中国金融学年会会刊

Vol.6 No.2

第6卷 第2期，2011

金融学季刊

Quarterly Journal of Finance

金融学季刊

Quarterly Journal of Finance

图书在版编目(CIP)数据

金融学季刊.第6卷.第2期/徐信忠,刘力,朱武祥主编.—北京:北京大学出版社,2011.12

ISBN 978-7-301-20188-6

Ⅰ.①金… Ⅱ.①徐… ②刘… ③朱… Ⅲ.①金融学-丛刊 Ⅳ.①F830-55

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第019955号

书　　名:金融学季刊(第6卷　第2期)

著作责任者:徐信忠　刘　力　朱武祥　主编

责任编辑:吕秀华　张　燕

标准书号:ISBN 978-7-301-20188-6/F·3075

出版发行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址:http://www.pup.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926
出版部 62754962

电子邮箱:em@pup.cn

印 刷 者:北京大学印刷厂

经 销 者:新华书店

787毫米×1092毫米　16开本　8印张　132千字

2011年12月第1版　2011年12月第1次印刷

定　　价:30.00元

International Price: US $25.00

金融学季刊

2011 年 第 6 卷 第 2 期

目　　录

Quarterly Journal of Finance

Vol. 6, No. 2, 2011

CONTENTS

金融学季刊
2011 年 第 6 卷 第 2 期
Quarterly Journal of Finance
Vol. 6, No. 2, 2011

一阶占优准则下资产组合有效性检验

龚　朴　鲍继业*

摘　要　本文针对随机占优研究中,资产组合有效性检验中仅考虑风险资产的现状,将其延伸到包含无风险资产层面,提出扩展一阶占优准则,并给出解决此类问题的线性规划方法。通过对线性规划结果的分析,结合投资者选定的基准市场组合,本文给出资产组合有效性的划分依据,明确了投资者的选择目标。文章最后通过一个简单算例说明了引入无风险资产后的合理性和可操作性,及其对投资者决策结果的影响。

关键词　一阶随机占优,资产组合,线性规划

一、引　　言

在许多领域的研究中(诸如经济、金融、保险、工程以及农业等),通常会面临在不确定性条件下对选择对象进行比较的问题。随机占优方法是解决在不确定性条件下制定决策的一个有力分析工具。随机占优源于离散情形下的优化理论,随后应用于更普遍的分布函数(Hardy,1934;Quirk,1962;Hardar,1969;Rothschild,1970)。随机占优属于非参数方法,因为运用它处理问题时无须投资者具体的效用函数,也无须明确分布函数的类型。随机占优方法仅需要对效用函数的一些限定,这些限定条件在经济学上合理地反映出投资者对于风险的态度(Levy,2006)。

* 龚朴,华中科技大学管理学院财务金融系主任,教授,博士生导师;鲍继业,华中科技大学管理学院博士研究生。通信作者及地址:鲍继业,湖北省武汉市华中科技大学管理学院 320 实验室,430074;E-mail:bobboris@126.com。本文得到国家自然科学基金“信用衍生产品定价理论与数值模拟技术研究”(批准号:70871049)和教育部自主创新基金(批准号:2009JYJR021)的资助,特致谢意。感谢匿名审稿人对本文提出的宝贵意见,当然,文责自负。

文献研究中,随机占优方法主要使用资产数据的回报率,通过占优法则两两间进行比较,从而判定资产表现的优劣。由于实际处理数据的离散性质,随机占优和相关的实证检验都着重关注离散分布的性质,即通常所使用的经验分布函数。Bawa(1979)列举出这种处理办法的几个合理之处:(1) 投资者做决策时利用的都是不连续的历史数据,在实际的操作上采用离散分布合乎常理;(2) 若假定数据的分布服从具体类型(例如正态分布),分析就可以退化为简单的均值方差问题;(3) 离散分布的处理形式可以结合应用 Bayesian 后验分布。

