高等教育自学辅导丛书

高等数学

第三册

（多元函数微积分学与常微分方程）

北京大学　李正元　朱学贤

化学工业出版社

出 版 说 明

建国以来，在党的领导下，我国业余教育事业取得了很大成绩。为了进一步促进业余教育事业的发展，加速培养和选拔四化建设所需要的合格人才，教育部作出了关于建立高等教育自学考试制度的决定，凡属中华人民共和国公民经考核达到高等学校毕业生同等水平的，均承认其学历。为了配合这一工作的开展，为自学人员提供学习辅导材料，我社组织编写出版一套《高等教育自学辅导丛书》。这套丛书包括《语文》、《哲学》、《政治经济学》、《高等数学》、《物理》、《化学》、《生物》等册。

本《丛书》是根据北京市高等教育自学考试委员会公布的考试科目、教科书和考试要求以及教育部推荐的教学大纲编写的。书中力求从自学特点出发，对指定教材的内容作进一步阐述，重点突出、文字通俗，便于自学。

《丛书》除供自学人员学习外，也可供理工科大学、电视大学、业余大学师生选用。

化学工业出版社

一九八一年九月

前言

建设现代化的社会主义强国，需要培养众多的又红又专的人才。当前，我国只有很少一部分人直接由高等学校培养，绝大多数人只能走自学成材（包括在职学习）的道路。为了给自学者提供学习的条件，我们为化学工业出版社出版的《高等教育自学辅导丛书》编写了《高等数学》。全书共分三册：第一册包括解析几何与一元函数微分学；第二册包括一元函数积分学与级数；第三册包括多元函数微积分与常微分方程。

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会关于高等数学考试要求，并参照所规定的学习书目（樊映川著高等数学讲义（上、下册））和教育部推荐的高等数学教学大纲编写的。作为一本自学读物，本书力求做到深入浅出，通俗易懂，重点突出。为了便于自学，我们采用讲课的形式来编写。不少地方写得较细，以便将基本内容叙述清楚、讲深讲透。书中有较多的例题，在习题选解中又对一些典型题目进行分析解答，以便使读者能进一步理解书中的一些概念，掌握更多的解题方法与技巧。每节都有较多的习题，每章的最后都有小结，书后附有全部习题答案及部分习题的提示和解题步骤。书中还有阶段自我检查试题，在学完一阶段内容之后应按书中列出的自我检查试题，在规定时间内认真独立完成，然后对照书末的详细解答评定自己的成绩，总结经验，找出学习中不足之处，以便更好地掌握全书内容。

读者在自学中，应当在初步理解课本内容的基础上，务必要采取自己动手推导演算各个章节的定理、例题、习题的方式来加深理解；切不可一遇到困难就放过不做，或者去查看本书中的现成答案；这是自己独立学好本门课程的关键。

我们认为是必要的，但又超出目前教学大

纲的范围，对此均采用小号字排印。

全书由沈燮昌教授主审。

由于编写时间仓促，编者水平又有限，全书难免有错误或不妥之处，希望读者不吝指正。

编　者

1981.10

目　录

第十五章　多元函数的微分学

我们已经掌握了一元函数微积分学的基本内容，从第十五章至第十八章，学习多元函数的微积分学。

所谓多元函数，就是有几个自变量的函数。世界上的事物是复杂的，是由各方面的因素决定的。如通常所说的人体的温度只是一个笼统的概念，实际上，一方面它与时间有关，早晨低一些，下午高一些；另一方面，即使在同一时刻，人体各部位的温度也是不相同的。因此，人体的温度，要精确描述的话，是一个随时间而变化的分布函数，既依赖于时间，又依赖于位置。从这个例子可看出，与一元函数相比，多元函数更生动、更实际、更精确地反映了客观事物，因而，有着更广泛的用途。

多元函数的微积分学是一元函数的微积分学的推广，所以它们的许多概念是类似的，学习时要注意多元函数微积分学与一元函数微积分学之间的联系。另一方面，由于自变量个数的增加，还要特别注意概念中的一些本质的变化。

本章内容 在本章中，先建立多元函数的定义，然后讨论极限、连续性等概念。为便于理解，常常将它们与一元函数的相应概念进行比较。接着，我们要引进多元函数特有的偏导数及全微分的概念，在此基础上叙述复合函数微分法、隐函数微分法及高阶偏导数，最后要谈一下偏导数在几何方面及计算极值方面的一些应用。

