现代数学译丛

积 分 论

〔瑞典〕T. 克莱松 L. 霍曼德尔 著

黄明游 译

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书与通常以测度论为始的教科书不同，它借助非负下方半连续函数来引进和讨论抽象的积分和测度概念及其性质，内容丰富而精炼，贯穿了近代分析学的观点和方法.

全书共三章、一个附录和综合练习及提示. 第一章黎曼积分，第二章勒贝格积分，第三章拉东-斯蒂尔杰斯积分.

读者对象是大学数学专业的高年级学生、研究生、教师以及其他有关的科技工作者.

T. Claesson L. Hörmander
INTEGRATIONSTEORI
Studentlitteratur, 1970

现代数学译丛
积 分 论
〔瑞典〕T. 克莱松 L. 霍曼德尔 著
黄明游 译
责任编辑 梅 霖 杜小杨
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1987 年 3 月第一次印刷 印张：3 1/4
印数：0001—5,600 字数：82,000

统一书号：13031 · 3476
本社书号：5365 · 13—1
定价：0.95 元

目　　录

第一章 黎曼积分

§1. 黎曼积分的定义

我们将仅考虑定义在一固定有限区间 $I\subset\mathscr{R}^d$

$$I=\{x;\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\ 1\leqslant j\leqslant d\}$$
$$=[a_1,\ b_1]\times\cdots\times[a_d,\ b_d]$$

上的有界函数(这里区间总指这样的轴向平行体). 我们定义 I 的测度为

$$m(I)=\prod_1^d(b_j-a_j).$$

对于不同于 I 的区间,其测度的定义类似.

设 f 为 I 上的函数. 若 I 可以剖分成有限多个子区间 I_j, 使在每个 I_j 内 f 为常数,则说 f 为分片常数. 若在 I_j 内 $f=c_j$, 我们令

$$\int_I fdx=\int_I f(x)dx=\sum c_jm(I_j).$$

显然,在利用区间 I 的另一个剖分 I'_j 时, 此值不会改变. 事实上, 只要把 $I'_j\cap I_k$ (它是I'_j 或 I_k 的加密) 当作 I 的新的剖分便可立即看出.

我们将限于实值函数, 并用T记 I 上所有分片常数函数之集合. 上面所定义的T中函数的积分具有性质:

$$\int_I fdx\geqslant 0,\ 若 f\in T\quad 且 f\geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

$$\int_I(af+bg)dx=a\int_I fdx+b\int_I gdx, \tag{1.1.2}$$

若 $f,g\in T$ 而 $a,b\in\mathscr{R}$.

若 f 是 I 上的有界实值函数,我们定义 f 的黎曼 (Riemann) 上、下积分分别为

$$\overline{\int_I} f dx = \inf_{f \leqslant h \in T} \int_I h dx, \quad \underline{\int_I} f dx = \sup_{f \geqslant h \in T} \int_I h dx. \tag{1.1.3}$$

这样,我们有

$$\underline{\int_I} f dx \leqslant \overline{\int_I} f dx. \tag{1.1.4}$$

事实上,若 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$, 则 $h_2 - h_1 \geqslant 0$. 其次,若 $h_1, h_2 \in T$, 则由(1.1.1)和(1.1.2)有

$$0 \leqslant \int_I (h_2 - h_1) dx = \int_I h_2 dx - \int_I h_1 dx,$$

此式表明所述论断.

定义 1.1.1. 如果

$$\underline{\int_I} f dx = \overline{\int_I} f dx$$

则称 f 是黎曼可积的,并令 $\int_I f dx$ 等于上述共同值,称此值为 f 的积分.