尽管随机占优理论被越来越多的学者不断完善和肯定,但在资产优化配置层面上,Markowitz 的均值方差理论在实际应用层面的影响力却更为广泛,随机占优理论在这方面的推广和应用却是举步维艰。均值方法模型的最大优势在于它能导出一个资产组合的有效前沿,并可以方便地进行具体计算(Markowitz,1952)。随机占优理论之所以没能在资产有效配置方面有所建树,一个重要原因在于要给出判断一个资产组合是否有效的准则十分困难。在处理实际问题时,随机占优方法在多个资产间两两比较应用非常广泛,随机占优方法通过可行集中资产两两之间的比较来分离有效集与无效集。即便是如此成熟的理论,当面对大量数据时,需要比较的次数就会剧增,标准的逐点检验的方法也无计可施。当然,研究人员也致力于用不断改进的算法来比较两资产间的占优关系,例如 Aboudi and Thon(1994)运用零点法来减少两分布数据的比较次数。

当大量学者还在努力改进多资产间两两比较的方法时,Levy 在其书中对随机占优理论做出如下的评价:严格说来,随机占优框架在金融领域方面的缺陷为有效组合的选取上,迄今为止也没能找出与均值方差相媲美的理论。究其原因在于随机占优主要是对可行的资产集合进行分离,未能提出类似均值方差的评判标准。上述这段话无疑指明了随机占优一个新的研究方向。

关于这方面的尝试,Bawa(1978)就曾试图沿用均值方法的思想,借用下方风险(lower partial moment)的概念,来得出最优资产组合。虽只给出可行集的上界,但引入了线性规划这一重要的工具。二十多年后,Kuosmanen 和 Post 用线性规划的思想来分析资产组合的有效性,给出具体的评判法则。其中 Kuosmanen(2004)在运用随机占优算法之前,力图保留资产组合中单个资产反映的信息;Post(2008)则用分位数的思想给出基准的资产组合,并将其应用于动能投资策略(momentum investment strategies)分析。国内也有文章在研究随机占优问题时借鉴了线性规划的方法,例如付祥、朱洪亮(2010)基于一个二阶随机占优的 DEA 模型评价基金的经营业绩;胡支军、鹏飞和黄登仕(2004)为了体现投

资者下方风险规避，推广了随机占优中半绝对离差证券组合投资模型。

Kuosmanen 在给出的一阶随机占优有效性分析中，提及应包括无风险资产才能使得有效性分析更有说服力。本文的主要工作就是弥补其不足之处，在资产组合中引入无风险资产，并重新给出一阶随机占优检验的充要条件。文章的第二部分会简单介绍传统随机占优方法；第三部分给出资产组合的占优概念及算法；第四部分引入无风险资产，提出扩展一阶占优概念，并给出有效性检验的线性规划模型及可实施的检验方法；第五部分给出一个分析算例，辅助说明模型对结果的改进；最后总结全文。

二、随机占优

定义：令 F 和 G 为两风险资产回报的累积分布函数，则 F 一阶占优于 G（即 FD_1G）当且仅当：对所有取值 x，存在 $F(x)\leqslant G(x)$，并且至少存在一个 x_0，使得不等式严格成立，即 $F(x_0)<G(x_0)$。

随机占优准则蕴涵着合理的经济学意义，它主要体现在效用函数理论上。其中一阶随机占优 FD_1G 表明对所有非餍足的投资者来说（即效用函数的一阶导数非负），资产 F 比资产 G 好，因此这类投资者在 F 和 G 两资产间做选择时，都会倾向于选择前者。随机占优准则的优点在于它并不对期望效用理论有严格要求（例如独立性公理），仅仅只涉及效用函数的导数。同时在不确定性情形下，一阶随机占优同其他分析方法有很好的相容性。因此本文主要将两资产的比较准则运用到投资组合层面，对一阶占优条件下资产组合有效性进行分析。

尽管有严密的理论，但随机占优在实际操作中的应用都要借助可观察的数据。为了处理上的方便，传统的算法将各自回报的数据排序后形成经验分布函数（empirical distribution functions）。这在分析单个资产时完全没有问题，然而针对资产组合，采用排序步骤后，就会面临一个棘手的问题：投资组合的经验分布函数不能由最初单个资产的经验分布函数得出，因为排序后就损失了特定状态下数据所代表的信息。举个简单的例子，原始数据和排序后的数据如表 1 和表 2 所示。

表 1　原始数据

状态	T_1	T_2	T_3
资产 F 回报率（%）	15	16	-10
资产 G 回报率（%）	20	9	-8

表2 排序后的数据

资产 F 回报率(%)	-10	15	16
资产 G 回报率(%)	-8	9	20

若我们决定将资金平均分配在资产 F 和 G 上形成资产组合 H,对单个资产排序后构成的回报率向量为:

