

學殼與板

TIMOSHENKO 著

王 俊 奎 譯

商 務 印 書 館



學 殼 與 鈹

著 柯 生 木 鐵
譯 奎 俊 王

本書係根據鐵木生柯 (Timoshenko) 著“板與殼學”(Theory of Plates and Shells) 1940 年第一版譯出。原書是結構力學方面的名著，曾被譯成俄文等六、七種文字。內容包括薄板與薄殼兩部分。薄板這一部分又分成條形板、矩形板、圓形板、扇形板以及其他雜形板等；薄殼則分為筒形殼、球形殼等若干不同的類型。每章都先概括地講述板殼問題的基本理論和有關的數學方程式，對於某些較為複雜的情形，則將所有必需的演算和解釋一一列出，免去讀者自行摸索的困難。這本書的優點是內容豐富，講解清楚，可作為航空學院學生以及航空工程師們的參考書。

板 與 殼 學

王 俊 奎 譯

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷

◆ (68744)

開本 860×1188—1/32 印張 14 字數 367,000

1954年10月初版 印數 1—1,500 定價 洋 30,000

原 序 (摘要)

在許多工程結構上，鈹與殼特別有用。受有水壓作用的船身鋼鈹，受有側向載荷的混凝土板和鋼筋混凝土板，以及受有內壓力或外壓力作用的穹窿、薄壁箱和各種形狀的容器，都是顯明的例子。有關圓形鈹彎曲的各種問題或者有關錐形殼和球形殼的彎曲問題，常遇在蒸汽鍋爐、火車發動機和汽輪機的設計上。特別是近幾年來，薄殼結構在新式飛機結構的發展上有着廣闊的應用。

在所有物體的一度比其餘二度為小的情形下，其求應力和撓度的問題就能夠化簡，並且各種近似的分析法已經被推演出來。這本書主要是討論這些方法的。

這書的對象，主要是為設計薄壁結構的工程師們而寫的。因為有了這樣明確的應用目標，則薄鈹一般理論的討論，將減至最小的限度，而絕大部分的篇幅，將專作特殊問題的研究。這些問題的處理，不限定於通解的求出，將是在許多情形中，對於不同大小的鈹和不同載荷的條件，作出了完整的數字計算，並且準備成表的形式將撓度和應力的數值予以列入。

在此書中那裏需要深一些的數學時，即在該處作一適當的解釋。為使讀此書簡便起見，雖有些部分是很重要，但在第一次讀時是可以省略掉的材料，則印成小形字。在讀完重要部分後，讀者可以返回頭來再研究這些尚未讀過的東西。

在此書中也給了許多有關討論鈹和殼彎曲問題的參考文獻。這些文獻對於仔細研究某些特殊問題的工程師可能是有用的。它們也給出鈹與殼在近代理論發展上的輪廓，這可能對於正計劃在這一領域內作研究工作研究生們將有莫大的裨益。

符 號 解 釋

- x, y, z 直角座標
 r, θ 極座標
 r_x, r_y 板中間面順次在 xz 和 yz 面上的曲率半徑
 h 板或殼的厚度
 q 連續分佈載荷的強度
 p 壓力
 γ 每一單位體積的重量
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 與 x, y 和 z 軸平行的正交分應力
 σ_n 與 n 方向平行的正交分應力
 σ_r, σ_θ 在極座標中沿半徑方向和切線方向的正交應力
 τ 剪應力
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 在直角座標中的剪分應力
 u, v, w 分位移
 ε 單位伸長
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 在 x, y 和 z 方向的單位伸長
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ 在極座標中沿半徑方向和切線方向的單位伸長
 $\varepsilon_\phi, \varepsilon_\psi$ 殼順次在子午線方向和平行圓方向的單位伸長
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 在直角座標中剪分應變
 $\gamma_{r\theta}$ 在極座標中的剪應變
 E 拉或壓彈性係數
 G 剪彈性係數
 ν 柏生比
 V 應變能
 D 板的撓曲勁度
 M_x, M_y 板順次在垂直 x 和 y 軸二截面上每一單位長的彎矩
 M_{xy} 板在垂直 x 軸截面上每一單位長的扭矩
 M_n, M_{nt} 板在垂直 n 方向截面上每一單位長的彎矩和扭矩