上述定义又可以陈述为: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 h_1, $h_2 \in T$, 使得 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$ 和

$$\int_I (h_2 - h_1) dx < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

I 上的任一连续函数皆是黎曼可积的, 这是因为此种函数为一致连续. 假若剖分充分的细, 并如此定义 h_1 和 h_2, 即在每个子区间内它们分别等于 f 的最小和最大值,则对于任给 ε, 可以使得 $h_2 - h_1 < \varepsilon$, 从而

$$\int_I (h_2 - h_1) dx < \varepsilon m(I),$$

(1.1.5) 由此得证. 因 $\int f dx$ 位于 $\int h_1 dx$ 和 $\int h_2 dx$ 的中间, 所以 $\int f dx$ 与 $\int h_1 dx$ 或 $\int h_2 dx$ 之差也小于 $\varepsilon m(I)$. 这也就是说,当剖分的细密度即子区间的最大直径趋于零时, $\int h_1 dx$ 和 $\int h_2 dx$ 收敛于

$\int fdx$. 若 ξ_i 是子区间 I_i 中任意选定的一点,则当剖分的细密度趋于 0 且 f 为连续时,我们有

$$\sum f(\xi_i)m(I_i) \to \int_I fdx.$$

假设 a 和 b 为非负实数而 f, g 为有界实值函数,则

$$\overline{\int}_I (af + bg)dx \leqslant a\overline{\int}_I fdx + b\overline{\int}_I gdx,$$

$$\underline{\int}_I (af + bg)dx \geqslant a\underline{\int}_I fdx + b\underline{\int}_I gdx. \qquad (1.1.6)$$

(作为练习验证一下!) 假若 f 和 g 为黎曼可积, 则上述二不等式的右端相等,又根据(1.1.4)知它们的左端也相等,所以 $af + bg$ 可积. 其次,若 f 黎曼可积,则 $-f$ 也黎曼可积. 这样,我们证明了

定理 1.1.2. 若 f 和 g 为黎曼可积, a 和 b 是常数,则 $af + bg$ 黎曼可积,并且

$$\int_I (af + bg)dx = a\int_I fdx + b\int_I gdx. \qquad (1.1.7)$$

练习. 试证: 若 f 或 g 黎曼可积,则(1.1.6)中的等号成立.其次,若 f 为有界函数并对任一有界函数 g 下式成立

$$\overline{\int}_I (f + g)dx = \overline{\int}_I fdx + \overline{\int}_I gdx,$$

则 f 必为黎曼可积.

前面, 我们从分片常数函数出发定义了黎曼积分. 换一种方法,上述积分也可以通过 I 上所有连续函数的集合即函数类 $C = C(I)$ 来加以定义,这是由于

$$\overline{\int}_I fdx = \inf_{f\leqslant h\in C}\int_I hdx, \quad \underline{\int}_I fdx = \sup_{f\geqslant h\in C}\int_I hdx. \qquad (1.1.3)'$$

上面的等式可以这样来证明: 若 h 为连续和 $\geqslant f$, 则有

$$\overline{\int}_I fdx \leqslant \overline{\int}_I hdx = \int_I hdx,$$

从而

$$\int_I fdx \leqslant \inf_{f\leqslant h\in C}\int_I hdx.$$

另一方面,可取一个分片常数函数 g 使 $f \leqslant g$ 和 $\int g dx \leqslant \overline{\int} f dx + \varepsilon$. 对于 g 又可找到一个连续函数 h, 例如分片线性函数, 使得 $g \leqslant h$ 和 $\int h dx \leqslant \int g dx + \varepsilon$. 这样一来,我们有 $f \leqslant h$ 和

$$\int h dx \leqslant \overline{\int} f dx + 2\varepsilon,$$

(1.1.3)′ 由此得证.

黎曼积分的定义还可以这样叙述: 一个函数 f, 当而且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $h_j \in C$, $j = 1, 2$, 使得 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$ 和 $\int (h_2 - h_1) dx < \varepsilon$ 时为黎曼可积. 注意,一旦对 $f \in C$ 按这种或那种方式定义了 $\int f dx$, 那么这个定义便总是可以利用的, 同时 (1.1.1) 和 (1.1.2)成立.

练习. 试证函数 f 为黎曼可积的充分与必要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 恒可找到 $g \in C$, 使得 $\overline{\int} |f - g| dx < \varepsilon$ 成立.

练习. 证明达布 (Darboux) 定理: 对任意有界函数 f, 当剖分的细密度趋于 0 时,下式成立

$$\sum (\sup_{I_j} f) m(I_j) \to \overline{\int}_I f dx \text{ 和 } \sum (\inf_{I_j} f) m(I_j) \to \underline{\int}_I f dx$$

(提示: 利用上式对连续函数为真的事实).