$h_1=((-10-8)\times0.5,(15+9)\times0.5,(16+20)\times0.5)=(-9,12,18)$ 而根据原始数据在三种状态下反映的信息显示,回报率向量为 $h_0=(17.5,12.5,-9)$,再对 h_0 排序得到 $h_0^*=(-9,12.5,17.5)\neq h_1$。因此在应用随机占优准则进行比较前,资产组合回报反映的这些信息应该被保留。因此文章后续的分析中,在不同的单资产形成资产组合前,都避免对单个资产数据排序。

实际操作中,我们从市场上 N 种资产的 T 个状态(时刻)来获取有限样本数据,分别用 $\tau=\{1,2,\cdots,T\}$ 和 $s=\{1,2,\cdots,N\}$ 表示。N 种资产的回报矩阵为 $R=(R_1,R_2,\cdots,R_N)$,其中 $R_s=(R_{s1},R_{s2},\cdots,R_{sT})'$。(本文为了描述的方便,单下标的变量表示向量,双下标的变量表示数值元素。)

资产组合的构建就是确定 N 种资产的权系数,权系数用列向量 $\lambda\in\Lambda$ 表示,其中 $\Lambda\subset\{\lambda\in R^N\,\middle|\,\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1,\lambda\geq0\}$ 为权系数的可行域,封闭且有界。市场集合,即资产组合的回报向量可表示为 $\psi=\{r\in R^T\mid r=R\lambda;\lambda\in\Lambda\}$。

对任意资产组合 i 的回报向量($r_i\in\psi$),经验分布函数的构造方式就是先按升序将数据排列为 $x_i(x_{i1}\leq x_{i2}\leq\cdots\leq x_{iT})$,再构造阶梯函数 $H_i(c)=\max\{t\in\tau\mid c\geq x_{it}\}/T$ 即可得出。

根据随机占优的定义,可以给出一阶随机占优的算法(假定两资产组合为 j 和 k):

$$jD_1k\Leftrightarrow x_{jt}\geq x_{kt}\quad\forall t\in\tau$$

且不等式对至少一个 t 值严格成立。在下一部分开始前,引用 Kuosmanen(2004)文章中资产组合有效性的划分依据:

定义:对于市场集合中的资产组合 $k(y_k\in\psi)$,属于一阶占优准则下有效集合(简称一阶有效),当且仅当存在资产组合 j 一阶占优于 k 时,j 不属于市场集合($jD_1k\Rightarrow y_j\notin\psi$);否则资产组合 k 属于一阶占优准则下无效集合(简称一阶无效)。

三、占优集合

（一）占优集合概念

从文中可以得知，市场集合包含无数情形的资产组合，任何直接比较的方法均不能解决类似问题。另外，若将以往比较单个资产的方法运用到资产组合，由于排序后的信息缺失，资产组合的经验分布函数同单个资产的经验分布函数也无法建立相应联系。为了将上述直观的描述转化为可在计算机上执行的方法，需要在原来问题的基础上做出简化。本文沿用 Kuosmanen 的方法，在对资产组合进行比较前保留原始数据的信息，引入占优集合的概念。

资产组合的占优集合，与两两比较的占优集合在概念上有所区别。传统占优准则是将可行集分为有效集与无效集。资产组合占优准则，以 N 种资产为基准组合，将待比较的资产组合划分为有效集与无效集，即被基准组合占优的组合归入无效集，没被基准组合占优的组合归入有效集。因此，占优集合、占优有效等概念均按各自的占优准则提出。

定义：令 $\Delta_1(y_0)\equiv\{y\in R^T\mid yD_1y_0\}$ 为关于资产组合 y_0 的一阶占优集合。

占优集合与有效集合的关系可表述如下：资产组合 y_0 一阶占优有效，当且仅当关于 y_0 的占优集合不包括市场集合。

$$\psi\cap\Delta_1(y_0)=\phi \tag{1}$$

（二）一阶占优集合的算法

经验分布函数的构造来源于实际的观测数据，因此所有关于 y_0 的排列都具有相同的经验分布函数。因此，问题的数学描述可以借助排列矩阵的概念。令矩阵 $P=[P_{ij}]_{T\times T}$ 内元素取值为 0 或 1，并且每行、每列的和为 1。所有排列的矩阵可表示为：

$$\Pi\equiv\left\{[P_{ij}]_{T\times T}\mid P_{ij}\in\{0,1\};\quad\sum_{i=1}^{T}P_{ij}=\sum_{j=1}^{T}P_{ij}=1\quad\forall i,j\in\tau\right\} \tag{2}$$

