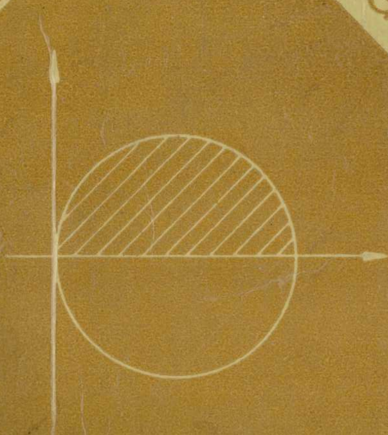
速成微积分

李育生 程 庆

曹守明 姜效先 王 瑗

河南大学出版社

SUCHENGWEIJIFEN



速成微积分

李育生　程　庆

曹守明　姜效先　王　瑗

河南大学出版社

(豫)新登字第09号

速成微积分

李育生　程　庆
曹守明　姜效先　王　瑗

责任编辑　文　严

河南大学出版社出版
(开封市明伦街85号)
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米1/32　印张:12.75　字数:320千字
1993年6月第1版　1993年6月第1次印刷
印数:1—6000　定价:6.00元

ISBN7-81018-851-8/O·49

前　言

对于参加高等教育自学考试经济类专业学习的大多数学员来说，微积分是一门难学的课程. 仅因这门课屡试未过而放弃毕业希望的大有人在，这实在令人惋惜. 微积分之所以难学，一方面是由于它涉及较多的初等数学知识，更主要的是由它本身的难度所决定. 要知道，参加数学专业研究生考试的同学也总是把数学分析(即微积分)作为一门难度很大的课程来准备.

如何使数学基础薄弱、年龄较大、又是业余学习的学员，在短短的四个月左右的有效授课时间里，掌握微积分基本内容并通过考试，确实值得探索和研究. 笔者在多年的高等教育自学考试教学辅导实践中，通过长期艰苦摸索，建立了一套有别于数学专业在校大学生使用的独特的教学方法和训练方法，使得采用这套方法的几个教学班的考试及格率由以往的20%左右提高到50%以上，并且今后还可望进一步提高. 为了交流经验，帮助全国各地学员和辅导教师提高教学质量，特将历年来的讲义精心整理成这本《速成微积分》.

本书自成体系，内容符合教学大纲基本要求，具有以下主要特色：

一、考虑到大多数学员初等数学基础薄弱，在第一部分安排了初等数学复习，尤其是微积分用得最多的知识的复习，从而有效地节约了学员复习初等数学知识的精力.

二、本书按讲稿方式写成，学员上课不必记课堂笔记，只需认真听讲，这就解决了记笔记与听讲顾此失彼的矛盾，有利于提高听讲效果.

三、本书重点解决基本概念的理解和基本方法的训练，对考试中要求不高、但难度较大、消耗学员大量时间的内容，作了大胆的删减，使学员可望从一分耕耘中得到两分收获.

四、本书精选习题，针对性极强，又兼顾前后内容的复习与巩固. 课堂练习与课后习题少而精当，具有典型性和代表性.

五、本书减少了授课时间，加强了解题训练. 全书的基本内容可在两个月内讲完，按每周 6 学时计算，需 50 个课时左右. 后两个月可在辅导老师指导下集中力量熟悉各种题型，配套习题均已给出. 学员在使用本书时，务必独立解题，不要先看答案，这一点很重要.

六、本书突出了公式和方法的记忆使用技巧，深入浅出地将重要公式总结为一些简单口诀，一听就懂，一记就会，一用就灵. 大部分口诀给出的规律适用于多数情况，并不强求理论上的严密. 因为对自学考试学员来说，并不要求他们理解微积分深奥的理论.

鉴于本书的目的在于指导学员在短时间内学会微积分并通过考试，所以对理论上的严谨性、完整性和系统性没有作过多的要求，恰似在花园里采撷了最鲜艳的花朵，而对一般的花朵及枝叶则弃之不顾，这也是"速成"本身的需要.