在本章中，我们基本上讨论的是二元函数，读者马上就会看到，函数的微分法从一个自变量发展到两个自变量，本质上要出现一些新的东西；但从两个自变量发展到三个以至任意 n 个自变量，只有一些技术性的推广而已。

在学习一元函数微积分学时，读者也许体会到，适当地运用函数图象，对于分析问题是有许多好处的。多元函数微积分学的

学习也是如此。因此，读者在开始学习本章之前，再熟悉一下一些基本的空间曲面和立体图形，是大有益处的。

§1 函 数 概 念

本节主要讨论与二元函数有关的一些基本概念，一般的 n 元函数的定义只是略微提一下。

1.1 平面点集和区域

在函数的概念中，首先遇到的就是定义域（自变量变化的范围）的问题。在一元函数时，我们考虑的函数一般都是在某个区间上定义的，这个区间可能是开区间，也可能是闭区间，或者是半开半闭区间。对于二元函数来说，自变量多了一个，它的定义域如何确定呢？下面我们简单介绍一下平面点集和区域的一些基本概念。

设 x 和 y 是有次序的两个变量，当它们各自取定一个数值，比如 $x=x_0$、$y=y_0$ 时，我们就得到一个数对 (x_0, y_0)。显然，数对 (x_0, y_0) 与数对 (y_0, x_0) 是不一样的，因为后者表示 x 取值 y_0 而 y 取值 x_0。读者回忆一下平面直角坐标系中点的表示法就可发现，在作了上述规定之后，我们就能在所有可能的数对 (x, y) 和 Oxy 平面上的点 $P(x, y)$ 之间建立起一一对应关系。如同一元函数时，我们用 x 轴上的点表示实数那样，今后我们就用 Oxy 平面上的点 $P(x, y)$ 表示数对 (x, y)。为了简便起见，往往直接把数对 (x, y) 看成是平面上的一个点，于是，二个变量 x、y 的取值范围，就成为平面上的点的一个集合了。

由平面解析几何知道，平面上的两个点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离 $\rho(P_1, P_2)$ 由公式

$$\rho(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

给出。利用这个定义，将引入一个很重要的，今后要经常用到的一个平面点集——邻域的概念。

所谓一个点的邻域，是指以该点为圆心的一个圆的内部（圆周本身并不包括在内）。比如圆 $(x-1)^2+(y+1)^2<1$ 就是点

(1, -1) 的一个邻域，同样，圆$(x-1)^2+(y+1)^2<\frac{1}{100}$也是点(1, -1) 的一个邻域，也就是说，邻域的半径可大可小，并没有一个统一的规定。

设E是一个平面点集，P是E中的点。若存在点P的一个邻域（邻域的半径也许相当小），使该邻域内的所有的点都是E中的点，则称点P是集合E的一个内点。如果P点的任意一个邻域内既有集合E中的点，又有不属于集合E的点，则称点P是集合E的一个边界点，见图 15-1 。如果存在P点的一个邻域，在该邻域内除了P点之外，没有E中的点，则称P点是集合E的孤立点，孤立点的情况我们一般不讨论。

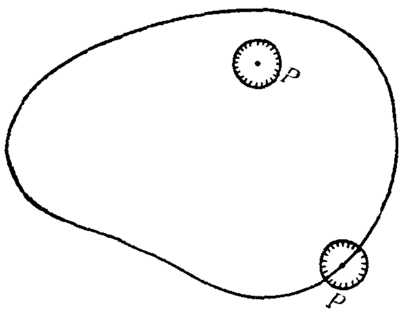

图 15-1

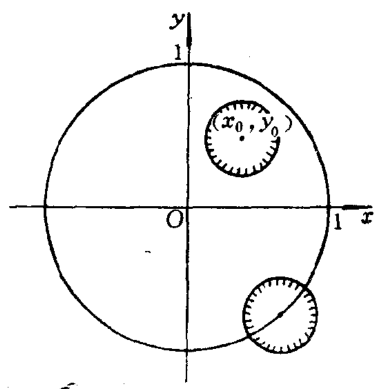

图 15-2

例1 单位圆$x^2+y^2=1$及其内部的所有的点构成一个平面点集E，单位圆内部的点都是内点，单位圆周上的点都是边界点（图15-2）。我们只就内点的情况作一下说明。设点(x_0, y_0)是单位圆内的任意一点，则其离开原点的距离$r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$. 从而以(x_0, y_0)为圆心，以$\frac{1-r}{2}$为半径的圆整个地包含在单位圆内，所以点(x_0, y_0)是点集E的内点。

