内 容 简 介

本书是苏联数学界普及数学知识的一部名著．全书共二十章，分三卷出版．书中不仅介绍了近代数学的各个分支，还介绍了数学的哲学、历史发展及其在物理学和工程技术方面的应用．本书每章都由苏联第一流的学者撰著，有较高的学术水平．同时，本书写得深入浅出，只要具备高中数学知识，就可以理解．在努力实现四个现代化的今天，这部书必将帮助我国广大读者扩大眼界，找到解决问题的数学工具．本卷共十章，包括微分方程、变分法、复变函数、数论、概率论、函数逼近、计算方法和电子计算机等方面的内容．

本书可供大学数学系师生、中学教师、具有高中以上文化程度的学生、有关方面的科技人员及数学爱好者阅读．

А. Д. Александров

МАТЕМАТИКА, ЕЁ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ/ТОМ 2/

Издательство Академии Наук СССР, 1956

数 学

——它的内容、方法和意义——

第 二 卷

〔苏〕А. Д. 亚历山大洛夫 等 著

秦元勋 王光寅 裘光明 胡祖炽 越民义 许孔时 梁文祺 余家荣 储锺武 于桂芝 译

周毓麟 孙以丰 冯 康 许孔时 越民义 王寿仁 秦元勋 校

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1959年4月第一版 开本：850×1168 1/32

1984年7月第五次印刷 印张：12 7/8

印数：17,571—43,670 字数：340,000

统一书号：13031·2494

本社书号：3427·13—1

定价：1.90元

目　　录

第　二　卷

第五章 常微分方程

§1. 绪　　论

微分方程的例子　在前几章中我们所遇到的方程主要是求某几个量的数值．例如在求函数的极大值和极小值时，我们需要解方程去求函数的变化率为零的点；又如在第四章(第一卷)中研究求多项式的根的问题等等．所有这些情形都是在求个别的数值．但是在数学的应用中，时常遇到性质上完全新的问题，在这类问题中，函数本身是未知的，一些变数对另一些变数的依存规律本身是未知的．例如研究物体的冷却过程，我们要确定它的温度如何随时间而变化；在决定行星或星球的运动时，我们要决定它的坐标与时间的依存关系等等．

对于所要找的未知函数，我们时常可以作出它的方程，这类方程称为泛函方程，一般说，泛函方程的性质可以是各种各样的(研究稳函数的问题可以说是我们已经遇到过的最简单最原始的泛函方程)．

在第五、六及八章中，将研究未知函数的寻求问题．在这一章及下章中要研究未知函数的方程中最重要的方程，即所谓微分方程．从这个名称就可以知道，这个方程中不只出现函数本身，而且还出现它的某些阶的微商．

下面的等式可以作为微分方程的例子：

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t),\quad \frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=tx,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

前面三个方程用 x 记作未知函数，而 t 记作独立变数；后面三个方程用 u 记作未知函数，这些函数依赖于两个变数 x 与 t 或 x 与 y.

对于数学，特别是对于数学的应用，微分方程所具有的重大意义主要是在于：很多物理问题与技术问题的研究可以化归为这类方程的求解问题.

电子计算机及无线电装置的计算，弹道的计算，飞机在飞行中稳定性的研究，或者化学反应过程的稳定性的研究，所有这些都可以化为微分方程求解的问题来进行.

某些物理现象所服从的物理规律可用微分方程表现出来，而这些微分方程则是这些规律的准确的量的（数值的）表示的工具，这种情形是经常最易遇到的. 读者在下一章中将会看到，例如用微分方程之形式表示出质量守恒定律与热能守恒定律. 借助于微分方程，牛顿所发现的力学规律可以用来研究所有力学系统的运动.

我们用简单的例子来说明这一点. 设所研究的质点具有质量 m，在 Ox 轴上运动，在时间 t 它的坐标用 x 来表示.