本书编者的分工是：王瑗第一、二章，程庆第三、四章，李育生第五、六、七章，曹守明第八、九章，姜效先第十、十一章. 李育生着重从内容上、程庆着重从形式上通审全稿.

欢迎使用本书的教师和学员提出改进意见.

编者

1992.10

目　录

第一章　初等数学提要

§1.1　代　　数

1.绝对值

建立数轴以后，实数与数轴上的点就形成了一一对应．因此我们可以把实数看作数轴上的点，也可以把数轴上的点视为实数，二者并无本质区别．实数 x 的绝对值的定义是：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

它的几何意义是 x 点到原点的距离．$|x-a|$则表示数轴上 x 点与 a 点的距离．与上式相仿，

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & x \geqslant a \\ a-x, & x < a \end{cases}$$

绝对值具有以下性质：

(1) $|x| \geqslant 0$；

(2) $|-x| = |x|$　($y=|x|$是偶函数)；

(3) $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$；

(4) $|x| > a \Longleftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$；

(5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$；

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$．

例1　$f(x) = |2x+1| - \dfrac{|x-1|+|2-x|}{|2x-1|}$，求 $f(-1)$，$f(0)$．

解： $f(-1)=|-1|-\dfrac{|-2|+|3|}{|-3|}=1-\dfrac{2+3}{3}=-\dfrac{2}{3}$，

$$f(0)=1-\frac{|-1|+|2|}{|-1|}=1-\frac{1+2}{1}=-2.$$

2. 因式分解

（1）提取公因式法

为了提取公因式一次完成，在提取公因式时，要把各项系数的最大公约数与各项中相同字母的最低次幂的积，作为各项的公因式提取出来.

例2 把$18x^5-24x^4y^2+6x^3$分解因式.

解： 原式$=6x^3\cdot 3x^2-6x^3\cdot 4xy^2+6x^3\cdot 1$

$=6x^3(3x^2-4xy^2+1)$.

（2）十字相乘法

十字相乘法用于二次三项式、二次三项齐次式的因式分解. 二次三项式的标准形式为ax^2+bx+c. 我们希望得到分解式

$$ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q).$$

计算右边的乘积，得

$$(mx+p)(nx+q)=mnx^2+(mq+np)x+pq.$$

当a,b,c是整数时，可以用观察法求得m,n,p,q.

例3 把$5a^2+19a+12$分解因式.

解： 原式$=(a+3)(5a+4)$.

（3）乘法公式法

代数中常用的乘法公式有：

平方差公式　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

完全平方公式　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，

立方和(差)公式　$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

此外还有　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

将这一组公式反过来使用就是因式分解公式.

例4　把 a^4+2a^2+1 分解因式.

解： 原式 $=(a^2)^2+2a^2\cdot 1+1^2=(a^2+1)^2$.

3. 一元二次方程求根公式

一元二次方程的标准形式为：

$$ax^2+bx+c=0.$$

称 $\Delta=b^2-4ac$ 为一元二次方程的判别式.

若 $\Delta>0$，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，方程有两个相异实根；

若 $\Delta=0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$，方程有两个相同实根；　$x=-\frac{b}{2a}$

若 $\Delta<0$，方程无实根.

微积分中常见形如 $x^2+2b'x+c=0$ 的一元二次方程，它的求根公式可简化为：

$$x=-b'\pm\sqrt{b'^2-c}.$$

式中的 b' 是一次项系数的一半.

例5　解方程　$x^2-2x-1=0$.

解： $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-1)}=1\pm\sqrt{2}$.

即　$x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.

4. 指数运算

指数运算的主要公式有

(1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$；

(2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$；

(3) $(ab)^m=a^mb^m$；

(4) $(a^m)^n = a^{mn}$.

除了正整数指数幂外，对一般有理数指数幂的意义应当熟练掌握. 如:

(5) $a^0 = 1$;

(6) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, 特别有 $a^{-1} = \frac{1}{a}$;

(7) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$;

(8) $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$.