- Q_x, Q_y 板順次在垂直 x 和 y 軸二截面每一單位長上平行 z 軸的剪力
 Q_n 板在垂直 n 方向截面每一單位長上平行 z 軸的剪力
 N_x, N_y 板順次在垂直 x 和 y 軸二截面上每一單位長的正交力
 N_{xy} 板在垂直 x 軸的截面每一單位長上平行 y 軸的剪力
 r_1, r_2 旋轉面形殼順次在子午線面和垂直子午線面的曲率半徑
 χ_ϕ, χ_θ 板順次在子午線面和垂直子午線面上曲率的變化
 $\chi_{\theta\phi}$ 殼的扭轉
 $N_\phi, N_\theta, N_{\phi\theta}$ 殼在主要正交截面上每一單位長的薄膜力
 M'_θ, M_ϕ 殼順次在子午線截面和垂直子午線截面上每一單位長的彎矩
 χ_x, χ_ϕ 筒形殼順次在軸面和垂直軸面上的曲率變化
 $N_\phi, N_x, N_{x\phi}$ 筒形殼的軸截面和垂直於軸的截面上每一單位長的諸薄膜力
 M_ϕ, M_x 筒形殼順次在軸截面和垂直於軸的截面上每一單位長的彎矩
 $M_{x\phi}$ 筒形殼在軸截面上每一單位長的扭矩
 Q_ϕ, Q_x 筒形殼順次在軸截面和垂直軸截面每一單位長上平行 z 軸的二剪力

目次

原序	i
符號解釋	ii

第一章 條形板變成筒形面的彎曲

1. 板成筒形彎曲的微分方程式	1
2. 矩形板有均勻載荷和簡支邊的筒形彎曲	3
3. 矩形板有均勻載荷和固定邊的筒形彎曲	9
4. 矩形板有均勻載荷和彈性固定邊的筒形彎曲	16
5. 在板平面內長邊緣的微小位移對於應力和撓度的影響	18
6. 計算參數 u 的近似法	21
7. 有最初微小筒形曲率的均勻載荷條形板	25
8. 彈性支基板的筒形面彎曲	27

第二章 板的純彎曲

9. 微小彎曲的板的傾度與曲率	31
10. 在板受純彎曲時諸彎矩與曲率的關係	35
11. 純彎曲的特殊情形	41
12. 板受純彎曲的應變能	44
13. 已推演諸公式在應用上的限制	45
14. 平夾邊板的熱應力	47

第三章 圓形板的對稱彎曲

15. 側向載荷圓形板有對稱彎曲的微分方程式	50
16. 均勻載荷圓形板	53
17. 中心有圓孔的圓形板	57
18. 同心圓載荷的圓形板	63

19. 中心載荷圓形板	67
20. 圓形板在對稱彎曲的初等理論的修正	72

第四章 側向載荷板的微小撓度

21. 撓度面的微分方程式	78
22. 邊界條件	81
23. 推演邊界條件的不同方法	87
24. 板的彎曲問題化成薄膜的撓度問題	91
25. 板的精確理論	96

第五章 簡支矩形板

26. 簡支矩形板和正弦曲線載荷	108
27. 對簡支矩形板的納威耳解	106
28. 應變能法在計算撓度上的應用	109
29. 對於簡支均勻載荷矩形板的另一解	113
30. 承受靜水壓力的簡支矩形板	121
31. 三稜形載荷的簡支矩形板	130
32. 部分載荷的簡支矩形板	133
33. 集中載荷的簡支矩形板	143
34. 無限長度的簡支矩形板	152
35. 簡支矩形板的熱應力	160
36. 有限差分方程式在簡支矩形板的彎曲的應用	163
37. 非等性板的彎曲	170
38. 變厚矩形板	176

第六章 各種邊緣情形的矩形板

39. 沿矩形板邊緣有力矩分佈的彎曲	181
40. 一對相對簡支邊和另一對平夾邊的矩形板	186
41. 三邊簡支和一邊固定的矩形板	193
42. 二相對邊簡支第三邊自由和第四邊固定或簡支的矩形板	196
43. 二相對邊簡支和二相對邊彈柱支的矩形板	200
44. 四個固定邊緣的矩形板	203