思考题 例1中的点集E如果换成仅仅由单位圆内部的点(不

包括单位圆周)组成，则E的每个点都是什么点？

一个点集，如果它的每一个点都是内点，则称它是**开集**。

如果对于开集D中任意二点 P_1、P_2，都有D中的折线把这两点连结起来，则称这样的开集为**开区域**（图15-3）。本书中用到的平面开区域都是一些比较简单的情形，即是由一条曲线或几条曲线所围成的平面的一部分。例如由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的椭圆形：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$(图15-4(a))；由两组平行直线：$x=a$、$x=b$及$y=c$、$y=d$(其中$a<b$，$c<d$)围成的矩形的内部：$a<x<b$，$c<y<d$（图15-4(b)）；由两个不同的圆围成的环形：$r^2<x^2+y^2<R^2$（图 15-4(c)），以及扇形、第一象限、半平面等等都是开区域。

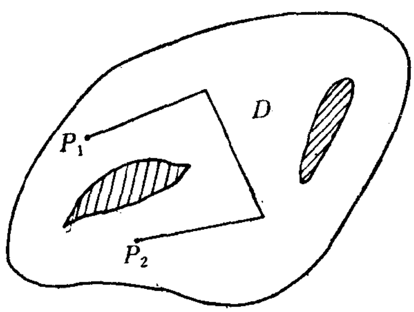

图 15-3

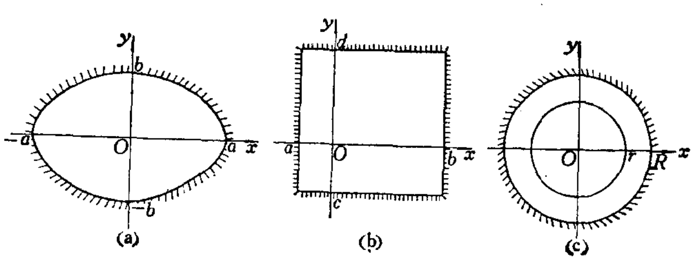

图 15-4

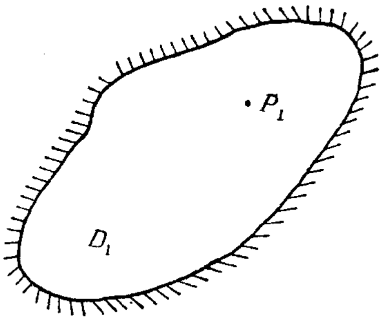

图 15-5

但图15-5所示的图形不是开区域。D_1和 D_2 分别是开区域，但结合在一起构成点集D就不是开区域了，因为D_1中的P_1点和 D_2 中的 P_2 点之间不可能用一条完全包含在 D 中的折线把它们连结起来。

围成开区域的曲线叫做该区域的边界。开区域加上它的边界则构成**闭区域**。在没有必要区别闭或开的场合，我们就笼统地说**区域**。椭圆形$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 是闭区域，而椭圆形$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$是开区域， 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是它们的边界。

区域的边界上的点，显然是区域的边界点。

一个区域，如果可以被一个以原点为中心、半径适当大的圆围住的话，则称它是一个**有界区域**；如果它能延伸到无穷远处，则称之为**无界区域**。图 15-6 中的区域D_1是有界区域；而第一象限以及由抛物线 $y=x^2$所围成的区

