高等学校教学用书

解析几何学

刘海蔚 吴小平 编著

西南师范大学出版社

解析几何学

刘海蔚　吴小平编著

西南师范大学出版社

(川)新登字 019 号

责任编辑　胡小松
封面设计　雾　晨

解 析 几 何 学

刘海蔚　吴小平　编著

西南师范大学出版社出版发行
(重庆　北碚)
新华书店经销
西师劳司印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32
1994 年 9 月　第一版　199　刷
印数:1—2000

ISBN　7—5621—0997—4/G·685

定价:5.40 元

序

平面解析几何是中学数学最高课程之一，空间解析几何是高等师范院校数学专业的基础课，是进入高等数学的通道。各种层次的解析几何书不少，刘海蔚、吴小平二位老师所编的解析几何却富有新意，对内容的处理有很多特点，如对向量代数运算的的基本运算律就有与众不同的证法。

本书注意师范的特点，除结合教学内容联系中学和初等几何外，还列专篇指导中学平面解析几何的教学。

刘、吴二位老师学识丰富，积多年教学经验，总结出本书，嘉惠来者。在本书付印之时，我乐于作序予以介绍。

陈重穆

一九九三年六月十八日

于北碚

前　　言

本书是为高等师范院校数学专业"解析几何"课编写的教材，适于各种类型的高等师范院校(包括函授)使用，也可供中学教师和自学者学习或参考.

解析几何教材很多，本书则主要考虑了以下两个方面：

(1) 力求新颖、简明

这首先体现在向量代数部分。其他教材中，数乘向量第一分配律$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$很多是根据$\lambda$、$\mu$、$\lambda+\mu$的符号分情况利用定义证明；外积分配律$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$一般是先利用关于外积的一种作图法证明$\boldsymbol{a}$为单位向量时成立，再利用数乘向量的运算律来证明。这些都比较麻烦，给学生理解和接受带来困难。本书则采用与其他教材迥然不同的新的处理方式，即统一地由各种向量代数运算的几何定义直接推出其坐标表示，利用它们就把各种向量代数运算的运算律问题化为了实数运算律问题，因而十分简明。

除向量代数外，本书的其他部分也采取了很多新的处理方式，使有关内容简洁清晰，基本思想突出，不再一一列举了。

(2) 尽量有利于中学各几何课程的教学

本书分为两篇。在第一篇"空间解析几何"中，向量代数部份设专节介绍了向量在初等几何中的一些应用；平面和空间直线部分通过一些练习和习题使学生会利用同样的方法去解决平面解析几何中有关直线的问题。第二篇"平面解析几何选讲"更是直接针对中学解析几何教学的需要而编写的。根据这种需要，很多师范院

校都开设了选修课“平面解析几何选讲”.本篇第六章到第九章正可作为该课程的教材。

为培养学生的空间想象力和识图、画图能力，本书加强了关于平面、二次曲面、两曲面交线和空间区域等的画法部份。

书中标有 * 的章节、习题或小字排印的内容供选作和选学。当定理和例题证明或解答完毕时，若不易与下文区别，则使用记号 □ 表示完毕。

本书第一、二章以及全书的练习和习题答案由吴小平执笔，其余由刘海蔚执笔。在编写和试用过程中，得到西南师范大学、重庆师范学院、四川师范学院数学系的领导、有关老师以及其他一些兄弟院校有关老师的大力支持和帮助，并提出了很多宝贵的意见。西南师范大学陈文立教授还为本书极坐标和参数方程部份的编写提供了一些资料。在此特向他们致以衷心的谢意。

编者还要特别感谢西南师范大学陈重穆教授对本书的关心和大力支持。

由于西南师范大学出版社及其副总编赵宏量教授的支持才使得本书得以顺利出版，编者也向他们表示诚挚的谢意。

限于编者水平，本书难免有不当和错误之处，恳切希望读者批评指正。

刘海蔚　吴小平

1993 年 6 月

目　录

第一篇　空间解析几何

第一章　向量代数

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何，因而要将几何的对象与代数的对象建立起联系，并在此基础上将几何的研究归为代数的计算．由于用“计算”代替了“推理”，所以思路简明，容易入手．

几何研究最常用的代数方法是坐标法，但有时用向量方法可使问题解决得更为简捷．向量除了在几何以及其他数学学科中有重要应用外，也是解决力学、物理和技术科学问题的有力工具．因此，本章既介绍坐标方法又介绍向量方法，并将它们结合起来使用．

