江苏省高等工科院校

1985～1986学年

数学试题及其解答汇编

（第一学期）

江苏省高等院校工科数学

教学研究会

1986年5月

前　　言

为了交流检查教学质量的经验、促进对于数学试题命题的研究探讨。在研究会各会员单位及合肥工业大学和安徽工学院的大力支持下，编印了这本高等数学试题及其解答汇编。

编印中，在统一格式和叙述方式的前提下，力求保持试题及其解答原貌，对于个别题目增添了解法或附注，重复出现的或解答显而易见的题目则略去了解答。

本汇编由南京航务工程专科学校数学教研室负责校审汇编，并由南京航务工程专科学校承印，在此谨向该校领导表示衷心的感谢。

江苏省高等学校工科数学
教学研究会

1986.6.

目　录

南京工学院 A卷

一、(1) 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，求$f\left\{f\left\{f\left\{f(x)\right\}\right\}\right\}$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}\ (x>0)$；

(3) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

(4) 设$f(x)$为已知的连续函数，求

$$\frac{d}{dx}\left[\sin\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y^2}f(t)\,dt\right)dy\right]$$

二、(1) 求 $\int\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$；

(2) 求 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\,\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(3) 求 $\int_0^1\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$；

(4) 求 $\int_{-1}^1 x^2\left(\sin x+\sqrt{1-x^2}\right)dx$；

三、 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

问：在$x=0$处$f(x)$的一阶导数与二阶导数是否存在？如果存在，试求其值。

四、 求 函数$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin t\right|dt$ 在区间

$\left[-\frac{41}{4}\pi,\ \frac{41}{4}\pi\right]$上的最大值与最小值。

五、求方程$y''-\alpha y'=e^{\beta x}$的通解．其中$\alpha$、$\beta$ 为实常数，且$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$。

六、设有连接点A(0，1)和B(1，0)的位于弦AP上方的曲线，其中P(x,y)为该曲线上的任意一点．已知曲线与弦AP之间的面积为x^3，求该曲线的方程．

七、设f(x)在〔0，1〕上有二阶导数，且f(0)=f(1)=0，$|f''(x)|\leqslant 1$，$x\in[0,1]$．

(1)试利用Taylor公式证明 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$，$x\in[0,1]$；

(2)若在〔0，1〕上有$0\leqslant f(x)\leqslant 1$成立，试证明方程f(x)=x在〔0，1〕上有且仅有一个解．

八、设函数f(x)的定义域为所有非零实数，对任何非零的实数x,y均有f(x,y)=f(x)+f(y)，且$f'(1)=2$．试求f(x)。

解 答

一、

$$(1)\ \because\ f\{f(x)\}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-x+1}=x$$

$$\therefore f\{f\{f\{f(x)\}\}\}=f\{f(x)\}=x$$

(2)当$0<x<1$时，

$$\because \lim_{n\to\infty}x^n=0,\ \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=-1;$$

当x=1时，

$$\because \lim_{n\to\infty}x^n=1,\ \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=0;$$

当$x>1$时，

$$\because \lim_{n\to\infty} x^n = +\infty, \quad \therefore \lim_{n\to 8} \frac{x^n-1}{x^n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}} = 1$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)x^2 = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\cos\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}$$

运用罗比塔法则 $$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right]}{-\frac{2}{x^3}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{-2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}$$

(4) $$\frac{d}{dx}\left[\sin\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y^2} f(t)dt\right)dy\right]$$

$$= \cos\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y^2} f(t)dt\right)dy \cdot \frac{b}{dx}\left[\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y^2} f(t)dt\right)dy\right]$$

$$= \cos\left[\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y^2} f(t)dt\right)dy\right]\cdot\sin\int_0^{x^4} f(t)dt\cdot(x^2)'$$

$$2x\cdot\sin\int_0^{x^4} f(t)dt\cdot\cos\left[\int_0^{x^2}\sin\left(\int_0^{y} f(t)dt\right)dy\right]$$

二、

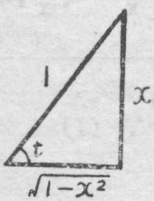
(1) $$\int\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx \xlongequal{\text{令}e^x=t} \int\frac{\frac{1}{t}\,dt}{(t+\frac{1}{t})^2} = \int\frac{tdt}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int\frac{\frac{1}{2}d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+1}+C$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{2x}+1}+C$$

(2) $$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \xlongequal{\text{令}\arcsin x=t}$$

图 1



$$\int\frac{t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt = \int t\csc^2 t\,dt+\int t\,dt$$

$$= -t\,\mathrm{ctg}\,t + \int \mathrm{ctg}\,t\,dt + \frac{t^2}{2}$$

$$= -t\,\mathrm{ctg}\,t + \ln|\sin t| + \frac{t^2}{2} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$$（参见图 1）

$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = x\ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \xlongequal{\text{令}\sqrt{x}=t} \ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{1+t}\,2tdt$$

$$=\ln 2-\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt=\ln 2-\int_0^1\frac{t^2-1+1}{1+t}dt$$

$$=\ln 2-\int_0^1 tdt+\int_0^1 dt-\int_0^1\frac{dt}{1+t}$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}$$

(4) $\int_{-1}^{1}x^2(\sin x+\sqrt{1-x^2})dx$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\sin xdx+\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx \xlongequal{令x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)dt=2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

三、 $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{x}=0$

$\therefore$ $\therefore f'(0)$存在且$f'(0)=0$.