指数运算公式对有理指数幂均成立.

例6 计算 $3^{-2} \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \div (3.1416 \div 256)^0$.

解: 原式 $= \frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \div 1$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{160}.$$

5. 对数运算

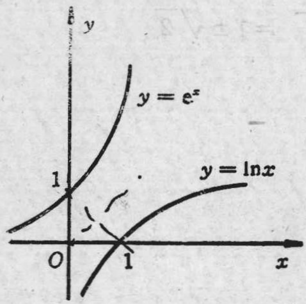


图 1-1

微积分中常用以 e 为底的自然对数

$y = \ln x \quad (x > 0, e \approx 2.718)$.

它与指数函数 $y = e^x$ 互为反函数, 两个图象关于直线 $y = x$ 成轴对称图形. (图 1-1)

自然对数有以下公式:

(1) $\ln e = 1$, 底的对数为 1;

(2) $\ln 1 = 0$, 1 的对数为 0;

(3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$;

(4) $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$;

(5) $\ln\sqrt[m]{x}=\dfrac{1}{m}\ln x$;

(6) $\ln x^m=m\ln x$.

对数可以把运算降一级，即把乘法变成加法，除法变成减法，乘方变成乘法，开方变成除法. 应该注意的是，对数不能化简加、减运算，$\ln(x+y)$和$\ln(x-y)$已经是最简形式了.

(7) $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$，特别有$\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

这是换底公式，微积分中一般只用自然对数，遇到底不是 e 的对数，应当利用这个公式进行转化.

(8) $e^{\ln a}=a$，一般地有 $a^{\log_a b}=b$.

这个公式称为对数恒等式，它的应用很广泛，如：

$$e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-1}}=\frac{1}{2},\quad e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2.$$

例7 化简 $\ln\left(x^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}\right)$.

解：原式 $=\ln x^2+\ln\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$

$$=2\ln x+\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{2}{3}\ln(x-1).$$

§1.2 初 等 几 何

微积分中经常用到初等几何中的面积与体积公式，其中最常用的公式有：

(1) 直角三角形面积等于两条直角边乘积的一半.

$$S=\frac{1}{2}ab.$$

(2) 梯形面积等于上、下底和的一半乘高.

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

(3) 圆的周长 $l=2\pi r$，圆的面积 $S=\pi r^2$，其中 r 为圆的半径.

(4) 圆柱体体积 $V=\pi r^2 h$，　侧面积 $S=2\pi rh$，　全面积 $S=2\pi r(h+r)$，其中 r 为圆柱底面半径，h 为圆柱的高.

(5) 球的表面积 $S=4\pi r^2$，体积 $V=\frac{3}{4}\pi r^3$，其中 r 为球的半径.

(6) 圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，　侧面积 $S=\pi rl$，　全面积 $S=\pi r(l+r)$，其中 r 为圆锥底面半径，l 为母线的长.

§1.3 平面三角

1. 锐角三角函数定义(图 1-2)

$$\sin\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}},\quad \cos\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}},$$

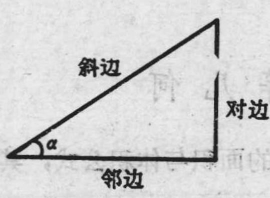


图 1-2

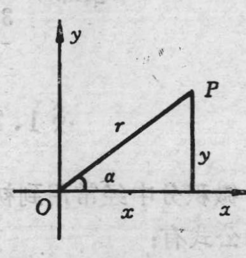


图 1-3

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}},\quad \text{ctg}\,\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}.$$

2. 任意角三角函数定义

在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$，P 点到原点的距离记为 r（图 1-3），则角 α 的三角函数定义为

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \text{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \text{ctg}\alpha=\frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

三角函数共有六个，最重要的是正弦和余弦. 若取 P 点使 $r=1$，则有

$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x.$$

那么正弦的性质将完全由 P 点的纵坐标决定，余弦性质由 P 点的横坐标决定. 简记为：正弦立，余弦躺，正切不立，余切不躺.

