科源教室
KY.Studio

高等学校辅助教材

高等数学

第五版

尹强　主编

解题技巧与应试指导

上下册合卷

中国人事出版社

高等数学(同济五版)

解题技巧与应试指导

主　编:尹　强
副主编:李明生

中国人事出版社

内容提要

本书根据教材的章节从四个方面进行深入地诠释、演绎和解析：一、本章核心内容。二、典型问题解答。三、习题精选详解。四、综合例题解析。

本书在林林总总的辅导教材中独树一帜，内容和形式不落窠白，具有很强的实用性。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法与应试指导/尹强主编.–北京：中国人事出版社，2004.9

ISBN 7-80189-248-8

Ⅰ.高… Ⅱ.尹… Ⅲ.高等数学–高等学校–教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第095173号

中国人事出版社出版发行

(100101 北京市朝阳区育慧里5号)

新华书店经销

武汉贝思印务设计有限公司印刷

*

2004年9月第一版 2004年9月第一次印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：25.5 字数：33.25千字

定价：25.00元

前言

同济大学《高等数学》(第五版)是目前各大学的主流教材,深受读者欢迎。针对该教材的教学参考书种类繁多,各有所长,对高等数学的教学起了积极的促进作用。

《高等数学(同济五版)解题技巧与应试指导》在林林总总的辅导教材中独树一帜,内容和形式不落窠臼,具有很强的实用性。本书采用概括——深入——总结的方法,既使读者能迅速把握教材的总体轮廓,又能深入剖析疑难问题和知识点,从而全面吃透教材,掌握方法,为下一步学习打下坚实的基础。事实证明,这种从整体到局部又到整体的方法是行之有效的。

《高等数学(同济五版)解题技巧与应试指导》的编写思路体现在具有鲜明特色的结构上。本书根据教材的章节从四个方面进行深入地诠释、演绎和解析:

一、本章核心内容。图示本章所有知识点及其逻辑关系,阐述本章教学大纲要求;列举本章涉及的基本概念、公式与法则,方便读者快速查阅,使读者迅速进入学习状态。

二、典型问题解答。针对本章学习中读者可能存在的疑问,逐一分析,力图解决在学习过程中产生的概念与基本方法方面的疑惑。

三、习题精选详解。精选教材中重点难点和常考题进行详解。在解题过程中,编者对解题思路进行了精练的分析和引导,部分习题还给出了多套解题方案以活跃思路。

四、综合例题解析。对本章所学的内容进行小结,以梳理思

路，避免只见树木不见森林的弊端；综合例题的解析，使读者能更进一步深化巩固及融会贯通所学知识。

编者希望本书能够切实地为读者答疑解惑，成为读者的良师益友。由于编者水平有限，书中难免有不足与错误之处，恳请专家、同行和读者批评指正。

编 者

目录

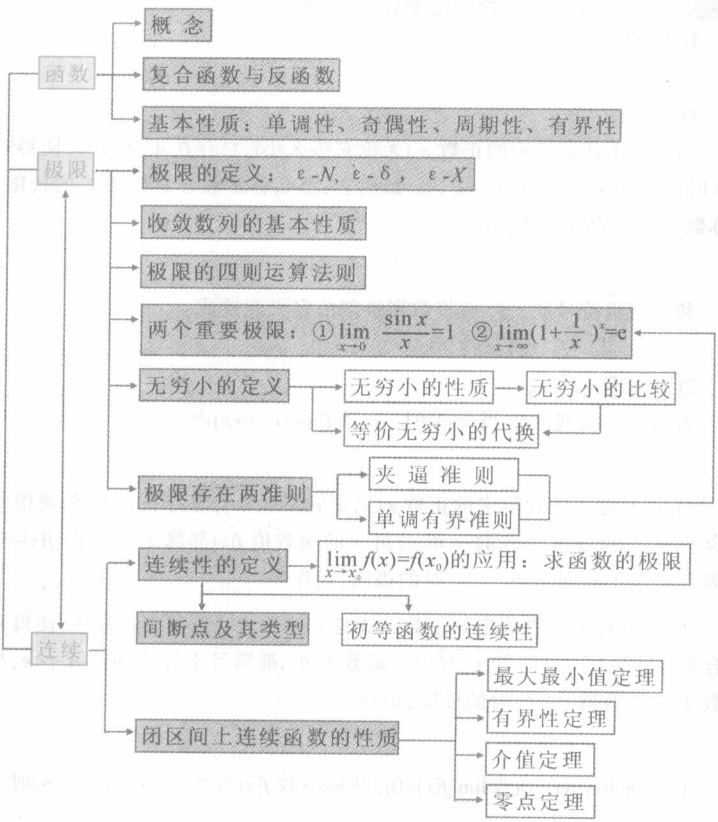
目录

第一章 函数与极限

一 本章核心内容

（一）知识点及大纲要求

1. 知识点网络图



2. 大纲要求

(1) 理解极限的概念

(2) 掌握极限四则运算法则.

(3) 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

(4) 了解无穷小,无穷大,以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

(5) 理解函数在一点连续的概念.

(6) 了解间断点的类型和闭区间上连续函数的性质.

(二) 概念、公式与法则

1. 概念

(1) 数列极限的定义

1) 定义:

如果对于任意给定的正数 ε (无论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么称常数 a 是数列 x_n 的极限,或者称数列 x_n 收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

利用逻辑符号 ∀、∃, 可将数列极限的定义表述成:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ |x_n-a|<\varepsilon$$

2) 几何意义:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,则 $\exists N$,当 $n>N$ 时, x_n 落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内.