当质点运动时，它的坐标 x 也在随时间而变化，而要知道质点的运动也即是要知道 x 对于时间 t 的函数依存关系. 设运动是在力 F 作用下进行的，又设力 F 是与用坐标 x 所定义的质点的位置，与运动的速度 $v=\frac{dx}{dt}$ 及与时间 t 有关的，即是 $F=F\left(x,\frac{dx}{dt},t\right)$. 依照力学规律，作用于质点上的力 F 将引起运动的加速度 $w=\frac{d^2x}{dt^2}$，使得质点的质量 m 乘这个加速度确切地等于作用力的大小，也即是，在运动的任何时间，等式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x\cdot\frac{dx}{di},\ t\right) \tag{2}$$

是应该满足的.

这便是描述质点运动过程的函数 $x(t)$ 所应满足的微分方程式. 它是上述力学规律的简单的描述. 它的意义在于可以把决定

质点运动的力学问题化为微分方程求解的数学问题.

下面读者可以找到其他的例子，说明各种不同的物理过程的研究如何可以化为微分方程的研究.

微分方程理论在十七世纪的末年开始发展起来，差不多是与微分及积分的计算同时产生的. 现在微分方程已经成为研究自然现象的强有力的工具. 在力学、天文学、物理学及技术科学中借助于微分方程已经取得了巨大的成就. 牛顿研究天体运动的微分方程,从理论上得到行星运动规律,而这些规律原来只是由凯普勒实验中得到的. 勒未累在 1846 年预言海王星的存在,并在这个微分方程数值分析的基础上,决定海王星在天空中的位置.

为了说明微分方程理论的一般特点，首先要指出，一般说来，每一个微分方程不只有一个解而是有无限多个解，而是有无限多个函数满足这个方程. 例如,在前面所说的力学例子中,不论开始时质点所在的位置如何以及开始时的速度如何，只要在同样的函数 $F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$所表示的力作用下,所有的运动都必须满足前述的质点运动的方程,对应于每个运动有一个 x 对时间 t 的依存关系. 因为在力 F 作用下的运动可以有无限多个，微分方程 (2) 也将有无限多个解.

一般说来，每一个微分方程确定一整族的满足它的函数. 微分方程理论的基本问题是研究满足这个微分方程的函数. 微分方程理论使得有可能充分全面地表达出满足方程的所有函数的性质. 这在自然科学的应用上是特别重要的. 此外,如果需要计算,微分方程理论应保证有办法算出函数的数值. 如何做到这些，下面将会谈到.

如果未知函数只与一个变数有关，这种微分方程称为**常微分方程**. 而当未知函数与几个变数有关，方程中又出现未知函数对几个变数的微商,这种微分方程称为**偏微分方程**. 在(1)中前三个方程是常微分方程,后三个是偏微分方程.

偏微分方程理论具有本质上与常微分方程理论不同的许多固

有特点．有关偏微分方程的基本概念将在下一章中述及；本章中我们只谈到常微分方程．

现在看看下面几个例子．

例 1 镭衰变的规律是：衰变速度与镭所存余的量成比例．设已知在某一时间 $t=t_0$ 有 R_0 克的镭．要确定在任何时间 t 镭的量．

设 $R(t)$ 是在时间 t 尚未衰变的镭的量，衰变速度用量 $-\frac{dR}{dt}$ 来计量，因为速度与 R 成比例，我们得到

$$-\frac{dR}{dt}=kR,\tag{3}$$

式中 k 是一个常量．

要解决我们的问题便要由方程(3)决定函数 R，为此，注意到 $R(t)$ 的倒函数满足方程

$$-\frac{dt}{dR}=\frac{1}{kR},\tag{4}$$

因为 $\frac{dt}{dR}=\frac{1}{\frac{dR}{dt}}$．由积分计算知道具有形式

$$t=-\frac{1}{k}\ln R+C$$

的任意函数都满足方程(4)，式中 C 为任意常数．由此关系，我们定出 t 的函数 R．我们有

$$R=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt}.\tag{5}$$

由方程(3)的所有的解(5)中要提出在 $t=t_0$ 时取 R_0 值的那个解，如果将 $C_1=R_0e^{kt_0}$ 代入(5)我们就得到了这个解．

从数学的观点看来，方程(3)是函数 R 变化的非常简单的规律的描述，也就是说，函数 R 的减少速度 $-\frac{dR}{dt}$ 与函数 R 本身的值成比例．不仅在放射性衰变现象中，而且在许多其他物理现象中，满足这种函数变化的规律．