现在,通过所建立的积分,我们同时也得到测量区间 I 的子集 E 之体积 (测度) 的一个方法. 若 χ_E 是集合 E 的特征函数(见附录),则将 χ_E 的上 (下) 积分定义为 E 的外 (内) 若当 (Jordan) 测度,并记作 $\overline{m}(E)$($\underline{m}(E)$). 假若 χ_E 为黎曼可积, 则称 E 为若当可测并用 $m(E)$ 表示 $\int_E \chi_E dx$. 其次,我们规定

$$\overline{\int}_E f dx = \overline{\int}_I \chi_E f dx.$$

显然,一个有限集合是若当可测的且其若当测度为零. 然而,

一个有界的可数集合并不一定是若当可测的.

例 1. 令E为给定区间 I 中坐标为有理数的所有点之集合. 因 I 的任一开子区间与E及其余集均相交，故由定义直接可知$\overline{m}(E)=m(I)$和$\underline{m}(E)=0$.

其次，一个若当测度为零的若当可测集并不一定可数. 当空间维数$d\geqslant 2$时此为显然,对于$d=1$的情形康托 (Cantor) 给出了下面的一个例子.

例 2. 从$E_0=[0,1]$开始,作

$$E_1=E_0\Big\backslash\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right].$$

对余下的两个子区间中的每一个,重复上面的作法,即删去中间的一个三分之一开子区间,这样我们得到

$$E_2=\left[0,\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\ 1\right].$$

如此以往，重复以上构造法，我们得到E_n，它由2^n个长度为3^{-n}的闭区间组成. 这样康托集合$C=\bigcap\limits_1^\infty E_n$是一个若当可测的完备集，由于$0\leqslant\overline{m}(C)\leqslant m(E_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$对一切$n$成立，所以$\overline{m}(C)=0$，从而$C$的若当测度为零. 其次，$C$集合是不可数的，这是因为它是由能用下式表示的那些$x$所组成

$$x=\sum_1^\infty\frac{x_n}{3^n},\ 其中\ x_n=0\ 或\ 2$$

(模仿$\mathscr{R}$为不可数集的证明).

最后,我们给出一个关于积分号下取极限的简单定理:

定理 1.1.3. 设函数$f_n,n=1,2,\cdots$，在I上黎曼可积，并假定当$n\to\infty$时f_n在I上一致收敛于函数f. 则f也是黎曼可积的并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n dx=\int_I f dx \tag{1.1.8}$$

证：对$\varepsilon>0$，让n足够的大,使

$$f_n - \varepsilon \leqslant f \leqslant f_n + \varepsilon$$

成立，则有

$$\int_I f_n dx - \varepsilon m(I) \leqslant \underline{\int_I} f dx$$

$$\leqslant \overline{\int_I} f dx \leqslant \int_I f_n dx + \varepsilon m(I).$$

由于上式的外层两项相差 $2\varepsilon m(I)$ 和 ε 为任意，故内层两项必须相等，这表明 f 是黎曼可积的. 由此还得到

$$\left| \int_I f dx - \int_I f_n dx \right| \leqslant \varepsilon m(I),$$

它保证(1.1.8)成立.

§2. 正项级数的积分

若 $a_{nm}(n, m = 1,2,\cdots)$ 为一具非负项的双重序列，周知恒有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm};$$

即如果其中的一端有意义(有限)，则另一端亦有意义，并且等式成立. 这一事实可由一正项级数之和是其有限部分和的极限直接得知.

倘若我们仅仅限定于黎曼积分，当将上式中的一个（或者两个)求和换成求积，那么情形就不是同样令人满意了. 下面定理的缺欠就是引进勒贝格（Lebesgue）积分的主要原由.

定理 1.2.1. 设 u_n 是 I 上的非负黎曼可积函数，则有

$$\underline{\int_I}\left(\sum_1^{\infty} u_n\right) dx = \sum_1^{\infty} \int_I u_n dx. \tag{1.2.1}$$

然而，可能出现这样的情况：尽管所有 u_n 连续并且上式的右端为有限，但是 $\sum_1^{\infty} u_n$ 并非黎曼可积.