排列矩阵能对回报向量中的元素任意排列，向量 y_0 的全排列表示为 $\{Py_0\mid P\in\Pi\}$。

因此占优集合可用下面的定理表述：

命题 1　$\Delta_1(y_0)\equiv\{y\in R^T\mid yD_1y_0\}\equiv\{y\in R^T\mid\exists P\in\Pi:y\geqslant Py_0;y\neq Py_0\quad\forall P\in\Pi\}$

证明：令 $A=\{y\in R^T \mid yD_1y_0\}$，$B=\{y\in R^T \mid \exists P\in\Pi: y\geqslant Py_0; y\neq Py_0 \quad \forall P\in\Pi\}$

考虑任意一个市场组合 $y_1\in R^T$，定理的证明分为两步：

(1) $y_1\in A\Rightarrow y_1\in B$

$y_1D_1y_0$ 说明排序后的 $x_1\neq x_0$，就可以得出对 $\forall P\in\Pi, y\neq Py_0$。否则就会存在 $x_1=x_0$，与条件矛盾。

$y_1D_1y_0\Rightarrow x_{1k}\geqslant x_{0k}\ \forall t\in\tau$（即 $P_1y_1\geqslant P_0y_0\Rightarrow y_1\geqslant P_1^{-1}P_0y_0=P^*y_0$），且至少存在一个严格成立的不等式。

上述的证明可以得出 $y_1\in B$。

(2) $y_1\in B\Rightarrow y_1\in A$

$\exists P\in\Pi, y_1\geqslant Py_0$，先将 Py_0 按升序排列为 $x_0^{\#}$，并且相应地对 y_1 进行排列为 $y_1^{\#}$，有 $y_1^{\#}\geqslant x_0^{\#}$；然后按升序排列（为证明的方便，用冒泡法排序）$y_1^{\#}$ 为 $x_1^{\#}$，则可得出 $x_1^{\#}\geqslant x_0^{\#}$。

其中对 $y^{\#}$ 用冒泡排序时，$y_1^{\#}\geqslant x_0^{\#}$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix}\vdots\\ y_{1,k}^{\#}\\ y_{1,k+1}^{\#}\\ \vdots\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}\vdots\\ x_{0,k}^{\#}\\ x_{0,k+1}^{\#}\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中有不等式 $y_{1,k}^{\#}\geqslant x_{0,k}^{\#}, y_{1,k+1}^{\#}\geqslant x_{0,k+1}^{\#}$，且根据 $x_0^{\#}$ 的性质可知 $x_{0,k}^{\#}\leqslant x_{0,k+1}^{\#}$，若冒泡法时发现 $y_k^{\#}<y_{k+1}^{\#}$，则需要将两元素对换，不等式 $y_{1,k+1}^{\#}\geqslant x_{0,k+1}^{\#}\geqslant x_{0,k}^{\#}$ 和 $y_{1,k}^{\#}\geqslant y_{1,k+1}^{\#}\geqslant x_{0,k+1}^{\#}$ 成立，即冒泡后下面不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\vdots\\ y_{1,k+1}^{\#}\\ y_{1,k}^{\#}\\ \vdots\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}\vdots\\ x_{0,k}^{\#}\\ x_{0,k+1}^{\#}\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{4}$$

当冒泡法结束后（即两两比较结束后），得出按升序排列的向量 $x_1^{\#}$，可知 $x_1^{\#}\geqslant x_0^{\#}$。

证毕。

其中，占优集合是单调递增的集合（$\Delta_1(y_0)=\Delta_1(y_0)+R_+^T$），且关于向量 $y_r=r(1,1,\cdots,1)$ 对称，向量 y_r 表示回报率为 r 的无风险资产。