45. 連續矩形板	212
46. 有數等距柱相支板的彎曲	218
47. 彈性支基板的彎曲	227

第七章 雜形板

48. 用極座標表示板的彎曲的方程式	235
49. 有直線變化載荷的圓形板	238
50. 有集中載荷的圓形板	243
51. 沿邊界有數支點的圓形板	246
52. 扇形板	248
53. 有彈性支基圓形板的彎曲	250
54. 非等厚圓形板	257
55. 圓形板彎曲的非直線問題	261
56. 橢圓板	263
57. 三角形板	266

第八章 板受側向載荷和中間面上力的合併作用的彎曲

58. 撓度面的微分方程式	272
59. 受均勻側向載荷與均勻拉力合併作用的簡支矩形板	274
60. 能量法的應用	275
61. 受有側向載荷和板中間面上諸力合併作用的簡支矩形板	278
62. 臨界力的計算方法	282
63. 與壓力方向垂直的二相對邊爲簡支和其他二邊爲各種邊緣情形的均勻受壓 矩形板的發皺	285
64. 受壓固定邊緣矩形板的發皺	290
65. 圓形板和橢圓板的發皺	292
66. 微小初曲率板的彎曲	295

第九章 板的大形撓度

67. 沿邊緣有均勻分佈力矩圓形板的彎曲	299
68. 均勻載荷圓形板有大形撓度的近似公式	303
69. 均勻載荷和平夾邊緣圓形板的精確解	307
70. 大形撓度板的通用方程式	310

71. 均勻載荷矩形板的大形撓度	315
------------------	-----

第十章 殼不彎曲的變形

72. 定義和符號	319
73. 旋轉面形殼並有對軸為對稱的載荷	328
74. 旋轉面形殼的特殊情況	325
75. 等值強度殼	332
76. 對稱載荷旋轉面形殼的位移	335
77. 非對稱載荷的旋轉面形殼	338
78. 由風壓所產生的應力	339
79. 支有若干點的球形殼	343
80. 筒形殼的薄膜理論	346

第十一章 筒形殼的一般理論

81. 對筒軸為對稱載荷的圓筒殼	352
82. 圓筒殼在對稱變形的特殊情形	358
83. 受壓容器	367
84. 等壁厚的筒形箱	371
85. 非等壁厚的筒形箱	374
86. 筒形殼的熱應力	381
87. 非脹大變形的圓筒殼	385
88. 筒形殼變形的一般情形	391
89. 支邊筒形殼	397
90. 一筒形殼截體的撓度	400
91. 筒形殼彎曲的近似分析	402

第十二章 旋轉面形殼和受有對殼軸為對稱的載荷

92. 平衡方程式	406
93. 化平衡方程式為二個二次微分方程式	410
94. 等厚球形殼	413
95. 球形殼應力分析的近似法	420
96. 錐形殼	427
97. 旋轉面形殼的一般情形	432

鈑與殼學

第一章 條形鈑變成筒形面的彎曲

1. 鈑成筒形彎曲的微分方程式 首先用條形鈑彎曲的簡單問題，即沿鈑長受有不變正交載荷的鈑作鈑彎曲理論的開端。這樣鈑在離二端①相當大的距離以外的部份，其撓度面可以假設是筒形的，並且筒軸與鈑長相平行。因此這個問題可用相距為一單位長且與鈑長相垂直的二平行面由這鈑上截取一單元條而僅僅研究其彎曲即可。這一單元條的撓度可用與彎曲梁的撓度方程式相似的微分方程式表示之。

如求這撓度的方程式，可討論一厚度為 h 的等厚鈑，並且取 xy 平面為鈑在載荷前的中間面，即在鈑二表面中間的平面。命 y 軸與鈑的一個長邊緣相密合，並且命 z 軸的

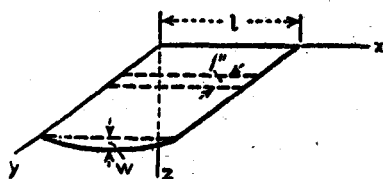


圖 1

正方向向下如圖 1 所示者。如果用 l 表示鈑的寬度，那麼這個單元條可以視作是長為 l 深為 h 和橫截面為矩形的桿。在計算這樣桿的彎曲應力時，可如普通梁的理論，假設桿的橫截面在彎曲時仍保持為平面並且它們僅對它們的中立軸作旋轉。如果沒有正交力作用於桿的兩端橫截面上時，則桿的中立面將與鈑的中間面相密合，並且與 x 軸平行的纖維的單位伸長將與由中間面的距離 z 成正比。這撓度曲線的曲率可以取作等於 $-d^2w/dx^2$ ；式中 w 是桿在 z 方向的撓度並且與桿長 l 相比較