注意，对于任一下方有界的函数其下积分是确定的. 狄尼

(Dini) 定理是上述定理证明的基本步骤，因此我们把它作为一个单独的引理。

引理 1.2.2. 若 f_n 为 I 上的非负连续函数，并且对任一 x，当 $n\to\infty$ 时，f_n 下降地趋于零，则 f_n 一致地趋于零，从而

$$\int_I f_n dx \to 0. \tag{1.2.2}$$

证：对任一 $x\in I$ 和给定正数 ε，我们可以找到整数 N，使得 $f_N(x)<\varepsilon$。显然对属于 x 的一个邻域 O_x 内的 y 亦有 $f_N(y)<\varepsilon$。根据序列的单调性，从而有 $f_n(y)<\varepsilon$ 当 $y\in O_x$ 和 $n>N$。当 I 为紧致时，根据波雷尔（Borel）引理可以用有限多个邻域 O_x 覆盖 I。这也就是说，当 n 充分大时，$f_n<\varepsilon$ 处处成立，由此引理得证。

定理 1.2.1 的证明：令 $\varepsilon>0$ 并选一连续函数 H，使

$$H\leqslant\sum_1^\infty u_n,\quad \underline{\int}\left(\sum_1^\infty u_n\right)dx\leqslant\int Hdx+\varepsilon/2.$$

其次，对每个 n 选一连续函数 h_n 使得

$$h_n\geqslant u_n,\quad \int h_n dx\leqslant\int u_n dx+\varepsilon/2^{n+1}.$$

这样一来，对每一 x 我们有

$$\sum_1^\infty h_n(x)\geqslant H(x).$$

令 $f_n(x)=\max\left(H(x)-\sum_1^n h_k(x);\ 0\right)$，则 f_n 单调地趋于零。从而，由引理知 $\int f_n dx\to 0$。现在有

$$\begin{aligned}\int f_n dx &\geqslant \int Hdx-\sum_1^n\int h_k dx\\ &\geqslant \underline{\int}\left(\sum_1^\infty u_n\right)dx-\sum_1^n\int u_k dx-\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，我们得到

$$\int\left(\sum_{1}^{\infty} u_k\right) dx \leqslant \sum_{1}^{\infty} \int u_k dx + \varepsilon.$$

根据 ε 的任意性，得知(1.2.1)的左端最大不超过其右端．另一方面，不难看出

$$\int\left(\sum_{1}^{\infty} u_n\right) dx \geqslant \int\left(\sum_{1}^{N} u_n\right) dx$$

$$= \sum_{1}^{N} \int u_n dx \to \sum_{1}^{\infty} \int u_n dx,\ \text{当} N \to \infty,$$

从而，(1.2.1)得证。

现在剩下就是给出一个例子来说明定理最后的那个论断．如果我们并非一定要求 u_n 具有连续性的话，那么就完全可以把 I 中具有有理坐标的那些点排成一个序列 $r_1, r_2, \cdots$，并令 $u_n(x) = 0$ 对 $x \neq r_n$ 和令 $u_n(r_n) = 1$。为了达到连续性的要求，我们稍为修改一下作法．作连续函数 f_n，使满足

$$0 \leqslant f_n \leqslant 1,\ f_n(r_n) = 1,\ \int_I f_n dx \leqslant m(I)/2^{n+1}.$$

并令

$$u_n = \begin{cases} f_1 & \text{当 } n = 1 \text{ 时;} \\ f_n(1 - f_1)\cdots(1 - f_{n-1}) & \text{当 } n > 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

则有

$$\sum_{1}^{n} u_k = [1 - (1 - f_1)\cdots(1 - f_n)] \leqslant 1,$$

于是相应的无穷级数的和 $\leqslant 1$ 并在所有的有理点上等号成立，这就说明

$$\int_I \left(\sum_{1}^{\infty} u_n\right) dx = m(I).$$

然而，根据(1.2.1)，

$$\int\left(\sum_{1}^{\infty} u_n\right) dx = \sum_{1}^{\infty} \int_I u_n dx \leqslant m(I)/2.$$