例如，我们在物体冷却的研究中也遇到函数变化的同样的规

律，此时物体中的热量的减少是和物体的温度与其周围介质的温度之差成比例，在许多其他物理过程的研究中，也有这类规律．因此，虽然我们由镭的衰变引出方程(3)，但方程(3)应用的范围比镭的衰变这个特殊问题更有无比的广泛性．

例2 设具有质量 m 的质点沿水平轴 Ox 运动于有阻力的介质中，例如在液体或气体中，受到依虎克定律作用的两个弹簧的弹性力的影响(图 1)．这个定律即是弹力向平衡位置起作用并与离平衡位置之偏差成比例．设平衡位置在点 $x=0$．则弹性力等于 $-bx(b>0)$．

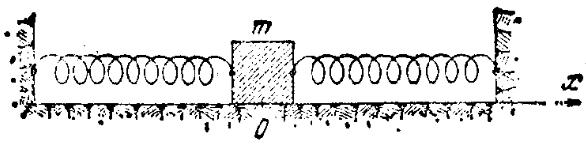

图 1

设介质阻力与运动之速度成比例，即等于 $-a\dfrac{dx}{dt}$，其中 $a>0$，又负号表示介质阻力的方向与运动速度的方向相反．当速度小时，关于介质阻力的这个假设与实验很符合．

基于牛顿定律质点的质量乘其加速度等于加于此质点的力的和，即是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

因此，在任何时间 t 表示质点运动位置的函数 $x(t)$ 满足微分方程(6)．我们将在后面的一节中研究这个方程．

如果除了上述各力外，还对质点施以外力 F，则运动的微分方程(6)将采取以下形式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}+F. \tag{6'}$$

例3 数学摆即是一个质量 m 的质点系于一个长度为 l 的线上(图 2)．我们假设在任何时候这个摆都在同一平面上——即图画所在的平面上．作用于质点的重力 mg 是将摆拉回平衡位置

OA 的力. 摆在任何时间 t 的位置可以用它与垂线 OA 相差的角 φ 来确定. 反时钟运动的方向作为 φ 角计算的正方向, 设质点由平衡位置 A 所经的道路为弧 $AA'=l\varphi$. 速度 v 将是沿圆的切线方向并将取以下的数值

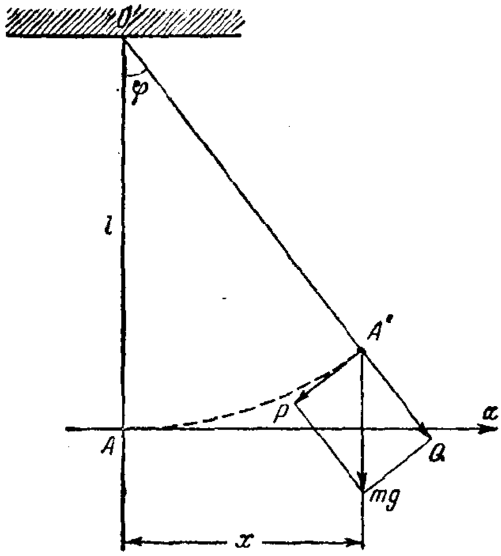

图 2

$$v=l\frac{d\varphi}{dt}.$$

为了作出运动的方程, 把重力 mg 分为两个分量 Q 与 P, 第一个分量沿着 OA' 半径方向, 第二个分量沿着圆周的切线方向. 分量 Q 不会引起速度 v 的数值的改变, 因为它与相反方向的拉力 OA' 相抵消. 只有分量 P 引起速度 v 的数值的变化. 它总是向着平衡位置 A 起作用, 即是当角 φ 为正时, 向减小 φ 的方向, 当角 φ 为负时, 向增加 φ 的方向. P 的数值等于 $-mg\sin\varphi$, 因此摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$$

或

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{7}$$

有趣的是, 这个方程的解不能用有限形式表示为初等函数. 甚至就数学摆的振动这类简单的物理过程来说, 要想用初等函数来给出它的准确表达式, 也已经表示出初等函数所包含的范围是很贫乏的. 后面我们要看到, 用初等函数可求解的微分方程是不多的. 常常会有这样的情形, 在物理或力学中遇到的一些微分方程的研究迫使我们引入新的函数, 对这些函数进行研究, 从而将解决应用问题时所用的函数的范围加以扩大.

