反数的两个复数互为共轭复数. 本题尽管较简单，但是粗心的考生还是选错 D. 应注意字眼“共轭”.

【例 2】 已知集合 $M=\{x|x^2+x-6<0\}$，$N=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $[1,2)$　　B. $[1,2]$

C. $(2,3]$　　D. $[2,3]$

【分析】 本题考查一元二次方程的解法及集合的运算.

解题思路： 化简集合 $M=\{x|-3<x<2\}$，则 $M\cap N=\{x|1\leqslant x<2\}$，故选 A.

【点拨】 数轴与 Venn 图是解集合问题常用的数形工具，数形结合的思想在数学的解答中占有重要位置，本题在采用数轴法时，要注意端点等号是否可取到.

【例 3】 曲线 $y=\frac{x}{x+2}$在点$(-1,-1)$处的切线方程为 (　　)

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x-1$

C. $y=-2x-3$　　D. $y=-2x-2$

【分析】本题主要考查函数的导数及导数的几何意义的运用.

解题思路:先判断已知点$(-1,-1)$在曲线上,即为切点,对$y=\frac{x}{x+2}$求导得

$y'=\frac{(x+2)-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$,故$y'|_{x=-1}=2$,即切线的斜率为2,从而由点斜式可得切线方程为$y+1=2(x+1)$,化简可得答案A.

【点拨】求过某一点的切线方程时,一定注意该点是不是在曲线上,因为该点可能是切点,也可能不是切点,得出的切线方程就不唯一,要慎重.

【例4】若函数$f(x)=3^x+3^{-x}$与$g(x)=3^x-3^{-x}$的定义域均为$\mathbf{R}$,则　　(　　)

A. $f(x)$与$g(x)$均为偶函数

B. $f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数

C. $f(x)$与$g(x)$均为奇函数

D. $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数

【分析】本题考查函数的奇偶性,考查考生运用函数奇偶性定义的能力.

解题思路:验证$f(-x)=3^{-x}+3^{-(-x)}=f(x)$,$g(-x)=3^{-x}-3^{-(-x)}=-g(x)$,故选B.

【点拨】函数$f(x)$是奇函数与偶函数的前提条件是它的定义域必须关于原点对称,但是不一定是$\mathbf{R}$.$f(-x)=f(x)$,则$f(x)$是偶函数,$f(-x)=-f(x)$,则$f(x)$是奇函数;若奇函数$f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$,则必有$f(0)=0$.

特例法

就是运用满足题设条件的某些特殊数值、特殊位置、特殊关系、特殊图形、特殊数列、特殊函数等对各选择支进行检验或推理,利用问题在某一特殊情况下不真,则它在一般情况下也不真的原理,由此判明选项真伪的方法.比如:题目只说一个三角形,没有特别确定,我们可用等边三角形带入验证;题目只说平行六面体,我们可将正方体带入验证等等.用特例法解选择题时,特例取得愈简单、愈特殊愈好,可起到事半功倍的作用,大大节省了答题时间.

1. 特殊值

【例5】若集合$A=\{x\mid|2x-1|<3\}$,$B=\left\{x\middle|\frac{2x+1}{3-x}<0\right\}$,则$A\cap B$是　　(　　)

A. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{1}{2}\text{或}2<x<3\right\}$

B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<2\right\}$

D. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{1}{2}\right\}$

【分析】本题主要考查考生绝对值不等式、分式不等式及集合的运算.

解题思路:本题较简单,可以用直接法,直接计算出集合A,B再根据集合的运算即可得到答案.这里用特值法比直接法可更快得到答案,C中包含1,但是$1\notin B$,可排除C.A和B包含1.5,但是$1.5\notin B$,可以排除,故选D.

【点拨】特值法尽量带入符合题目要求且所代数值要使得计算简单,且能够排除一些选项,这样,带入的特值才是最有效的,这种特值法可以不用计算就得到答案,大大节省了做题时间.