由此可见，$\sum_{1}^{\infty} u_n$ 是黎曼不可积的。至此定理证毕。

这个定理表明了积分概念上的一个缺欠．逐项积分无穷级数的和，必须不同地理解出现在两端的"积分"，这样 (1.2.1) 才能成立． 在下一章里将看到人们怎样推广积分概念，从而使得定理 1.2.1 变得完好．

§3. 累次积分

设 I (相应地 J) 是 $\mathscr{R}^d$ (相应地 $\mathscr{R}^e$) 中的一个区间，我们用 x (相应地 y) 表示变量，那么

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathscr{R}^{d+e}; x \in I, y \in J\}$$

是 $\mathscr{R}^{d+e}$ 中的一个区间．现在，令 f 是 $I \times J$ 上一个有界实值函数，我们断言

$$\overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \leqslant \overline{\iint}_{I \times J} f(x, y) dx dy, \qquad (1.3.1)$$

$$\underline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \geqslant \underline{\iint}_{I \times J} f(x, y) dx dy. \qquad (1.3.2)$$

这里，不等式的左端项是 f 先对 y 作上积分(或下积分)，其时固定 x，所得结果是一个 x 的函数，对它又按同一方式在 I 上进行积分．在不等式的右端，f 被视作 $I \times J$ 上的函数进行积分．为证 (1.3.1)，我们注意到，若 f 为分片常数则不等式显然成立．这是因为若区间 I_i (相应地 J_k) $\subset I$ (相应地 $\subset J$)，根据区间的测度的定义则 $m(I_i) \cdot m(J_k) = m(I_i \times J_k)$． 现在，如果 $f \leqslant h$ 是一个分片常数函数，那么

$$\overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \leqslant \int_I \left(\int_J h(x, y) dy \right) dx$$
$$= \iint_{I \times J} h(x, y) dx dy,$$

同时，根据上积分的定义，上式右端对所有如此之 h 的上确界与 (1.3.1) 的右端相等，由此 (1.3.1) 得证．(1.3.2) 可按同一方式证明或者通过对 $-f$ 应用 (1.3.1) 加以证明．

现在，让我们特别地假定 f 为 $I \times J$ 上的连续函数。因为 f 系一致连续，则可证

$$I(x) = \int_J f(x,y)dy$$

是 x 的连续函数。 因为若 $x_n \in I$ 和 $x_n \to x$，则 $f(x_n, y)$ 关于 y 一致地趋于 $f(x,y)$。根据定理 1.1.3，这也就是说 $I(x_n) \to I(x)$，因此(1.3.1)和(1.3.2)中的上、下积分可以换成积分，从而我们得到

定理 1.3.1. 若 f 是 $I \times J$ 上的连续函数，则

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx = \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy, \tag{1.3.3}$$

同时左端里层关于 y 的积分是 x 的一个连续函数。

现在，我们转向 f 是一般的黎曼可积函数的情形。 但是这只能非常简单扼要地讲，因为即便是这种情形，为了使这些定理能够令人满意，也需要扩充积分概念。假定 f 在 $I \times J$ 上黎曼可积，由(1.3.1)和(1.3.2)有

$$\begin{aligned}\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy &\leqslant \underline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \\ &\leqslant \overline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \leqslant \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy \end{aligned}\tag{1.3.4}$$

和

$$\begin{aligned}\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy &\leqslant \underline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \\ &\leqslant \overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \leqslant \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy. \end{aligned}\tag{1.3.5}$$

由于上述式子的外部两端是相等的，所以可以断定

$$x \to \overline{\int}_J f(x,y)dy, \quad x \to \underline{\int}_J f(x,y)dy$$

是在 I 上黎曼可积的，并且

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \tag{1.3.6}$$

和

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy\right) dx \qquad (1.3.7)$$

成立.