现在我们只研究摆的微小振动，即当忽视微小的误差后，把 AA' 弧看作它在 Ox 轴上的投影 x，把 φ 代替 $\sin\varphi$ 的情况. 则 $\varphi\approx\sin\varphi=\frac{x}{l}$ 及摆的运动方程取更简单的形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x. \tag{8}$$

下面我们要说明，这个方程可用三角函数来解，由此可能相当准确地描述摆的“微小振动”.

例 4 赫尔姆霍尔茨的声学共振器(图 3)是由容积为 v 的充满空气的容器 V 和圆柱形的颈部 F 所组成. 近似地可将颈部 F 中的空气的质量看作具有质量 m 的柱子，

$$m=\rho sl, \tag{9}$$

式中 ρ 为空气密度，s 为颈部的横截面，l 为其长度.

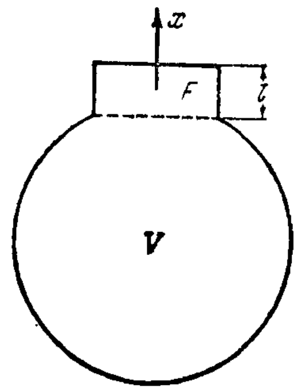

图 3

设空气从平衡位置移动的大小为 x，则具有容积 v 的容器的空气压力由初始压力变化一些，以 Δp 记此变化.

假设压力 p 与体积 v 由绝热变化规律 $pv^k=C$ 相联系. 则如果略去高阶的小量，我们得到

$$\Delta p\cdot v^k+pkv^{k-1}\cdot\Delta v=0$$

及

$$\Delta p=-kp\frac{\Delta v}{v}=-\frac{kps}{v}x. \tag{10}$$

(在我们这种情形 $\Delta v=sx$). 在颈部中空气的运动方程可以写成

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Delta p\cdot s, \tag{11}$$

式中 $\Delta p\cdot s$ 是在容量中的气体加于颈部中的空气柱的压力. 由关系(10)及(11)我们得到

$$\rho l\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kps}{v}x, \tag{12}$$

式中 ρ, p, v, l, k, s 都是常数.

例 5 在最简单的振动回路中的电振荡的研究也化为形式(6)的方程．这个回路的图式如图 4 所表示．这里左边表示电容为 C 的电容器，它的极板和自感 L 及电阻 R 串联成闭合回路．设在某一时刻电容器得到一个电位差，此后其电源即切断．如果回路中不存在自感，则电流就流动到电容器内不存在电位差时为止．

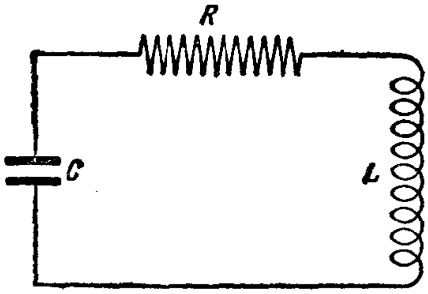

图 4

当有自感存在时，则过程便完全两样、在回路中产生电振荡．为要引出这个振荡的规律，以 $v(t)$ 或简单地用 v 表示在时间 t 电容器极板上的电位差，以 $I(t)$ 表示在时间 t 的电流强度，以 R 表示电阻．由熟知的物理规律，在任何时间 $I(t)R$ 均等于全部电动势，而后者包括电容器极板上电位差所产生的电动势 $-v(t)$ 以及自感电动势 $-L\frac{dI}{dt}$．由此有

$$IR=-v-L\frac{dI}{dt}. \tag{13}$$

以 $Q(t)$ 记在时间 t 电容器上的电量．则在回路上每时的电流强度等于 $\frac{dQ}{dt}$．电容器极板上的电位差 $v(t)$ 等于 $\frac{Q(t)}{C}$．因此，$I=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dv}{dt}$，等式(13)则改写为