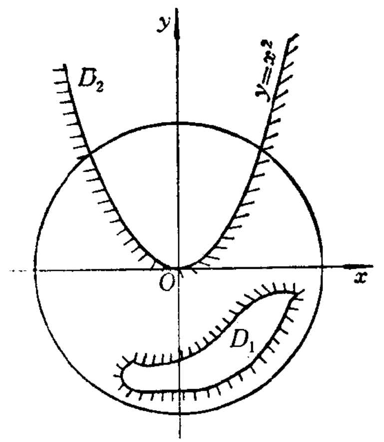

图 15-6

域：$y>x^2$都是无界区域。

一个点(x, y)属于某个区域D，记为$(x, y)\in D$。

以上是关于平面区域的一些最基本的概念，以后我们经常要用到。

1.2 二元函数的定义

先看两个例子。

例2 圆柱体的体积V由公式

$$V=\pi r^2 h,$$

给出，其中r是底圆的半径，h是圆柱体的高。若给定R和h的一组值，比如$r=1$、$h=3$，则得V的一个确定的值$V=3\pi$。

例3 理想气体的气态方程是

$$p=\frac{RT}{V},$$

这里的p、V、T分别表示气体的压强、体积和（绝对）温度，R是一个常数，当V和T的值分别给定时，p就得到一个确定的值。

如果撇开这两个例子中的具体内容，我们就可以看到：

（1）它们都涉及到三个变量，其中的一个变量依赖于另外两个变量；

（2）当这两个变量分别取定一个值时，第三个变量的值随之确定且是唯一的。

于是我们得到二元函数的一般概念。

定义1 三个变量x、y和z，z依赖于x和y，变量x、y所代表的点$P(x, y)$的变化范围是平面区域D。若对于D上的每一个点$P(x, y)$，变量z依照某一法则，都有一个确定的值与之对应，则称z是x及y的函数，记成

$$z=f(x,y),$$

或简记为

$$z=f(P).$$

变量x、y被称为**自变量**，z被称为**因变量**。区域D称为函数的**定义域**。z在点(x_0, y_0)的值记为$f(x_0, y_0)$，值的全体叫做

值域。

读者把上面的定义与一元函数的定义加以比较就可以发现，二者的结构是一样的，语言是类似的，只不过自变量多了一个，定义域不是区间，而换成了区域。

显然，定义在区间$[a, b]$上的函数$u=f(x)$也可以看成是二元函数$u=g(x、y)=f(x)$．它的定义域是平面上的带形区域：$a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<+\infty$（图15-7）。且对于直线$x=x_0$（$a\leqslant x_0\leqslant b$）上的每一个点，$u$的值都等于$f(x_0)$．

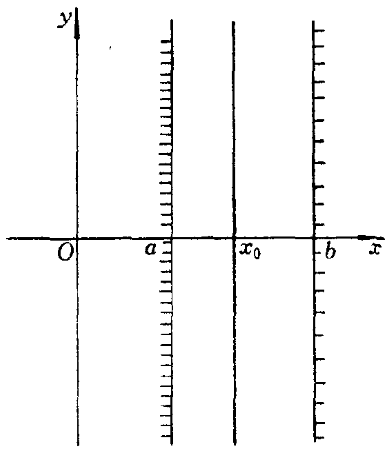

图 15-7

另一方面，在某区域上定义的二元函数，若把它限制在该区域内的一条直线或直线段上，则成为一元函数。比如$z=f(x,y)=\sqrt{xy}$是一个二元函数，但若把它限制在直线$y=2x$上，它就成为一元函数$z=f(x, 2x)=$
$=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\cdot|x|=F(x)$．

例4 已知函数$f(x,y)=\arcsin(x+y)+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，求

$f(0,0)$，$f\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$．

解 $f(0,0)=\arcsin(0+0)+\dfrac{1}{\sqrt{1-0-0}}=1$，

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{\pi}{4}+\frac{4\sqrt{16-\pi^2}}{16-\pi^2},$$

$$f\left(\frac{5}{6},\ -\frac{1}{3}\right)=\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{36}-\frac{1}{9}}}$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

例5 已知函数 $z=f(x,y)=x^2+y^2-xy\mathrm{tg}\frac{x}{y}$，求 $f(tx,\ ty)$ 和 $f\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\mathrm{tg}\ \frac{tx}{ty}$

$$=t^2x^2+t^2y^2-t^2xy\mathrm{tg}\ \frac{x}{y}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\mathrm{tg}\frac{x}{y}\right),$$

$$f\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)=(xy)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2-(xy)\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{tg}\frac{xy}{\frac{x}{y}}$$

$$=x^2y^2+\frac{x^2}{y^2}-x^2\mathrm{tg}y^2.$$

这道题有助于我们对函数概念的理解。事实上，$f(x,y)$ 表示函数在点$(x,\ y)$ 处的值，从而$f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$和 $f(tx,ty)$ 分别表示函数在点$\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$以及点$(tx,ty)$的值。