§1　空间直角坐标系

在空间任取一点 O，过 O 点作三条两两互相垂直的轴（规定了正方向的直线）Ox、Oy、Oz，再取定一线段作为长度单位．这样的三条轴连同长度单位一起，称为**空间直角标架**，记为 $Oxyz$，点 O 称为**坐标原点**；Ox、Oy、Oz 称为**坐标轴**，依次称为 x 轴、y 轴、z 轴；由每两条坐标轴所决定的平面 Oxy、Oyz、Ozx 称为**坐标平面**，依次称为 xy 面、yz 面、xz 面．

如果在空间直角标架中 x 轴、y 轴和 z 轴的顺序按图 1—1 所示，将右手的拇指、食指分别指着 x 轴和 y 轴的正向时，中指正好指着 z 轴的正向，则称这标架为**右手标架**；如果按图 1—2 所示，将左手的拇指、食指分别指着 x 轴和 y 轴的正向时，中指正好指着 z

轴的正向，则称这标架为**左手标架**．今后若无特别申明，我们谈到直角标架时，都是指右手标架．

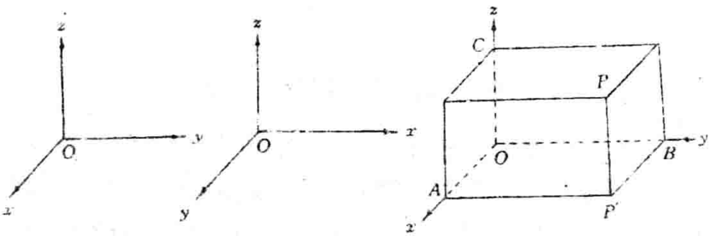

图 1—1　　图 1—2　　图 1—3

在取定直角标架后，就可以用数组来确定点的位置．

设 P 是空间任意一点，过 P 作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，分别交坐标轴 Ox、Oy、Oz 于 A、B、C（图 1—3）．以 x、y 和 z 分别表示点 A、B 和 C 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标，即 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$，其中 OA、OB、OC 分别是坐标轴上有向线段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 的数值①．这样就得到唯一确定的有序实数组 (x,y,z) 与点 P 对应．

反过来，任意给定一组有序实数 (x,y,z) 就可在 x 轴、y 轴和 z 轴上确定三个点 A、B 和 C，使它们在各坐标轴上的坐标分别为 x、y 和 z．经过 A、B、C 分别作平面垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，这三个互相垂直的平面必有唯一交点 P．因此，对任意一个有序实数组 (x,y,z)，在空间有唯一确定的点 P 与它对应．

根据上面的讨论我们得到，在空间取定直角标架后，空间的所有点和全体有序三元实数组之间就有了一一对应关系．这种一一对应关系称为**空间直角坐标系**．点 P 所对应的有序三元实数组 (x,y,z) 叫做点 P 在这个空间直角坐标系下的**坐标**，并将 x、y、z 依次称为点 P 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标．显然空间直角坐标系由空

---

① 根据轴上有向线段的数值的定义，这里的 OA、OB、OC 是实数而不是线段．今后类似的记号是表示实数还是线段可由上下文判定．

间直角标架决定，因此，有时也将直角标架称为直角坐标系．

为描点 $P(x、y、z)$，由图 1—3 知只须描出折线 $OAP'P$ 即得，其中 P' 是满足条件 $\overline{AP'}=\overline{OB}$ 的点．折线 $OAP'P$ 称为 P 点的**坐标折线**．

根据立体几何知识易知线段 OP 的长：

$$
\begin{aligned}
|OP| &= \sqrt{|OA|^2+|AP'|^2+|P'P|^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

在空间直角坐标系下，三个坐标平面将空间分成了八个部份，每一部份叫做一个**卦限**．各个卦限的名称由图 1—4 中罗马数字标明．第 Ⅴ—Ⅷ 卦限分别在 Ⅰ—Ⅳ 卦限的下方．

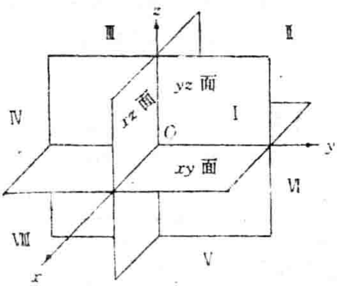

图 1—4

画坐标轴时，通常将其中两轴所定的坐标面正对观察者（这样可使画出的图形与实际图形一致），一条竖直，一条水平．这两轴夹角的平分线之一取作第三轴，其上由单位长画出的长度约为前两轴的 1/2 或 $\sqrt{2}/2$，各轴的名称和正向的选择以满足右手系为准．图 1—5 是这种画法的例子．