例. 设 $I = J = [0,1] \subset \mathscr{R}$ 并令

$$g(x) = \begin{cases} 1/q & 当\ x = p/q,\ p, q\ 互质; \\ 0 & 当\ x\ 为无理数. \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & 当\ y\ 为有理数; \\ 0 & 当\ y\ 为无理数, \end{cases}$$

则

$$\int_I g\,dx = 0,\quad \overline{\int}_J h\,dy = 1\ 和\ \underline{\int}_J h\,dy = 0.$$

令 $f(x,y) = g(x)h(y)$. 因为 $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x)$, 立即可知 f 在 $I \times J$ 上黎曼可积并且其积分值等于零. 然而,

$$\overline{\int}_J f(x,y)\,dy - \underline{\int}_J f(x,y)\,dy = g(x)$$

同时,当 x 为有理数时 $g(x) \neq 0$. 这也就是说,积分

$$\int_J f(x,y)\,dy$$

对于这样的 x 是没有定义的. 所以,一般说来 (1.3.3) 是没有意义的.

练习. 设 $f(x,y) = g(x)h(y)$, 其中 g 和 h 是任意非负有界函数,试证(1.3.1)和(1.3.2)中的等号成立. 特别地,若取 g 和 h 为特征函数,可得

$$\bar{m}(E \times F) = \bar{m}(E)\bar{m}(F),\ 若\ E \subset I\ 和\ F \subset J.$$

在此练习中, 假定条件 $g, h \geqslant 0$ 是很本质的, 这可由下面的练习看出.

练习. 设 $I = [0,1]$ 和 $J = [0,2]$ 并对 $x \in I$ 和 $y \in J$ 定义

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 当\ x\ 为有理数; \\ -x & 当\ x\ 为无理数, \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} -1 & 当\ y\ 为有理数, \\ y & 当\ y\ 为无理数. \end{cases}$$

令 $f(x,y)=g(x)h(y)+c$，其中 c 为任意常数. 试证以下三个积分

$$\overline{\iint}_{I\times J} f(x,y)dxdy,\quad \overline{\int}_{I}\left(\overline{\int}_{J} f(x,y)dy\right)dx$$

和
$$\overline{\int}_{J}\left(\overline{\int}_{I} f(x,y)dx\right)dy$$

互不相等.

§4. 变 量 替 换

这里，为避免使记号过于复杂，引进某些略有变化的约定将是适用的. 我们用 C_0 表示所有在 $\mathscr{R}^d$ 上连续并具紧致支集的函数的集合，而 C_0^+ 代表 C_0 中非负函数的集合. 若 $f\in C_0$，则黎曼积分

$$\int_I f dx$$

对任一含 f 的支集的区间 I 取同一值. 我们记此值为 $\int f dx$ 并把它叫做 f 在整个空间的积分.

我们已经证明：

$$\int (af+bg)dx = a\int f dx + b\int g dx,\quad a,b\in\mathscr{R},\quad f,g\in C_0; \tag{1.4.1}$$

$$\int f dx \geqslant 0 \quad 若\ f\in C_0^+. \tag{1.4.2}$$

现在，设 ϕ: $\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}^d$ 是一仿射变换，即

$$\phi(x) = Ax + x_0, \tag{1.4.3}$$

其中 $x_0\in\mathscr{R}^d$ 和 $A\in GL(d,\mathscr{R})$，即 A 是一个 $d\times d$ 可逆实矩阵.

若 f 为一 $\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}$ 函数，我们将从 $\mathscr{R}^d$ 到 $\mathscr{R}$ 的函数 $f\circ\phi$ 记作 ϕ^*f. 这个记号对于非仿射变换 ϕ 自然也可以采用. 很明显，$f\in C_0$ 蕴含 $\phi^*f\in C_0$. 然而，当而且仅当 $A=(a_{ik})$ 为对角矩阵时

始有：$f\in T$ 蕴含 $\phi^*f\in T$（分片常数函数的集合）。在这种情形，我们立即得到

$$|\det A|\int\phi^*fdx=\int fdx,\ f\in C_0. \tag{1.4.4}$$

事实上，若 f 是区间

$$I=\{x;a_j\leqslant x_j\leqslant b_j, j=1,2,\cdots,d\}$$

的特征函数，则 ϕ^*f 就是区间

$$\{x;a_j-x_{0j}\leqslant a_{jj}x_j\leqslant b_j-x_{0j}, j=1,2,\cdots,d\}$$

的特征函数。可见对于这种函数从而对任意 $f\in T$，(1.4.4) 成立。由此，根据积分的定义，(1.4.4) 对所有 $f\in C_0$ 成立。一般地，(1.4.4) 对 $\mathscr{R}^d$ 上的有界并具紧致支集的函数的上积分和下积分成立。