2. 特殊函数

【例6】对于函数$y=f(x)$,$x\in\mathbf{R}$,"$y=|f(x)|$的图象关于y轴对称"是"$y=f(x)$是奇函数"的　　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不必要也不充分条件

【分析】本题考查函数的奇偶性、图象及充分必要条件.

解题思路:特殊函数$y=x^2$验证,$y=|x^2|$的图象关于y轴对称而$y=x^2$不是奇函数,故不是充分条件;反过来,若$y=f(x)$是奇函数,则$y=|f(x)|$的图象一定关于y轴对称,故选B.

【点拨】熟悉奇函数的图象的性质及充分必要逻辑关系是解本题的关键.

【例7】定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$在$[-3,+\infty)$上为增函数,且$y=f(x-3)$为偶函数,则　　(　　)

A. $f(-8)<f(-4)$　　B. $f(-5)>f(-1)$

C. $f(-6)<f(2)$　　D. $f(-6)<f(-1)$

【分析】本题考查偶函数的图象、定义及图象的平移.

解题思路:题目没有给出函数的具体表达式,而是一个抽象的函数,选一个特殊的且符合题意的函数$f(x)=(x+3)^2$验证即可很快得出答案是C.

【点拨】熟悉二次函数的图象和偶函数图象的特性,并想到特殊的且符合题目要求的函数(不唯一)很关键,本题还可以用函数$y=|x+3|$进行验证.特殊函数一般使用较简单函数.

【例8】已知$x^2+y^2=1$,$a^2+b^2=1$,则$ax+by$的取值范围是　　(　　)

A. $(-2,2)$　　B. $[-1,1]$

C. $(-1,1)$　　D. $[-2,2]$

【分析】本题主要考查函数的值义域.

解题思路：本题若直接消元，将得到一个二元函数，其值域很难求解. 可令 $x=\sin\alpha$，$y=\cos\alpha$，$a=\sin\beta$，$b=\cos\beta$，则 $ax+by=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)\in[-1,1]$，故选 B.

【点拨】 本题由 $x^2+y^2=1$，$a^2+b^2=1$ 联想到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 是解决本题的关键，三角函数代换在数学解题中具有重要作用，联想到熟悉模型可以达到事半功倍的效果.

3. 特殊数列

【例 9】 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$ （　　）

A. 14　　B. 21　　C. 28　　D. 35

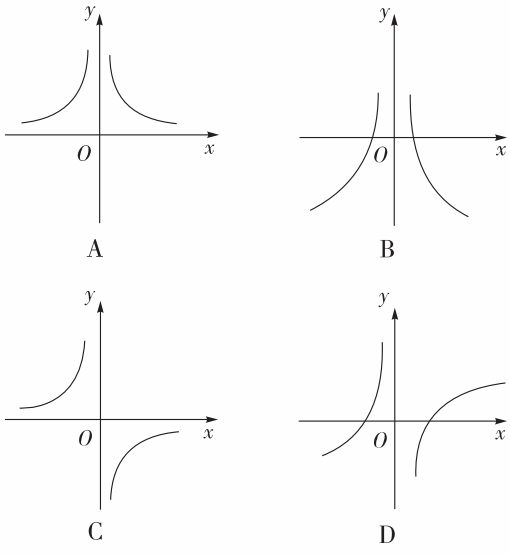
【分析】 本题考查等差数列的性质及其基本运算.

解题思路：本题可以直接由等差数列的公式及性质直接计算出首项和公差，这里不重复. 现在主要讲特值法，选用满足题意的数列 1，2，3，…，易算得 $a_1+a_2+\cdots+a_7=28$.

【点拨】 本题关键在于怎么观察.

4. 特殊位置

【例 10】 函数 $y=\dfrac{\log_2|x|}{x}$ 的大致图象是 （　　）



A　　B

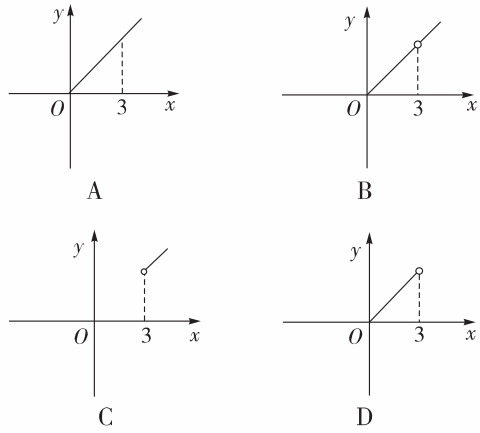
C　　D

【分析】 本题考查函数的图象.