① 為使鈑的最大應力與無限長度鈑的最大應力相近似時，其長與寬的關係將在以後討論之，參看第 118 頁和 123 頁。

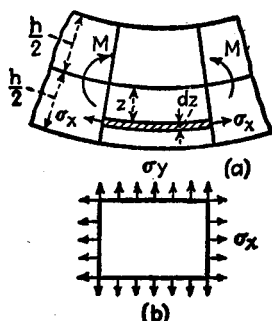


圖 2

可假設是一小值。因此在離中間面有 z 距離的纖維(圖 2)的單位伸長 ε_x 為 $-z d^2 w / dx^2$ 。

如應用虎克定律,則單位伸長 ε_x 和 ε_y 由那作用在第 2a 圖所示單元體上正交應力 σ_x 和 σ_y 的項表示時為

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 E 為材料的彈性係數, ν 為柏生比。由於保持板在彎曲時的連續性,則在 y 方向的側向應變一定等於零,因此方程式(1)中的第二式化為 $\sigma_y = \nu \sigma_x$ 。將此值代入第一式則得

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu^2)\sigma_x}{E}$$

和

$$\sigma_x = \frac{E \varepsilon_x}{1-\nu^2} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2)$$

如板在 x 方向承受拉力或壓力的作用並且沿板的長邊是均勻分佈時,則相當的正交應力必須與由彎曲所得的應力(2)相加。

如已知彎曲應力 σ_x 的式子,則由積分可知這單元條所承受的彎矩為:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E z^2}{1-\nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \, dz = - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

引用符號

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = D, \quad (3)$$

則這單元條的撓度曲線方程式可表如下列形狀:

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad (4)$$

式中 D 與梁情形中的 $E I$ 相當,叫作板的撓曲勁度。這個方程式與梁

的撓度微分方程式具有同樣形式。顯然這個鋁的撓度的計算變成了方程式(4)的積分。如果僅有側向載荷作用在這鋁上，並且在撓度出現時，相對邊能夠自由的彼此漸近，則表示彎矩 M 的式子可以立刻作出，並且撓度曲線可由方程式(4)的積分得之。實際這個問題是比較複雜的，因為這鋁往往是與邊界相連，其邊緣不能自由移動。這樣支的方法將使鋁在彎曲時，沿這些邊緣上立刻發生了伸張反作用力。這些反作用力將隨撓度的大小而變，並且影響了方程式(4)中的彎矩 M 。這個問題化成研究單元條受有側向載荷和軸向力的問題並①且軸向力的大小將依該條的撓度而變。下邊將討論這樣問題為鋁受有均勻載荷和各種邊界條件的特殊情形。

2. 矩形鋁有均勻載荷和簡支邊的筒形彎曲 今討論一均勻載荷的條形鋁；當鋁彎曲時其長邊可以自由旋轉，但不能彼此相向移動。由這鋁上截取一單元體如第一圖所示者則得一承受均勻載荷和軸向力 S 作用(圖3)

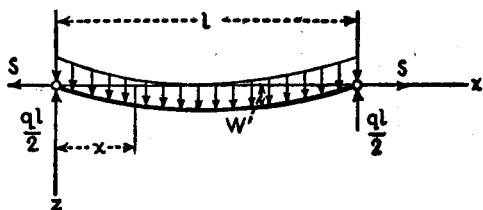


圖 3

的桿而 S 力的大小恰使桿的二端不能在 x 軸的方向移動。用 q 表示均勻載荷的強度，則此單元條在任何橫截面上的彎矩為

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw.$$

代入方程式(4)，則得

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sw}{D} = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D}. \quad (a)$$

① 這問題化成這樣的形式首先為 I. G. Boobnov 所討論過；參考 *Trans. Inst. Naval Arch.*, 第44卷，第15頁，1902年和“*Theory of Structure of Ships*”，第2卷，第545頁，聖彼得堡，1914年。亦可參考 Stewart Way 的論文，*The National Meeting of Applied Mechanics*, A.S.M.E., New Haven, 六月，1932年；第2和第3節所用的曲線即由此論文中所取者。