从而可得

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(3x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}) \quad 不存在$$

$\therefore$ f(x)在x＝0处的二阶导数不存在

四、 $f'(x)=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|-|\sin x|=|\operatorname{con} x|-|\sin x|$

令$f'(x)=0$，则有$|\cos x|=|\sin x|$，解此三角方程得

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm10)$$

$$\because\quad f(k\pi+\frac{\pi}{4})=\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}}|\sin t|dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,dt$$

$$=\sqrt{2};$$

$$f(k\pi-\frac{\pi}{4})=\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt$$

$$=-2\sqrt{2}$$

$\therefore$ 在所给区间上f(x)的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$2-\sqrt{2}$。

五、先求所给方程$y''-\alpha y'=e^{\beta x}$对应齐次方程的通解Y。因为特征方程为$r^2-\alpha r=0$，解之得

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\alpha$$

所以齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{\alpha x}$$

再求原方程的一个特解y^*

当$\beta\neq\alpha$时：令$y^*=Ae^{\beta x}$，则有

$$y^{*\prime}=A\beta e^{\beta x},\quad y^{*\prime\prime}=A\beta^2{}^{\beta x}$$

代入原方程得

$$(A\beta^2 - A\alpha\beta)e^{\beta x} = e^{\beta x}$$

从而有 $A = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha\beta}$，因此

$$y^* = \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} e^{\beta x}$$

当$\beta=\alpha$时：令$y^* = Axe^{\beta x}$，则有

$$y^{*\prime} = (A + A\beta x)e^{\beta x}, \quad y^{*\prime\prime} = (2\beta A + A\beta^2 x)e^{\beta x}$$

代入原方程得

$$2A\beta + A\beta^2 x - \alpha\beta Ax - \alpha A = 1$$

因为$\alpha=\beta$，所以有 $2A\beta - \beta A = 1$，从而有$A = \dfrac{1}{\beta}$，因此

$$y^* = \frac{x}{\beta} e^{\beta x}$$

综上所述，原方程的通解为

$$y = Y + y^* = \begin{cases} C_1 + C_2 e^{\alpha x} + \dfrac{1}{\beta(\beta-\alpha)} e^{\beta x} & (\beta \neq \alpha) \\ C_1 + C_2 e^{\alpha x} + \dfrac{x}{\beta} e^{\beta x} & (\beta = \alpha) \end{cases}$$

六、设曲线方程为$y=y(x)$.（见图 2 ）由题意可得

$$\int_0^x y\,dx - \tfrac{1}{2}(y+1)x = x^3$$

两边对x求导，得

$$y - \tfrac{1}{2}y'x - \tfrac{1}{2}(y+1) = 3x^2$$

从而得到微分方程

$$xy' - y = -(6x^2+1)$$

解之有

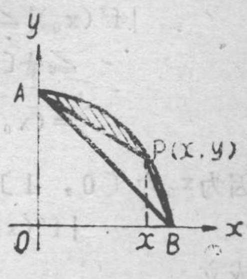


图 2

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{6x^2+1}{x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} + C \right] \right.$$

$$= -6x^2 + 1 + Cx$$

因为$x = 1$时$y(x) = 0$，所以由上式可求得$c = 5$，于是所求曲线的方程为

$$y = 1 + 5x - 6x^2$$

七、

(1)　在〔0，1〕上任取一点x_0，由Taylor公式有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{12} f''(\xi)$$
$$(x - x_0)^2$$

其中 ξ在x与x_0之间，于是有

$$f(1) = f(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{21} f''(\xi_1)(1 - x_0)^2 \qquad (1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(-x_0) + \frac{1}{21} f''(\xi_2) x_0^2 \qquad (2)$$

因为$f(1) = f(0) = 0$，故由式(1) - 式(2)可得

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} [f''(\xi_2) x_0^2 - f''(\xi_1)(1 - x_0)^2]$$

于是有

$$|f'(x_0)| \leqq \frac{1}{2} [|f''(\xi_2)| x_0^2 + |f''(\xi_1)| (1 - x_0)^2]$$
$$\leqq \frac{1}{2} [x_0^2 + (1 - x_0)^2 = x_0^2 - x_0 + \frac{1}{2}$$
$$= (x_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{2}$$