解题思路：本题尽管给出明确的函数解析式，要手工画出其具体图象却非易事，但是我们可以选用特殊点的位置来排除选项而得到准确答案. 令 $x=1$ 得 $y=0$，可排除 A，C；当 x 趋向于无穷大时，$y>0$，排除 B. 故只有 D 选项正确.

【点拨】 特殊点要选取使计算简单且可以排除一定选项的数.

【例 11】 函数 $y=e^{\ln(x-3)}+3$ 的大致图象为（　　）



A　　B

C　　D

【分析】 本题主要考查指数函数及对数函数的性质、图象等.

解题思路：函数的定义域为 $x>3$，故可排除 A，B，D. 选 C.

【点拨】 凡与函数有关的题目，首要考虑函数的定义域，否则研究函数是没有意义的.

5. 特殊方程

【例 12】 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，过点 $E(m,0)(m\neq0)$ 的直线交抛物线于点 M，N，交 y 轴于点 P，若 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NE}$，则 $\lambda+\mu=$ （　　）

A. 1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. -1　　D. -2

【分析】 本题是考查抛物线与直线及向量的相关知识. 本题要是采用直接设直线方程，再联立消元这种方法，将会涉及繁杂的字母运算难题，与算一个大题差不多，致使考生花费了很多时间最后还不一定得出正确答案.

解题思路：直接取 $p=2$，$m=1$，此时 E 为抛物线的焦点，设过焦点的直线方程为 $y=x-1$，联立得 $\begin{cases}y=x-1,\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow x_M=3+2\sqrt{2}$，$y_M=2+2\sqrt{2}$，$x_N=3-2\sqrt{2}$，$y_N=2-2\sqrt{2}$. 又 $E(1,0)$，$P(0,-1)$，所以 $\overrightarrow{PM}=(3+2\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PN}=(3-2\sqrt{2},3-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{ME}=(-2-2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{NE}=(-2+2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$，所以 $\lambda=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{-2-2\sqrt{2}}$，$\mu=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}}\Rightarrow\lambda+\mu=-1$，故选 C.

【点拨】 对于方程中没有限制字母的范围时，可以选较简单的数字代入计算，这样可以使得计算简化，节省大量时间.

6. 特殊模型

【例 13】 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 30，则四面体 AB_1CD_1 的体积是 （　　）

A. 15　　B. 7.5　　C. 10　　D. 6

【分析】 本题主要考查空间几何体的体积，及相关运算. 只知道平行六面体的体积，但没有说明具体是何种平行六面体，因此，可以用一个特殊的长方体代入计算.

解题思路： 如图 1－1.

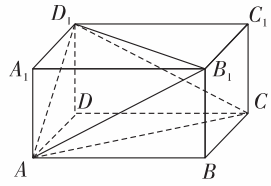


图 1－1

令 $AB=5$，$BC=2$，$CC_1=3$，则四面体 AB_1CD_1 的体积 $V=V_{长方体}-V_{B_1-ABC}-V_{B_1-CC_1D_1}-V_{B_1-AA_1D_1}-V_{A-CDD_1}=30-5-5-5-5=10$，故选 C.

【点拨】 特殊的模型可以使复杂问题简单化，这里之所以不用正方体模型，是因为平行六面体的体积为 30，而 30 开三次方得到一个无理数，这将不利于我们的计算.