例6 求下列函数的定义域

（1）$z=\ln(x+y)$

（2）$z=\arcsin\ \frac{x^2+y^2}{9}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

解 （1）定义域为D：

$$x+y>0.$$

即在直线$x+y=0$右方的半个平面，见图15-8。

（2）点(x,y)要同时满足

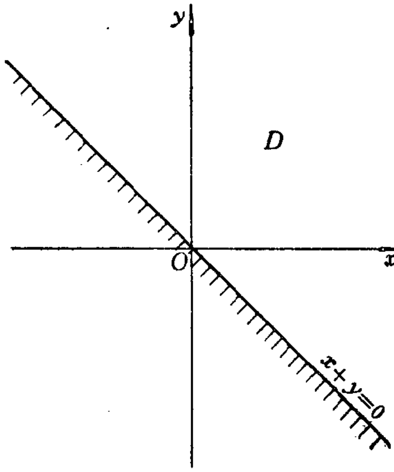

图 15-8

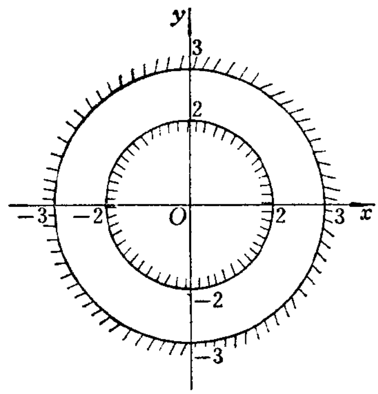

图 15-9

$$\left|\frac{x^2+y^2}{9}\right|\leqslant 1 \quad 及 \quad x^2+y^2-4\geqslant 0.$$

把这两个不等式联立起来，解得定义域为

$$4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9.$$

是一个圆环（图15-9）.

注意：在许多场合，我们写函数时，并不注明它的定义域，这就是通常所说的自然定义域，即是在使函数有意义的一切点上进行讨论。

1.3 二元函数的几何表示

一元函数$y=f(x)$，可以用平面直角坐标系中的图形将其表出，一般说来，这图形是平面上的一条曲线，对于二元函数来说，平面直角坐标系显然不够用了，因为它有三个变量，所以我们要用空间直角坐标系来表出函数$z=f(x,y)$的图形。

假设函数$z=f(x,y)$在平面区域D上有定义，在D内任取一点$P(x, y)$，求出其相应的函数值z。我们得到空间中的一点$M(x,y,z)$。当点$P(x,y)$在D内变动时，点$M(x,y,z)$就在空间变动。一般说来，其轨迹就是空间的一张曲面（图15-10）。因此，对于二元函数，我们可用空间的一张曲面作为它的几何表示。

空间曲面的图形往往是比较复杂的，因此我们常常要画出这张曲面在各坐标面上的投影，或者用平行于各坐标平面的平面去截它，得到各种截线，通过这些投影和截线去研究曲面的性质，

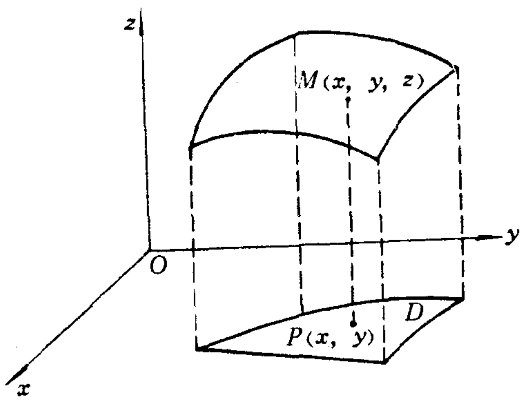

图 15-10

尤其在以后的多元函数积分学中常常要用到，下面举例说明。

例7 由空间解析几何知道

线性函数 $z = ax + by + c$ 表示一张平面，其法方向是$(a, b, -1)$。

函数$z=x^2+y^2$是以z轴为轴的旋转抛物面（图15-11(a)）。它在Oxz平面及Oyz平面上的投影分别是抛物线$z=x^2$（图15-11(b)），$z=y^2$（图15-11(c)）；用平行于Oxy平面的平面$z=z_0$（$z_0>0$）去截它，得到的截线是圆$x^2+y^2=z_0$（图15-11(d)）。

函数$z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$的图象是以原点为中心的、三根半轴都在坐标轴上的上半椭球面。