因为x_0为〔0，1〕任意一点，所以必有

$$|f'(x)| \leqq \frac{1}{2} \qquad x \in [0, 1]$$

成立

(2)令$F(x) = f(x) - x$.由(1)可知

$$F'(x)=f'(x)-1<0 \quad x\in[0,1]$$

成立，所以函数$F(x)$在$[0,1]$上单调递减，又因为$F(0)=f(0)-0=0$，$F(1)=f(1)-1<0$，所以方程$F(x)=0$在$[0,1]$上只有一个解$x=0$。这就表明方程$f(x)=x$有且只有一个解。

八、因为$f(xy)=f(x)+f(y)$，所以

$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$$

于是知道

$$f(1)=0$$

因此

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{2}{x}$$

直接积分即可得

$$f(x)=2\ln|x|+C \quad (x\neq 0)$$

由$f(1)=0$可以确定$C=0$，所以

$$f(x)=2\ln|x|$$

B卷（补考题）

一、(1) 设$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f[f(x)]$；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$；

(3) 求$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[\sin(1-2x)\operatorname{tg}\pi x]$；

(4) 设 $f(x)$的原函数为$\frac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)dx$.

二、(1) 求$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$；

(2) 求$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$；

(3) 求$\int_0^1\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(4) 求$\int_0^{50\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$.

三、设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}+2x & ,x\neq0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

(1) 求$f'(x)$；(2)判断$f'(x)$在点$x=0$处是否连续.

四、证明$\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx<\sqrt{2}$.

五、求满足方程 $y''' + y'' - y' = 0$ 的一条积分曲线，使其通过点(0，－5)，在该点处有倾角 arctg 3 的切线，且曲率为 0。

六、两根质量均匀分布的细棒AB，CD位于同一直线上(图 3)。其长度分别为 $L_{AB} = 2, L_{CD} = 1$；质量密度分别为 $\sigma_{AB} = 1$，$\sigma_{CD} = 2$；B、C 之间的距离为 3。今有一质量为m的质点P位于B、C之间。问质点 P应置于何处，恰使两棒对它的引力大小相等？

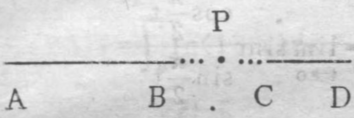


图 3

七、已知 $f(x) = \dfrac{1 - 2x - 4x^2}{1 - x - 2x^2}$ 试求

(1) $f^{(n)}(x)$；(2) $f(x)$在$x = 0$处的五阶Taylor公式

八、已知f(x)满足关系式

$$f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t)\,dt$$

试求f(x)。

解 答

一、

(1) $f[f(x)] = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

(2) 当$x > 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = +\infty$， 所以原式 = 1；

当$x = 0$时，原式 = $\frac{1}{2}$；

当x＜0时，$\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=0$，所以原式＝x

综上所述，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{x+e^{nx}}=\begin{cases}1 & x>0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ x & x<0\end{cases}$$

（3） 令$1-2x=t$，于是有

$$原式=\lim_{t\to o}\sin t\,\mathrm{ctg}\frac{\pi t}{2}=\lim_{t\to o}\sin t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to o}\frac{t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}$$

（4） $原式=\int x\,df(x)=x\,f(x)-\int f(x)dx$

$$=x\left(\frac{\sin x}{x}\right)'-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$

二、

（1） $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=(-2)\int\arcsin\sqrt{x}\,d\sqrt{1-x}$

$$=(-2)\Big[\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$$

$$-\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,d\sqrt{x}\Big]$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$$

(2) $\int\sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx=\dfrac{2}{3}\int\dfrac{d(x\sqrt{x})}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}$

$$=-\frac{4}{3}\int\frac{d(1-x\sqrt{x})}{2\sqrt{1-x\sqrt{x}}}=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+c$$

$$\int_0^1\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)dx=-\int_0^1\ln(1-x^2)dx$$ （广义积分）

$$=\int_0^1\ln(1-x)dx-\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\ln(1-x)d(1-x)\right]-\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[(1-x)\ln(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon}-\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}d(1-x)\right]-\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=1-\left[x\ln(1+x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=2-2\ln2.$$

$$\int_0^{50\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx=\int_0^{50\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,dx$$

$$=50\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=100\sqrt{2}$$

三、(1) 当 $x\neq0$时，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+2$

在$x=0$处，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}+2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+2x^2-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+4x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+4}{2}=2$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos-\sin x}{x^2}+2, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases},$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+2\right)$$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x}=2=f'(0)$$

所以 $f'(x)$在$x=0$处连续.

四、证明

因为 $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx$，以 及 e^{-x^2} 在 $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$上连续且单调递减，所以

$$e^{-\frac{1}{2}}\leqslant e^{-x^2}\leqslant 1 \qquad x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

从而有

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{1}{2}}dx\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx$$

即

$$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx\leqslant\sqrt{2}$$