图解法

就是利用函数图象或数学结果的几何意义，将数的问题（如解方程、解不等式、求最值、求取值范围等）与某些图形结合起来，利用直观性，再辅以简单计算，确定正确答案的方法. 这种解法贯穿数形结合思想，每年高考均有很多选择题（也有填空题、解答题）都可以用数形结合思想解决，既简捷又迅速. 不过运用图解法解题一定要对有关函数图象、方程曲线、几何图形较熟悉，否则错误的图象反而会导致错误的选择.

【例 14】 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\neq 0, x\in \mathbf{R}\}$，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，若 $f(1)=0$，则满足 $x\cdot f(x)<0$ 的 x 的范围是　　（　　）

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-1,1)$

C. $[-1,1]$　　D. $[-1,0)\cup(0,1]$

【分析】 本题主要考查奇函数的性质、函数的单调性及不等式的求解.

解题思路： 由于函数 $f(x)$ 没有给出具体的表达式，目标不等式无法直接解出，形成思维障碍. 转换思维角度，注意到 $x\cdot f(x)<0$ 表明此函数的自变量与函数值异号，结合题设条件，即可见运用数形结合思想，构造一个符合条件的简单函数的图象（如图 1－2）. 由图象立知，满足 $x\cdot f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,1)$. 故选 A.

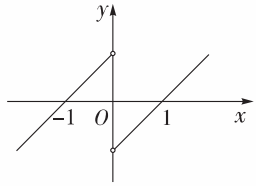


图 1－2

【点拨】 抽象函数问题常采用特例法解，根据题设构造一个最简单的函数即可.

【例 15】 设函数 $f(x)=a+\sqrt{-x^2-4x}$，$g(x)=\frac{4}{3}x+1$，已知 $x\in[-4,0]$ 时，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，则实数 a 的取值范围是　　（　　）

A. $(-3,0)\cup(0,1)$　　B. $(-\infty,-5]$

C. $(-\infty,-5)$　　D. $[-5,0)\cup(0,5]$

【分析】 本题主要考查函数值域与不等式求解恒成立问题. 如果将 $a+\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\frac{4}{3}x+1$ 变形后得到 $a\leqslant-\sqrt{-x^2-4x}+\frac{4}{3}x+1$，后将根据函数值域求解法算出不等式右边的最小值，进而得到 a 的取值范围，这将十分繁杂.

解题思路： $f(x)\leqslant g(x)$，即 $a+\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\frac{4}{3}x+1\Rightarrow\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\frac{4}{3}x+1-a$，观察不等式结构特征，数形结合，可令

$$y_1=\sqrt{-x^2-4x},\qquad①$$

$$y_2=\frac{4}{3}x+1-a,\qquad②$$

由①得 $(x+2)^2+y_1^2=4(y_1\geqslant 0)$，表示以点 $(-2,0)$ 为圆心，2 为半径的半圆；

②式表示斜率为 $\frac{4}{3}$，截距为 $1-a$ 的平行直线系.

显然直线系中与半圆相切的直线 AT（T 为切点）即为所求临界值. 如图 1－3，设直线 AT 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{4}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$. 在 $\triangle BO'T$ 中，$|O'B|=\frac{|O'T|}{\sin\alpha}=\frac{5}{2}$，$\therefore|OB|=\frac{9}{2}$.

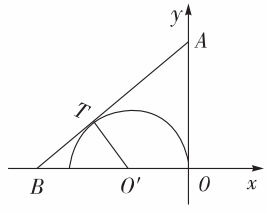


图 1－3

在 $\triangle AOB$ 中，$OA=|OB|\cdot\tan\alpha=\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}=6$.

要使 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，直线必须位于 AT 上方或与 AT 重合，

$\therefore 1-a\geqslant 6$，$a\leqslant-5$，故选 B.

【点拨】 根据方程结合图形，可以很快得到正确的答案，有些方程或不等式需要一定的整理变形后方可进行数形结合.

验证法

就是将选择支中给出的答案或其特殊值，代入题

干逐一去验证是否满足题设条件，然后选择符合题设条件的选择支的一种方法. 在运用验证法解题时，若能据题意确定代入顺序，则能较大提高解题速度. 验证方法一般是应用于“顺”着解较麻烦的题目，直接将选项中的答案代入进行验证，符合题意的选择，不符合题意的排除.