四、含无风险资产的扩展一阶占优集合

（一）扩展一阶占优

本文第二节讨论一阶占优集合概念时，两两比较的都是风险资产。风险资产同无风险资产无法在占优准则下比较出优劣（如可以比较，就会出现套利机会），正因如此，资产组合就应该包括无风险资产。Levy 在其研究中提到，两个分布函数 F 和 G 之间不存在一阶占优关系，在考虑无风险资产后，对任意的 β，可能存在 α 使得 $F_\alpha \leqslant G_\beta$ 成立（其中 α 和 β 为风险资产的权系数，$(1-\alpha)$ 和 $(1-\beta)$ 为无风险资产的权系数）。结果表明，在引入无风险资产的情况下，F 一阶占优于 G。从上述分析可知，考虑资产组合问题时，包括无风险资产能够让问题的研究更加全面，更为合理。针对 Kuosmanen 文献中提出的模型未能包括无风险资产的缺陷，文中后续研究中会考虑无风险资产，因此问题的分析主要集中在如何合理地将一阶占优概念推广为扩展一阶占优准则，并给出相应的评判和检验标准，推进随机占优方法在资产组合层面上的应用。

仿照 Levy 的定义，本文给出扩展一阶占优的概念：

定义 1　令 F_α 为风险资产 F 同无风险资产的组合，G_β 为风险资产 G 同无风险资产的组合，若对所有的 β 值，存在一个 α，使得 $\{F_\alpha\} D_1 \{G_\beta\}$，则 F 在扩展一阶占优意义下占优于 G，记为 $FD_1^r G$。

在定义 1 的限定下，将上一节中一阶占优集合的概念平行进行推演，则关于资产组合 y_0 的扩展一阶占优集合可定义为

$$\Delta_1^r(y_0) \equiv \{y \in R^T \mid yD_1^r y_0\} \tag{5}$$

推论 1　对于市场集合中的资产组合 $k(y_k \in \psi)$，属于扩展一阶占优准则下有效集合（简称扩展一阶有效），当且仅当存在资产组合 j 扩展意义下一阶占优于 k 时，j 不属于市场集合（$jD_1^r k \Rightarrow y_j \notin \psi$）；否则资产组合 k 属于扩展一阶占优准则下无效集合（简称扩展一阶无效）。

从权系数取值的连续性可知，要验证扩展占优需要进行无数次的比较。因此迫切需要一个方法在保证定义完整性的条件下，简化上述问题中出现的难点。因此给出命题 2。

命题 2　在一阶占优的算法中，令 $y^\#$ 和 y^* 为风险资产组合（N 种资产 y_k 的加权组合，$k \in s$），无风险资产的回报为 r，若存在 $\alpha > 0$ 使得 $y_\alpha^\# D_1 y^*$，则 $y^\# D_1^r y^*$

成立。

证明:令

$$y^{\#} = \lambda_1^{\#} y_1 + \lambda_2^{\#} y_2 + \cdots + \lambda_n^{\#} y_n, \quad y^{*} = \lambda_1^{*} y_1 + \lambda_2^{*} y_2 + \cdots + \lambda_n^{*} y_n \tag{6}$$

其中权系数向量 $\lambda^{\#}, \lambda^{*} \in \Lambda$。已知存在 α 使得 $y_{\alpha}^{\#} D_1 y^{*}$,即

$$\alpha y^{\#} + (1-\alpha) r \geqslant y^{*} \tag{7}$$

对任意的 $\beta > 0$,上述不等式两边分别乘以 β,并加上 $(1-\beta)r$,得出

$$\alpha\beta \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{\#} y_i + (1-\alpha)\beta r + (1-\beta) r \geqslant \beta \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{*} y_i + (1-\beta) r \tag{8}$$

简化后为

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha\beta\lambda_i^{\#} y_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha\beta\lambda_i^{\#}\right) r \geqslant \sum_{i=1}^{N} \beta\lambda_i^{*} y_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \beta\lambda_i^{*}\right) r \tag{9}$$

即可以得出

$$\alpha\beta y^{\#} + (1-\alpha\beta) r \geqslant \beta y^{*} + (1-\beta) r \tag{10}$$

上述不等式说明对任意 $\beta > 0$,可以找到 $\gamma = \alpha\beta > 0$,使得 $y^{\#} D_1^{\gamma} y^{*}$。