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=0. \tag{14}$$

例 6 图 5 中所表示的为电磁振荡的真空管振荡器的线路图，由电容 C，电阻 R 及自感 L 所组成的振荡回路作为基本振荡系统．线圈 L' 及在图 5 中心所示的真空管组成所谓的反馈．电池 $Б$ 是和 L, R, C 相联的能源，k 是真空管的阴极，A 为阳极，S 为栅极．在这种线路图中，在 L, R, C 回路中产生“自振”．在所有的实际的系统中，在振动的过程，能量必变成热或用其他形式传

到周围的物体上去. 因此,为要保持振动的驻定状况,为了保持振幅,每一个实际的振动系统必须从外面取得能量. 自振与其他振动过程的区别在于,为了保持这个系统的驻定振动状况,外扰不必是周期的. 自振系统的装置要有个经常的能源,在我们的例子中电池 $Б$ 保持驻定振动状况. 钟表、电铃、音乐家手中的弦与弓、人的声带及其他例子都是自振系统.

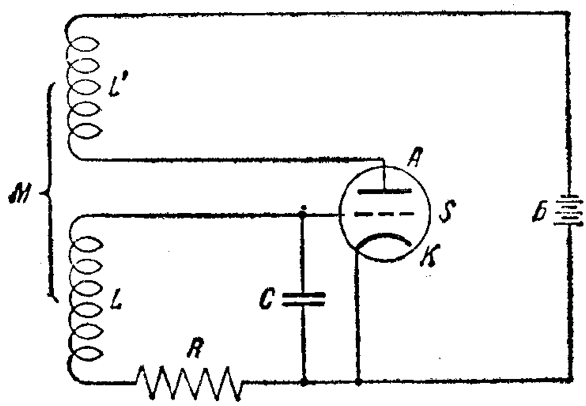

图 5

在 L, R, C 振动回路中的电流强度 $I(t)$ 满足方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI+v=M\frac{dI_a}{dt}, \tag{15}$$

式中 $v=v(t)$ 是在时间 t 电容器极板上的电位差, $I_a(t)$ 是通过线圈 L' 之阳极电流; M 是线圈 L 与 L' 之间的互感系数. 方程(15)比方程(13)只多了一项 $M\dfrac{dI_a}{dt}$.

可设阳极电流 $I_a(t)$ 只和真空管的栅极 S 与阴极之间的电位差有关,即是忽略了阳极的反作用;在这个假定下,这个电位差等于电容器 C 极板上的电位差 $v(t)$. 在图 6 中表示了 I_a 与 v 的函数相关的特性曲线通常用三次抛物线来表示这个曲线,近似地可写成

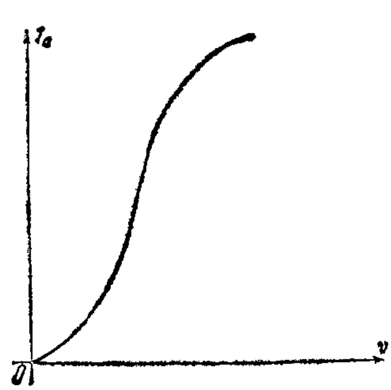

图 6

$$I_a = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3.$$

将此式代入方程(15)的右边,又利用

$$\frac{dv}{dt} = I,$$

我们得到 v 的方程

$$L\frac{d^2v}{dt^2} + [R - M(a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2)]\frac{dv}{dt} + v = 0. \qquad (16)$$

在这些例子中,对于已给的物理过程,寻找其示性的物理量的问题均化为求常微分方程解的问题.

微分方程论的问题 现在来给出确切的定义. 在变数 x 与值

$$y(x),\ y'(x) = \frac{dy}{dx},\ y''(x) = \frac{d^2y}{dx},\ \cdots,\ y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

之间的形如

$$F[x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ \cdots,\ y^{(n)}(x)] = 0 \qquad (17)$$

的关系式, 称为**一个未知函数 y 的 n 阶的常微分方程**. 微分方程中, 出现的未知函数的最高次微商, 称为**微分方程的阶**. 因此,在例 1 中所得到的微分方程是一阶,在例 2、3、4、5、6 中的是二阶.

如果将函数 $\varphi(x)$ 代替(17)中的 y, $\varphi'(x)$ 代替 y', $\cdots$, $\varphi^{(n)}(x)$ 代替 $y^{(n)}$,使得(17)变成恒等式,则函数 $\varphi(x)$ 称为**微分方程(17)的解**.