【例 16】 已知函数 $f(x)=\log_2|ax-1|(a\neq 0)$ 满足关系式 $f(-2+x)=f(-2-x)$，则实数 a 的值是 （　　）

A. 1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. -1

【分析】 本题对数函数的运算，尽管属于中档偏下题，但直接解耗时间较多，因此不妨由选项逆代验证.

解题思路： 将 $a=1$ 代入，得 $f(-2+x)=\log_2|(-2+x)-1|=\log_2|-3+x|$，$f(-2-x)=\log_2|(-2-x)-1|=\log_2|3+x|\neq f(-2+x)$，A 排除. 将 $a=-\frac{1}{2}$ 代入得 $f(-2+x)=\log_2\left|-\frac{1}{2}(-2+x)-1\right|=\log_2\left|\frac{x}{2}\right|$，$f(-2-x)=\log_2\left|-\frac{1}{2}(-2-x)-1\right|=\log_2\left|\frac{x}{2}\right|=f(-2+x)$，故选 B.

【点拨】 逆代验证体现出选择题的“选”字. 不需要进行严格的逻辑思维证明就可以排除错误的选项. 这种思想在考试中经常运用.

【例 17】 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=1$，$a_3\cdot a_8=2a_5^2$，则 $a_1=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【分析】 本题主要考查等比数列的性质. 较简单，可直接解答. 但是直接验证可以更快得到答案，损耗精力较少，为后面的难题保存更多的精力.

解题思路： $a_3\cdot a_8=2a_5^2\Rightarrow a_2q\cdot a_2q^6=2(a_2q^3)^2\Rightarrow q=2$，已知 $a_2=1$，故 $a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{1}{2}$，故选 A.

【点拨】 灵活运用公式 $a_n=a_mq^{n-m}$ 是解本题的关键.

筛选法

也叫排除法、淘汰法，就是充分运用选择题单选题的特征，即有且只有一个正确选项这一特性，从选项入手，根据题设条件与各选选项之间的关系，通过分析、推理、计算、判断，对选项进行筛选，将其中与题设相矛盾的干扰项逐一排除，从而获得正确结论的方法. 使用筛选法的前提是“答案唯一”，即四个选项中有且只有一个答案正确.

【例 18】 不等式 $|2x-1|<|x-2|$ 的解集为 （　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

B. $(-1,1)$

C. $(0,1)$

D. $(-1,0)$

【分析】 本题主要考查含绝对值不等式的求解. 可以用常规方法，即不等式里边同时平方后解关于 x 的一元二次不等式.

解题思路： 将 $x=2$ 代入有 $3<0$，排除 A. $x=0$ 带入得 $1<2$ 正确，排除 C，D，故选 B.

【点拨】 代入的数据一般以简单且可以排除一定选项为原则，所以应该观察对比个选项之间的区别于联系，盲目代入可能做无用功.

【例 19】 函数 $f(x)=(x-1)^2+1(x<1)$ 的反函数为 （　　）

A. $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}(x>1)$

B. $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}(x>1)$

C. $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$

D. $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$

【分析】 本题主要考查求函数反函数及原函数与反函数之间的联系.

解题思路： 原函数的函数值大于 1，故反函数的定义域大于 1，排除 C，D，原函数的定义域小于 1，故反函数值义域小于 1，排除 A，故选 B.

【点拨】 原函数的值域就是反函数的定义域，原函数的定义域是反函数的值域，这是原函数与反函数密切联系的桥梁.

分析法

就是对有关概念进行全面、正确、深刻的理解或对有关信息提取、分析和加工后而作出判断和选择的方法. 这个方法一般不用太多的计算即可排误选正，但是要求更高的思维.

1. 特征分析法

根据题目所提供的信息，如数值特征、结构特征、位置特征等，进行快速推理，迅速作出判断的方法，称为特征分析法.

【例 20】 “$|x-1|<2$”是“$\frac{x}{x-1}<0$”的 （　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【分析】本题考查绝对值不等式和分式不等式及充分必要的相关知识.