证毕。

(二)有效性检验方法

命题 2 给出了简化问题的第一步,即只需找出一个风险资产的权系数。但实际运算时,仍然需要进一步的手段来将问题转化为可以实际操作的方法。于是,文章第二步引入标准的线性规划方法,提出扩展一阶占优准则下的有效性检验,圆满地将前面分析中的定义域内优化问题转化为定点优化问题。

为了检验任意资产组合 y_0 是否属于市场一阶有效集合,本文用线性规划的方法给出检验统计量 $\theta(y_0)$。

$$\begin{aligned} \theta(y_0) = \max_{\lambda, P} & \left(\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N+1} Y_{ti}^{0} \lambda_i - \sum_{t=1}^{T} y_{0t} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{N+1} Y_{ti}^{0} \lambda_i \geqslant \sum_{j=1}^{T} P_{tj} y_{0j} \quad \forall t \in \tau \\ & P \in \Pi \\ & \lambda \in \Lambda \end{aligned} \tag{11}$$

其中,$Y^0 = (Y, r)$ 为包含无风险资产 r 后的市场资产组合矩阵,相应权系数为 λ。其中需要补充说明的是,若 y_0 为市场其中一种资产,则去除 Y^0 中 y_0 这一列(即 Y^0 下标 i 的取值为 N)。其中目标函数 $\theta(y_0)$ 的形式意味着市场组合占优于 y_0

的程度。

命题3　市场基准下，资产组合 y_0 属于扩展一阶占优无效集合的充分必要条件为线性规划问题有解（即 $\theta(y_0)\geqslant 0$）；资产组合 y_0 属于扩展一阶占优有效集合的充分必要条件为线性规划问题无解。

证明：

上述线性规划问题或者不存在可行解，或者存在可行解（上述线性规划可行域有界，若有可行解，则必在顶点处取得最优解）。如果存在可行解，即说明约束条件成立，目标函数的值必定非负。先将线性规划问题可分解为三个方面：

$$\text{线性规划问题}\begin{cases}\text{不存在可行解}\\ \text{存在可行解}\begin{cases}\theta(y_0)=0\\ \theta(y_0)>0\end{cases}\end{cases}$$

充分性：

线性规划的构造表明，约束条件部分就是扩展占优的定义。

(1) 若不存在可行解，说明约束条件部分无法成立，市场集合的资产组合都不占优于 y_0，则 y_0 属于扩展一阶占优有效集合。

(2) 若目标值 $\theta(y_0)=0$，说明市场组合可以复制 y_0。

(3) 若目标值 $\theta(y_0)>0$，说明市场组合在扩展占优准则条件下占优于 y_0。其中(2)、(3)两种情况都意味着资产组合 y_0 属于扩展一阶占优无效集合。

必要性由扩展一阶占优有效（无效）集合的定义即可推出。

证毕。

五、算例与结论

（一）数值算例

上节给出的线性规划问题可以转化为标准形式，运筹学中成熟的算法给问题分析带来了极大的方便。下面给出一个简单的算例：

市场资产 $y_1=(-0.5,8)$，$y_2=(0.5,5)$，其中待检验资产 $y_0=(1,3)$，$r=1.5$。

补充说明：若 $r>\max y_i$ 或 $r<\min y_i$，则理论上存在套利机会，因此实际运用中状态数不能太少（即每个资产包括的回报数据不能太少），否则可能会出现上

述情形。

线性规划式子如下:

$$\theta(y_0)=\max_{\lambda^0,P}(5.5\lambda_1+6\lambda_2+3\lambda_3-4)$$

$$\begin{cases}-0.5\lambda_1+0.5\lambda_2+1.5\lambda_3\geqslant 1\times P_{11}+3\times P_{12}\\ 6\lambda_1+5.5\lambda_2+1.5\lambda_3\geqslant 1\times P_{21}+3\times P_{22}\\ P_{11}+P_{12}=P_{21}+P_{22}=1\\ P_{11}+P_{21}=P_{12}+P_{22}=1\\ P_{ij}\in\{0,1\}\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0\end{cases}\tag{12}$$