物理与技术的问题时常化为常微分方程组, 其中含有几个依赖于同一个独立变数的未知函数以及它们的微商.

为了说得更具体起见, 以下主要只谈一个未知函数的不超过二阶的常微分方程,用这个例子来说明,所有的常微分方程及未知函数的个数,等于方程的个数的方程组的基本性质.

上面我们已经说过,每一个常微分方程不是只有一个解,而是有无限多个解. 现在回到这个问题上来, 首先用前面 2 到 6 的例子来说明一些明显的看法. 在每个例子中所研究的与物理系统对应的方程, 只是由这个系统的结构所完全确定. 但在这些系统的每一个当中,可以发生不同的过程. 例如,十分显然,依照方程(8)

运动的摆可以作非常不相同的振动．摆的每一个振动与方程(8)的一个解相对应，因此必有无限多个这样的解．可以验证，形如

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{18}$$

的任何函数都满足方程(8)，其中 C_1 与 C_2 是任意常数．

物理上也是很明显的，只有当我们在某一个时间 t_0 给定 x 等于 x_0 的(初始)值(即物质质点与平衡位置最初的偏离)以及运动的初始速度 $x'_0=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$ 时，摆的运动才是完全确定的．用这些初始条件可以决定公式(18)中的常数 C_1 与 C_2．

我们在其他例中所得的微分方程完全同样会有无穷多个解．

关于具有一个未知函数的 n 阶的微分方程(17)，一般在很广泛的假定下可以证明有无数多个解．更确切地说：如果对于独立变数的某个"初始值"，我们给定未知函数及其直到 $n-1$ 次微商的"初始值"，则可找到方程(17)的满足这些"给定初始值"的解．也可以证明，用这些初始条件完全决定了解，只存在一个满足上面已给初始条件的解．关于这些我们后面将要更详细地讲到．现在我们的目的是要指明，函数及其 $n-1$ 个导数的初始值是可以任意给的．我们可以任意选择，作为所求解的"初始状态"的 n 个量．

设有可能性，我们把某个 n 阶微分方程的所有的解用一个公式表示出来，则这种公式中必定包含刚好 n 个独立任意常数，由这些数的选取我们可以满足 n 个初始条件．n 阶微分方程的这种包含有 n 个独立常数的解普通常称为这个**微分方程的通解**．例如方程(8)的通解为公式(18)，其中有两个任意常数，由公式(5)得到方程(3)的通解．

现在我们来看微分方程理论所遇到的问题的最一般的特点．它们是各种各样的．我们来谈其中最主要的．

设对微分方程再加上初始值，则微分方程的解便完全确定了．要求明显地表出解的公式，是微分方程理论的首要问题之一．只有在最简单的情形才能得到这种公式，但如果找到了这种公式，

则对解的计算与研究都有很大的帮助.

理论应当对于形成解的特性的概念提供可能性：解是否是单调的或是振动的？是否是周期的或趋近于周期的等等.

很明显，当我们将未知函数及其微商的初始值加以变动时(即被研究的系统的初始状态被改变)则解本身也将改变(即将换为另一个过程). 微分方程理论应当保证我们有可能讨论这种变化是怎样的. 特别是，对于初始值的微小变化，解本身的变化会不会是很小的，因此，解在这种情形下会不会是稳定的，或者初始值的微小变化可能引起解本身的强烈的变化，即它是不稳定的.

我们也应当不只是对于方程的每个单独的解，而是对于它的所有的解的全体得出定性的以及如果可能时得出定量的分布图形. 在设计时常常发生选取参数的问题，这些参数是仪器或机械的表征，选出它以保证工作的良好进行. 仪器的参数是在描述这种仪器工作的微分方程中以某种形式的量出现. 理论应当帮助我们说明，如果我们变化方程本身(变化其中出现的仪器参数)，(仪器工作的)解将发生些什么影响.

最后，当需要进行计算时，即要用数值计算来求微分方程的解时，理论应当提供给工程师及物理学家以可能更经济的与更快速的解的计算方法.