解题思路:令 $p:|x-1|<2$,$q:\frac{x}{x-1}<0$,由 $x=1$ 知 $p\not\Rightarrow q$;$\frac{x}{x-1}<0\Rightarrow 0<x<1\Rightarrow -1<x-1<0\Rightarrow |x-1|<1<2$,故 $q\Rightarrow p$,所以选 B.

【点拨】命题之间的充分必要逻辑关系题属于简单送分题,同时也是容易丢分题,做这类题时要注意题中的字眼.

【例 21】在 $\triangle ABC$ 中,若 $0<\tan A\tan B<1$,则 $\triangle ABC$ 的形状是 (　　)

A. 钝角三角形　　B. 锐角三角形

C. 直角三角形　　D. 不能确定

【分析】本题主要考查三角函数的运算能力.

解题思路:令 $\angle A=\angle B=30°$,这 $\tan A\cdot\tan B=\frac{1}{3}\in(0,1)$,排除 B,C,故选 A.

【点拨】按角的大小分类,三角形只能分为钝角三角形、直角三角形和锐角三角形三类.

【例 22】已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$,$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$,则 $\tan\frac{\theta}{2}$ 等于 (　　)

A. $\frac{m-3}{9-m}$　　B. $\left|\frac{m-3}{9-m}\right|$

C. $\frac{1}{3}$　　D. 5

【分析】本题主要考查三角函数的性质.

解题思路:由于受条件 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 的制约,故 m 为一确定的值,于是 $\sin\theta$,$\cos\theta$ 的值应与 m 的值无关,进而推知 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值与 m 无关.又 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\tan\frac{\theta}{2}>1$,故选 D.

【点拨】三角函数公式多,因此三角函数题灵活多样,技巧性较多.适当多做些题目才能摸索出出题者一般的出题特点.

2. 逻辑分析法

通过对四个选项之间的逻辑关系的分析,达到排除错误选项,选出正确选项的方法,称为逻辑分析法.适用于题目提供信息较少或者只能从选项中下手的题目.题目中的选项之间存在矛盾.

【例 23】已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<1\}$,$N=\{-1,0,1\}$,则集合 M 与 N 之间的关系 (　　)

A. $M\in\mathbf{N}$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\supseteq N$　　D. $M=N$

【分析】本题主要考查集合之间的运算及集合符号的使用.

解题思路:B 与 C 是一对互相矛盾命题,故可排除 A,D.又因为 $1\notin M$,故 $M\subseteq N$,选 B.

【点拨】这里所说的互相矛盾是指一种“非此即彼”的对立性,而不仅是“互斥”的命题,一定要当某两个选项对立时才能排除另外两个选项,而某两个选项仅是互斥时,不能排除另外两个选项.比如:当有两个选项分别为“$x\leqslant 1$”和“$x\geqslant 1$”时可以排除另外两个选择;而若是“$x<1$”和“$x>1$”则此时不能排除另两项,因为可能还有 $x=1$ 的情形.

估算法

就是把复杂问题转化为较简单的问题,求出答案的近似值,或对于数值较烦琐,把有关数值扩大或缩小,从而对运算结果确定出一个范围或作出一个估计,进而作出判断的方法.这类题目近年来出现的频率越来越低了.

【例 24】农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成.2003 年某地区农民人均收入为 3 150 元(其中工资性收入为 1 800 元,其他收入为 1 350 元),预计该地区自 2004 年起的 5 年内,农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长,其他收入每年增加 160 元.根据以上数据,2008 年该地区人均收入介于 (　　)

A. 4 200 元～4 400 元　　B. 4 400 元～4 460 元

C. 4 460 元～4 800 元　　D. 4 800 元～5 000 元

解题思路:2008 年农民人均工资性收入为:

$1\,800(1+0.06)^5\approx 1\,800(1+5\times 0.06)=2\,340$.

又 2008 年农民人均其他收入为 $1\,350+160\times 5=2\,150$,故 2008 年农民人均总收入约为 $2\,340+2\,150=4\,490$(元),故选 C.