特别地，若令 $f_h(x)=f(x-h)$，则(1.4.1)蕴含

$$\int fdx=\int f_hdx,\ f\in C_0,\ h\in\mathscr{R}^d. \tag{1.4.5}$$

现在，我们来说明：(1.4.1)，(1.4.2) 和 (1.4.5) 是积分的本质属性。

定理 1.4.1. 设 I：$C_0\to\mathscr{R}$ 是一个泛函，它满足：

(i) $I(af+bg)=aI(f)+bI(g)$， 对 $f,g\in C_0$ 和 $a,b\in\mathscr{R}$；

(ii) $I(f)\geqslant 0$ 当 $f\in C_0^+$；

(iii) $I(f_h)=I(f)$，$f\in C_0$，$h\in\mathscr{R}^d$。

这里 $f_h(x)=f(x-h)$。则存在一个常数 C 使得

$$I(f)=C\int fdx,\ 对 f\in C_0.$$

证：首先注意到，若 f，$g\in C_0$ 和 $f\leqslant g$，则由 (i) 和 (ii) 知 $0\leqslant I(g-f)=I(g)-I(f)$，亦即 $I(f)\leqslant I(g)$。因此，若所有 $f_n\in C_0$ 的支集均含于一个固定的有界集合 M，并且 f_n 一致地收敛于 f，则 $I(f_n)\to I(f)$。事实上，若 $0\leqslant g\in C_0$ 和 $g\geqslant 1$ 于 M 上，则有

$$-\varepsilon_n g\leqslant f-f_n\leqslant\varepsilon_n g,$$

其中 $\varepsilon_n=\sup|f-f_n|\to 0$ 当 $n\to\infty$。这也就是说，

$$|I(f)-I(f_n)| \leqslant \varepsilon_n I(g) \to 0 \text{ 当 } n \to \infty.$$

现在，设 f 和 g 属于 C_0 且其支集在 I 内，并设 $I_1, \cdots, I_N$ 是 I 的一个剖分，它们没有公共内点. 取 $h_j \in I_j$ 并注意到 (iii) 和 (i)，则有

$$I(F) = I(f)\sum_1^N g(h_j)m(I_j) \tag{1.4.6}$$

其中

$$F(x) = \sum_1^N f(x-h_j)g(h_j)m(I_j).$$

对于一个充分细的剖分，$F(x)$ 将接近于

$$(f*g)(x) = \int f(x-h)g(h)dh. \tag{1.4.7}$$

也就是说，由于函数 $(x,h) \to f(x-h)g(h)$ 连续并有支集 $\subset 2I \times I$，从而也一致连续，故有不等式

$$|F(x)-(f*g)(x)| < \varepsilon m(I),$$

只要剖分如此之细使得 $h \to f(x-h)g(h)$ 在 I_j 上的振幅小于 ε，对所有 x 和 j. 当剖分的细密度趋于零时，由(1.4.6)我们得到

$$I(f*g) = I(f)\int g dx. \tag{1.4.8}$$

若在(1.4.7)中引进变换 $h = x - y$，根据(1.4.4)不难验证 $f*g = g*f$，由此可得

$$I(f)\int g dx = I(g)\int f dx. \tag{1.4.9}$$

对于 $\int g dx \neq 0$ 的固定 $g \in C_0$，我们有 $I(f) = C\int f dx$，其中 $C = I(g)\Big/\int g dx$.

把定理 1.4.1 概括起来也就是说：除一个常数因子外，积分就是从 C_0 到 $\mathscr{R}$ 对平移为不变的线性正泛函.

现在，设 $A \in GL(d, \mathscr{R})$ 并考虑映射

$$f \to \int f(Ax)dx.$$