引用符號

$$\frac{S l^2}{D 4} = u^2, \quad (5)$$

則方程式 (a) 的通解可寫如下列形式:

$$w = C_1 \sinh \frac{2ux}{l} + C_2 \cosh \frac{2ux}{l} + \frac{ql^3 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D}. \quad (b)$$

這積分常數 C_1 與 C_2 可由兩端的條件決定之。因為在這單元條兩端其撓度為零, 所以

$$\text{當 } x=0 \text{ 和 } x=l \text{ 時, } w=0 \quad (c)$$

將這表示 w 的 (b) 式代入, 則由上二條件得到

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^4 D} \frac{1 - \cosh 2u}{\sinh 2u}, \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^4 D};$$

並且 (b) 式化成

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left(\frac{1 - \cosh 2u}{\sinh 2u} \sinh \frac{2ux}{l} + \cosh \frac{2ux}{l} - 1 \right) + \frac{ql^3 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D}.$$

將下式

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u, \quad \sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u,$$

$$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u,$$

代入, 則此式可化成下邊較簡單的形狀:

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left(\frac{-\sinh u \sinh \frac{2ux}{l} + \cosh u \cosh \frac{2ux}{l}}{\cosh u} - 1 \right) + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} (l - x)$$

或

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left[\frac{\cosh u \left(1 - \frac{2x}{l} \right)}{\cosh u} - 1 \right] + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} (l - x). \quad (6)$$

所以單元條的撓度依照數量 u 而變, 而由方程式 (5) 可知 u 之值又是

軸向力 S 的函數。直到這裏，這個力還是一個未知數，並且可由單元條(圖 3)二端沿 x 軸方向不能移動的條件決定之。所以軸向力 S 使單元條所產生的伸長是等於沿撓度曲線的弧長與原長 l 之差。對於微小撓度這個差可由下公式^①表示之：

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (7)$$

在計算這單元條由力 S 所產生的全伸長時，可取用方程式(2)，並且假設在 y 方向的側向應變是受限制的。所以

$$\lambda = \frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (d)$$

將表示 w 的(6)式代入並積分之，則得下列計算 S 的方程式：

$$\frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{q^2 l^7}{D^2} \left(\frac{5}{256} \frac{\tanh u}{u^7} + \frac{1}{256} \frac{\tanh^2 u}{u^6} - \frac{5}{256 u^6} + \frac{1}{384 u^4} \right);$$

或由方程式(5)的 $S = 4u^2 D / l^2$ 和方程式(3)的 D 值代入之，最後可得方程式

$$\frac{E^2 h^8}{(1-\nu^2)^2 q^2 l^8} = \frac{135}{16} \frac{\tanh u}{u^9} + \frac{27}{16} \frac{\tanh^2 u}{u^8} - \frac{135}{16 u^8} + \frac{9}{8 u^6}. \quad (8)$$

對於已知材料已知 h/l 比和已知載荷 q ，這方程式的左邊可以立刻計算出來，並且適合這方程式的 u 值，可以用試驗校正法求之。如欲簡化這個解，圖 4 中所示的曲線可以採用之，這曲線的橫座標代表 u 值，縱座標代表數值 $\log_{10}(10^4 \sqrt{U_0})$ 。這個符號 U_0 表示方程式(8)右端的數值。這 $\sqrt{U_0}$ 很容易由鈹的常數與載荷計算之；並且引用因數 10^4 而使對數之值為正。在每一特別情形下，先計算方程式(8)內右端的開平方等於 $\frac{E h^4}{(1-\nu^2) q l^4}$ 則得 $\sqrt{U_0}$ 。那麼數量 $\log_{10}(10^4 \sqrt{U_0})$ 給出圖 4 的縱座標，並且由這曲線可得出相當的 u 值。已知 u 值，則軸向力 S 可由方程式(5)求之。