(2) 函数的极限

1) 如果对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

2) 如果对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

(3) 无穷小与无穷大

1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无

穷小；如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)，则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

2) 设$\alpha(x)$，$\beta(x)$都是在自变量x相同变化过程中的无穷小量，且$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c$

Ⅰ 当$c=0$时，称β为α的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

Ⅱ 当$c=1$时，称β与α为等阶无穷小，记为$\beta\sim\alpha$；

Ⅲ 当$c=\infty$时，称β为α的低阶无穷小；

Ⅳ 当$c\neq1$时，称β为α的同阶无穷小(非等价无穷小)。

(4) 连续与间断

1) 左连续与右连续

A. 左连续：设$f(x)$在x_0之左边邻近有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处左连续.

B. 右连续：设$f(x)$在x_0之右边邻近有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处右连续.

2) 连续性

设$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处连续.

3) 间断点

若x_0不是$f(x)$的连续点，则称x_0是$f(x)$的间断点.

2. 公式

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.　4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x=\mathrm{e}^k$, $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^k$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$　7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$　9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0, a\neq1)$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{\alpha}{}^{(1+x)}}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\quad (a\neq 1,\ \alpha>0)$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$ 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$

13) 常用等价无穷小 $(x\to 0)$

$\sin x\sim x$; $\tan x\sim x$; $\arcsin x\sim x$; $\arctan x\sim x$

$e^x-1\sim x$; $\ln(1+x)\sim x$ $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0)$

(3) 法则

1) 极限存在准则

(i) 夹逼准则：

如果在 x_0 的某去心邻域内，都有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

(ii) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

二 典型问题解答

[问题一] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=(\quad)$

A. 1 B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$ C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ \sin x=0$

A. 错，出错原因是将它与公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 混淆.

B. 计算过程不对，乘积极限等于极限积只适用于"极限存在"的前提而 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在故拆开为极限之乘积是错误的.

C. 由无穷小与有界量之积为无穷小知 C 是正确的.

[问题二] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=(\quad)$

A. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}+x}=0$

B. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\sqrt{3}-1$

C. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{3}-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{3}+1$

知原式极限不存在.

解疑 A. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}+x}=\infty$ 不存在,乘积极限等于极限乘积应在极限存在前提下才能使用.

故将 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$ 拆成 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-1}-x)$ 是不对的.

B. 错, 由 $\sqrt{x^2}=|x|$, 知: $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\begin{cases}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}, & x>0\\ -\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}, & x<0\end{cases}$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\sqrt{3}-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}}-1}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\sqrt{3}+1$

C. 对

[问题三] 若数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$都是发散的,能否断言数列$\{x_n+y_n\}$发散?

解疑 $x_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}$, $y_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 两数列都是发散的,

但 $x_n+y_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}+1+(-1)^n}{2}=1$ 却是收敛的

两个发散的数列,由它们对应项的和作成的新数列却可能收敛,也就是说收敛数列所具有的和、差、积、商保持收敛性的运算性质,对于发散数列不适用.

[问题四] 若数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$之间存在关系 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=0$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在?

解疑 $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^n-\dfrac{1}{n}$, $z_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$, $n=1,2\cdots$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$, 但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

本例说明极限的夹逼准则中条件$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 不能换成$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=0$

[问题五] 若数列$\{x_n\}$发散, $\{y_n\}$收敛,能否断言数列$\{x_ny_n\}$一定发散?

解疑 不一定,例如 $x_n=n$, $y_n=\dfrac{1}{n+1}$, 但 $x_ny_n=\dfrac{n}{n+1}$ 收敛.

[问题六] 若数列$\{x_n\}$发散, $\{y_n\}$ 发散,能否断言数列$\{x_ny_n\}$一定发散?

解疑 $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$ 都是发散的, $x_ny_n=(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}=-1$ 却是收敛的.

两个发散的数列,由它们对应项的积作成的新数列却可能收敛,也就是说收敛数列所具有的和、差、积、商保持收敛性的运算性质,对于发散数列不适用.

[问题七] 若数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$都发散,能否断言数列$\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$发散?

解疑 不能,例如 $x_n=n$, $y_n=n^3$, 但$\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{1}{n^2}$收敛.

[问题八] 若数列$\{x_n\}$收敛于零, $\{y_n\}$是另一数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n$ 一定为零否?

解疑 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$, $y_n=2^n$, 显然$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在

而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=1\neq0$, 即数列$\{x_ny_n\}$收敛于 1.

[问题九] 若两数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$,则必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ 吗?

解疑 两个数列对应项乘积作成的新数列收敛于零,并不意味着这两个数列本身也必须收敛于零。例如:

$x_n=1+\cos(n\pi)$, $y_n=1-\cos(n\pi)$,数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$均发散, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(n\pi)=0$

[问题十] 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 吗?

解疑 $x_n=(-1)^n$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$, 而 $x_{2k}=1$, $x_{2k-1}=-1$ $(k=1,2,3\cdots)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

由本例知, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的必要条件,但不充分.

[问题十一] 若两数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$有 $x_n<y_n(n=1,2,\cdots)$ 能否断言$\lim\limits_{n\to\infty} x_n<\lim\limits_{n\to\infty} y_n$?