这句话包括以下含意：

(1) 增减性及特殊角函数值

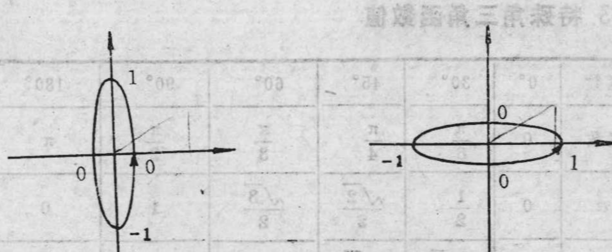


图 1-4

当 α 角由 $0°$ 逐渐增大到 $360°$ 时，正弦在一、四象限递增，在二、三象限递减，正弦值依次由 0 变到 1，0，-1，再回到零，绕

立轴即纵轴变化．余弦在一、二象限递减，在三、四象限递增，余弦值依次由1变到0，－1，0，再回到1，绕躺轴即横轴变化．（图1-4）

（2）三角函数符号

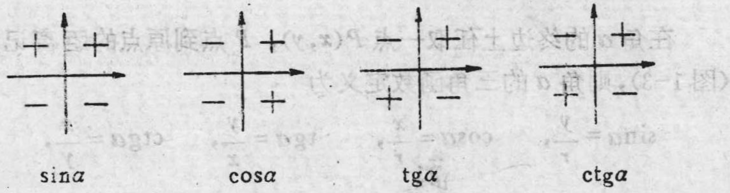


图 1-5

纵轴上正下负，正弦也是上半平面为正，下半平面为负；横轴右正左负，余弦也是右半平面为正，左半平面为负．

正切、余切函数在一、三象限为正，二、四象限为负．

角的终边落在哪个象限，三角函数符号就由上述原则确定．（图 1-5）

（3）正切函数当终边与 y 轴（立轴）重合时不存在，余切函数当终边与 x 轴（躺轴）重合时不存在．

3．**特殊角三角函数值**

角度数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	－1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	－1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

$\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{7}\right)^2$

4. 倍角公式与半角公式

（1） $\sin2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha$,

（2） $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$,

（3） $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$.

5. 同角间三角函数关系式

（1） 平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$, $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$.

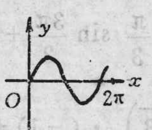
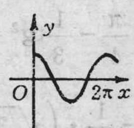
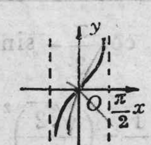
（2） 商的关系

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

（3） 倒数关系

$\sin\alpha\csc\alpha=1$， $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=1$， $\cos\alpha\sec\alpha=1$.

6. 三角函数图象及其性质

三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\,x$	$y=\mathrm{ctg}\,x$
图　形				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$x\neq k\pi$
周　期	2π	2π	π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
有界性	$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$	$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$	无界	无界

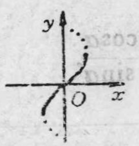
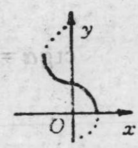
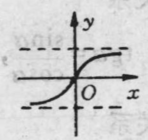
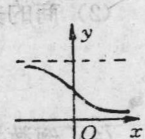
7. 反三角函数

反三角函数中最常用的是反正弦与反正切.

$y=\arcsin x$ 表示$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$内正弦值是 x 的角.

$y=\operatorname{arc\,tg} x$ 表示$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内正切值是 x 的角.

如：$\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$\operatorname{arc\,tg} 1=\dfrac{\pi}{4}$，$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$等.

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\operatorname{arc\,tg} x$	$y=\operatorname{arc\,ctg} x$
图　形				
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
值　域	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
奇偶性	奇函数		奇函数	

例1　计算 $\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin^2\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{3\pi}{2}+\cos 0$.

解： 原式$=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot(-1)+1$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-1)+1=2\ .$$

8. 诱导公式

诱导公式可以将一般角三角函数化为锐角三角函数，常用公式有：