【点拨】本例中用到了公式 $(1+x)^n\approx 1+nx$(x 趋于 0).

观察法

这里所谓的观察法和一些资料里边的观察法是有所区别的,其他资料提到的观察一般是观察选项答案之间的关系,经过分析整合后推出答案,而这里的观察法是指:当答完所有选择题后,如果还有一个到两个确实找不出头绪或者很麻烦时,从考场上时间就是分数的意识来说,考生不值得大花时间在这一两个选择题上,特别对于只有一个不知如何下手时,只需观察自己已答题情况,如选 A 的只有 1 个,那么直接蒙 A 了,高

考各省选择题(特别数学科)答案一般各选项较平衡.使用这个方法管用的前提条件是考生已答完的题目正确率要高,只有这样才能保证“蒙”的正确率.

【说明】1.解选择题的方法很多,上面仅列举了几种常用的方法,这里由于限于篇幅,其他方法不再一一举例.需要指出的是对于有些题在解的过程中可以把上面的多种方法结合起来进行解题,会使题目求解过程简单化.

2.对于选择题一定要小题小做,小题巧做,切忌小题大做.“不择手段,多快好省”是解选择题的基本宗旨.

二 选择题的几种特色运算

借助图形或结论——速算

【例 25】已知平面 α 截一球面得到圆 M,过圆心 M 且与 α 成 $60°$ 二面角的平面 β 截该球面得到圆 N.若该球面的半径为 4,圆 M 的面积为 4π,则圆 N 的面积为 (　　)

A. 7π　　B. 9π　　C. 11π　　D. 13π

【分析】本题为球与平面及圆的综合性题目,要求考生具有一定的空间想象能力和画图能力.

解题思路:画出经过球心 O 的大圆平面图(如图 1—4).

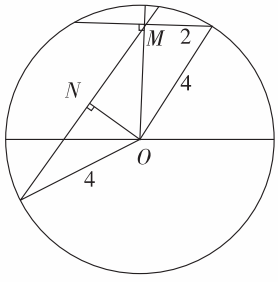


图 1—4

设圆 N 半径为 r,可以算得圆 M 半径为 2,所以 $OM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.而 $\angle OMN=30°$,所以 $ON=OM\cdot\sin 30°=\sqrt{3}$,故 $r=\sqrt{4^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$,所以与圆 N 面积为 13π,故选 D.

【点拨】在研究立体几何问题时,经常画出截面来研究,从研究立体转到熟悉的平面上进行解决.本题画出截面图是一大关键点.

借用选项——验算

【例 26】下列函数中,既是偶函数,又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 (　　)

A. $y=\frac{1}{x^2}+1$　　B. $y=-x\ln x$

C. $y=e^x+e^{-x}$　　D. $y=\frac{\sin x}{x}$

【分析】本题考查偶函数及函数的单调性.

解题思路:B 选项不是偶函数,可排除.D 选项在 $(0,+\infty)$ 上不单调,排除.C 选项在 $(0,+\infty)$ 上递增,排除.故选 A.

【点拨】带入验证时,先将简单易算的或者熟悉的选项验算.熟悉各种函数的图象,在解题中数形结合可大大提高解题速度.

极限思想——不算

用此方法时,要小心,它是一把双刃剑,极限思想也称极端思想,用错了也会得到错误的甚至相反的答案.

【例 27】不等式 $\left|\frac{x-2}{x}\right|>\frac{x-2}{x}$ 的解集是 (　　)

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

【分析】本题考查含绝对值分式不等式的解.

解题思路:观察选项,可以将 12 代替正无穷带入不等式,易知不等式不成立,排除 C,D.将 -8 代替负无穷带入易知不等式不成立,排除 B,故选 A.

【点拨】极端思想实际上也是一种特值法,采用极端法(极限法)时,要极端得合理.不得滥用.

平面辅助——巧算

【例 28】在坐标平面内,与点 $A(1,2)$ 距离为 1,且