在計算應力時，須知在這單元條的任何橫截面上，其總應力包括

① 參考著者的“材料力學”第 1 卷，第 88 頁，1980 年。

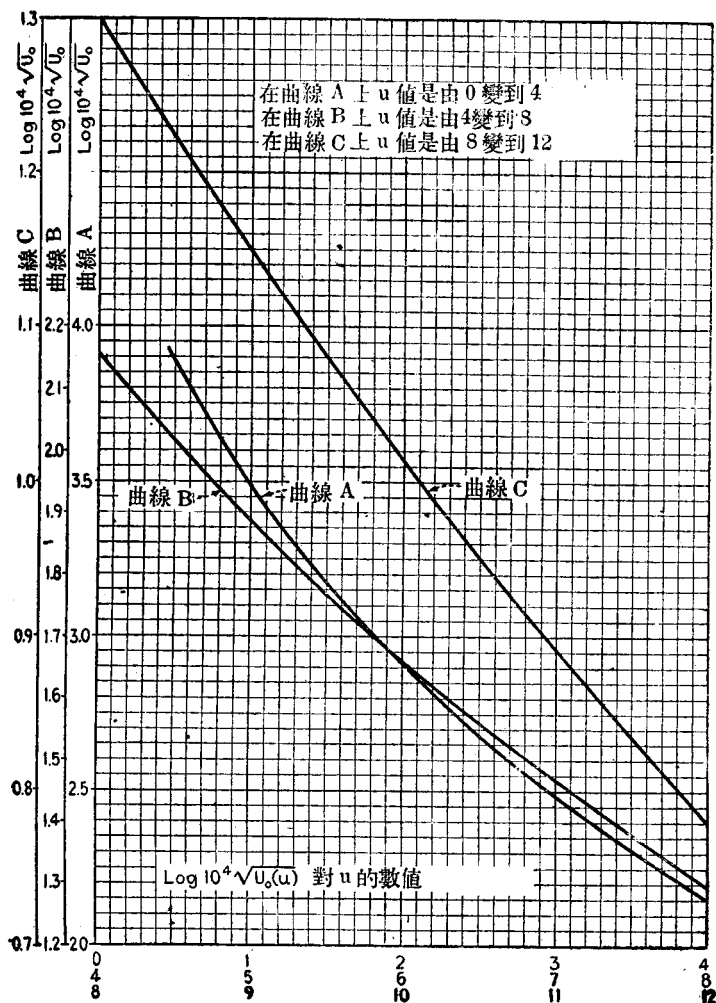


圖 4

彎曲應力和拉應力。這彎曲應力與彎矩成正比，而這拉應力的大小為 $\frac{S}{h}$ 並且沿條長是一常值。最大應力發生在單元條的中間，因為中間的彎矩為最大。由微分方程式 (4)，則知最大彎矩為

$$M_{\max} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}}.$$

代入(6)式的 w 值, 則得

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \psi_0(u), \quad (9)$$

式中

$$\psi_0 = \frac{1 - \operatorname{sech} u}{\frac{u^2}{2}}. \quad (10)$$

ψ_0 的數值為如圖 5 的曲線所給者, 顯然當 u 值增加時, 這些數值很快的減小, 並且當 u 值是較大值時, 這最大彎矩值比單元條二端沒有伸張反作用力時的彎矩值 $ql^2/8$ 小了好幾倍。

這正向拉應力 σ_1 和最大彎曲應力 σ_2 可以立刻用 u , q 和鋁常數的項表示之為

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2 D}{hl^2} = \frac{Eu^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l} \right)^2; \quad (11)$$

$$\sigma_2 = \frac{6}{h^2} M_{\max} = \frac{3}{4} q \left(\frac{l}{h} \right)^2 \psi_0. \quad (12)$$

那麼鋁所承受的最大應力為

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

如欲說明如何取用圖 4 和圖 5 的曲線來計算最大應力時, 可取一數目字的例子; 即取一條形鋁, 其寬是 50 吋其厚是 $\frac{1}{2}$ 吋並且受有均勻載荷 $q=20$ 磅/吋。今先計算 $\sqrt{U_0}$:

$$\sqrt{U_0} = \frac{E}{(1-\nu^2)q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 = \frac{30 \cdot 10^6}{(1-0.3^2)20} \frac{1}{10^8} = 0.01648.$$

則由對數表可知

$$\log_{10} (10^4 \sqrt{U_0}) = 2.217.$$

由圖 4 的曲線 A 得到 $u=3.795$, 並且由圖 5 可得到 $\psi_0=0.1329$ 。

現在用方程式(10)和(11)計算應力則得