用 matlab 中 linprog 函数可迅速算出问题的最优解为

$$\theta(y_0)=0.5$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=0.5$$

$$P_{11}=P_{22}=1,\quad P_{12}=P_{21}=0$$

根据命题3可知,y_0 在扩展条件下被占优,属于扩展一阶占优无效集合。投资者在投资时就可不必将 y_0 纳入考虑的范围。

不考虑无风险资产时,资产 y_1 和 y_2 的第一个分量均小于 y_0 的最小分量,故 y_1 和 y_2 的组合不可能一阶占优于 y_0,从而 y_0 属于一阶占优有效集合。若按照 Kuosmanen 文献中模型的结果,就会产生 Levy(2006)所描述的第一类错误(Type Ⅰ error),会导致分类结果不够准确,但是却可以通过本文改进后模型的结果加以避免。

(二)结论

本文给出了一阶占优准则下资产组合问题的一套完整的处理方法。本文的意义和实用性体现在如下两个方面:

1. 划分待比较的集合

根据给定的市场集合(基准集合),可以将待比较的资产组合分类为有效集和无效集,便于后续的研究分析。

2. 提供定量的结果,重新进行资产配置,改进投资者的投资策略

若根据给出的线性规划方法使得(11)式具有可行解,则由该方法得出的权

系数就可以作为市场资产的配置，配置后资产组合优于投资者原先的资产组合 y_0。

文章从资产组合一阶占优的问题出发，给出了包括无风险资产的扩展一阶占优的概念和可供实际操作的线性规划方法，丰富并完善了一阶随机占优算法在资产组合中的应用。

参考文献

[1] 付祥、朱洪亮，2010，基于二阶随机占优的 DEA 模型在基金业绩评价中的应用，《金融纵横》，第 11 卷，第 1 期，第 36—39 页。

[2] 胡支军、彭飞、黄登仕，2004，一个推广的半绝对离差证券组合投资模型，《系统工程》，第 22 卷，第 3 期，第 57—61 页。

[3] Aboudi, R., and D. Thon, 1994, Efficient algorithms for stochastic dominance tests based on financial market data, *Management Science*, 40(4): 508—515.

[4] Bawa, V. S., Safety-First, 1978, Stochastic dominance, and optimal portfolio choice, *The Journal of Financial and Quantitative Ananlysis*, 13(2): 255—271.

[5] Bawa, V. S., E. B. Lindenberg and L. C. Rafsky, 1979, An efficient algorithm to determine stochastic dominance admissible sets, *Management Science*, 25(7): 609—622.

[6] Hadar, J., and W. Russell, 1969, Rules for ordering uncertain prospects, *American Economic Review*, 59(1): 25—34.

[7] Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Polya, 1934, *Inequalities*, Cambridge, MA: Cambridge University Press.

[8] Kuosmanen, T., 2004, Efficient diversification according to stochastic dominance criteria, *Management Science*, 50(10): 1390—1406.

[9] Levy, H., 2006, *Stochastic Dominance: Investment Decision Making Under Uncertainty*, United States: Springer.

[10] Markowitz, H., 1952, Portfolio selection, *The Journal of Finance*, 7(1): 77—91.

[11] Post, T., 2008, On the dual test for SSD efficiency: with an application to momentum investment strategies, *European Journal of Operational Research*, 185(3): 1564—1573.

[12] Quirk, J. P., and R. Saposnik, 1962, Admissibility and measurable utility functions, *Review of Economic Studies*, 29(2): 140—146.

[13] Rothschild, M., and J. E. Stiglitz, 1970, Increasing risk I: A definition, *Journal of Economic Theory*, 2(3): 225—243.

Portfolio Efficient Analysis According to First Stochastic Dominance Criteria

Pu Gong Jiye Bao

(School of Management, Huazhong University of Science and Technology)

Abstract Most of the efforts of the portfolio efficient analysis only concerned the risk assets, that is to say, regardless of the riskless asset. In order to provide robust results, this paper relaxes the first stochastic dominance criteria, and takes the riskless asset into consideration. The introduction of riskless asset requires an overview method to focus on operational tests of portfolio efficiency. As a result, the emphasis of the paper is to construct a linear programming model which is based on the first degree stochastic dominance with a riskless asset. The corresponding results from the model, together with the quantitative analysis related to benchmark set established beforehand, could therefore verify whether the objective asset is efficient. From the approach mentioned above, it is clear that decision makers will select portfolios aiming at a high profit since they weren't dominated by benchmark set. At last, a simple numerical answer is presented to reflect the application when making selective decision.

Key Words First Stochastic Dominance, Portfolio Efficient Analysis, Linear Programming

JEL Classification P41, P42, P47