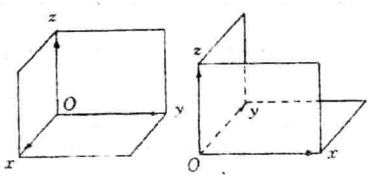

图 1—5

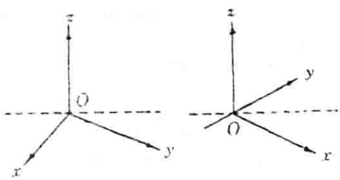

图 1—6

为使画出的空间图形更逼真些，可将上述画出的坐标系再绕竖直轴稍作旋转，使原正对观察者的坐标面稍斜，如图 1—6 所示．

例 1.1　设点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 O 不重合，求出它关于三

个坐标平面、关于三个坐标轴以及关于原点的对称点.

解 由图1—7可看出，点P关于xy面的对称点Q与它具有相同的x坐标和y坐标，但z坐标却恰好反号.P关于x轴的对称点R则与它具有相同的x坐标，而y坐标和z坐标却恰好反号.P关于原点的对称点S与P的三个坐标都恰好反号.因此当P的坐标为(x,y,z)时，Q则为$(x,y,-z)$，R为$(x,-y,-z)$，S为$(-x,-y,-z)$. 读者试写出P关于其余坐标面和坐标轴的对称点的坐标.显然，这种对称点之间的关系不仅当P在第四卦限时如此，在其他卦限时也是如此.

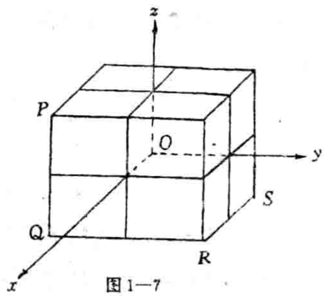

图1—7

练习1.1

1. 填空(表格(1)中填坐标的符号)

(1)

卦限 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x								
y								
z								

(2)

	xy面	xz面	yz面	x轴	y轴	z轴	原点
坐标特点	$z=$	$y=$	$x=$	$y=$ $z=$			

2. 在给定的直角坐标系中画出下列各点：(3,2,1)，(−2,1,3)，(0,3,2)，(−2,0,−1).

3. 若两点有两个坐标相同，另一个坐标反号，这两点关于什么对称？若

两点有一个坐标相同，另两个坐标反号，这两点关于什么对称？若两点三个坐标都反号，这两点关于什么对称？求出点(1，－3,2)关于坐标平面、坐标轴和原点的对称点．

习　题　1

1. 一正方体放置在 xy 面上，其下底面中心和原点相合，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上．已知正方体的边长为 a，求它各顶点的坐标．

2. 若 a、b、c 都大于零，满足条件 $|x| = a, |y| = b, |z| = c$ 的点 (x,y,z) 有几个？满足条件 $|x| < a, |y| < b, |z| < c$ 的点位于何处？

3. 指出满足下列条件之一的点位于哪几个卦限：

　(1) $xy > 0$；　(2) $xyz < 0$.

4. 求点 $P(3, -2, 6)$ 与坐标原点间的距离．

§2　向量及其坐标

2.1　向量

既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**．例如物理中的力、速度等．两向量的大小和方向都相同时称这两个向量**相等**．

最直观的向量是有向线段(图 2—1)，其大小就是线段的长，其方向就是从起点到终点的方向．为便于研究，可将各种向量都用空间中的有向线段来直观表示，所以下面我们在研究向量代数时，全部用空间中的有向线段来表达．

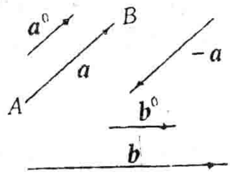

图 2—1

若将相等的向量看作同一向量，则用有向线段表示向量时，只要保持它的长和方向，它的起点可移至任意位置．因此，这种向量又称为**自由向量**．

今后，点都用大写英文字母表示，起点是 A 终点是 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$，也就是说$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}$. 由于向量和起点的取法无关，所以向量也常用一个小写字母表示，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{u}$、$\vec{v}$……．书籍中为了排印