§2. 常系数线性微分方程

常微分方程中有一些重要的类型，其通解可以用简单的已经很好的研究过的函数表示出来. 这些类型中的一类是对于未知函数及其微商是线性的(简称为线性的)常系数微分方程. 例如，微分方程(3)，(6)，(8)，(14)便是这种类型. 如果方程中不具有与未知函数无关的项，则这个线性方程称为**齐次的**，如具有这种项，则称为**非齐次的**.

二阶常系数齐次线性方程 这种方程具有下面的形式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0, \tag{6}$$

式中 m, a, b 是常数. 不妨设 m 为正的; 这并不失其普遍性, 因为我们已假设 $m\neq 0$, 如果 m 为负的, 我们只要将所有的系数都换一个负号便可以达到这种假定.

对这个方程来找具有指数函数 $e^{\lambda t}$ 形式的解, 要找常数 λ 使得函数 $x=e^{\lambda t}$ 满足方程. 将 $x=e^{\lambda t}$, $\frac{dx}{dt}=\lambda e^{\lambda t}$, 及 $\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ 代入方程(6)的左方, 得到

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2+a\lambda+b).$$

因此, 要 $x(t)=e^{\lambda t}$ 是方程(6)的解, 充分而且必要的条件是

$$m\lambda^2+a\lambda+b=0. \tag{19}$$

如果 λ_1 与 λ_2 是方程(19)的两实根, 则容易验证, 所有形式为

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{20}$$

的函数都是方程(6)的解, 其中 C_1 与 C_2 是任意常数.

下面我们来证明, 如果方程(19)有不同的实根, 则公式(20)表示方程(6)的所有的解.

我们注意到方程(6)的下面的重要的性质:

1. 方程(6)的两个解的和也是这个方程的解.

2. 用常数乘方程(6)的解, 得到的也是一个解.

如果 λ_1 是方程(19)的重根的情形, 即是 $m\lambda_1^2+a\lambda_1+b=0$ 与 $2m\lambda_1+a=0$[1], 则函数 $te^{\lambda_1 t}$ 也将是方程(6)的解, 因为, 将这个函数及其导函数代入方程(6)的左边, 我们得到

$$te^{\lambda_1 t}(m\lambda_1^2+a\lambda_1+b)+e^{\lambda_1 t}(2m\lambda_1+a),$$

由前述的两个等式, 这里便恒等于零了.

在这种情形下, 方程(6)的通解为

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}. \tag{21}$$

现在设方程(19)有复数根. 因为 m, a, b 均为实数, 这两个

---

1) 二次方程(19)的根 λ_1 与 λ_2 的和为 $\lambda_1+\lambda_2=-\frac{a}{m}$, 如果两根相等, 即 $\lambda_1=\lambda_2$, 则由此可导出第二个等式.

复根便是共轭的．设 $\lambda=\alpha\pm i\beta$．方程

$$m(\alpha+i\beta)^2+a(\alpha+i\beta)+b=0$$

等价于两个等式

$$m\alpha^2-m\beta^2+a\alpha+b=0 \text{ 及 } 2m\alpha\beta+a\beta=0. \tag{22}$$

在这种情形下，容易验证函数 $x=e^{\alpha t}\cos\beta t$ 及 $x=e^{\alpha t}\sin\beta t$ 是方程(6)的解．实际上，例如将函数 $x(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ 及其微商代入方程(6)的左边，我们得到

$$e^{\alpha t}\cos\beta t(m\alpha^2-m\beta^2+a\alpha+b)-e^{\alpha t}\sin\beta t(2m\alpha\beta+a\beta),$$

而由等式(22)这个表示便恒等于零了．

如果方程(19)有复根，方程(6)的通解便可写成

$$x=C_1e^{\alpha t}\sin\beta t+C_2e^{\alpha t}\cos\beta t, \tag{23}$$

式中 C_1 与 C_2 是任意常数．

方程(19)称为**示性方程**，知道了方程(19)的根，我们可以写出方程(6)的通解．

我们注意到，对于常系数 n 阶线性齐次方程

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0,$$

$x=e^{\lambda t}$

如果已知道代数方程，也称为**示性方程**

$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

的根时，则微分方程的通解可以类似地用多项式，指数函数及三角函数表示出来．因此，常系数线性齐次方程的积分问题归结为代数问题．

现在我们来证明公式(20)，(21)，(23)实际上给出了方程(6)的所有的解．注意，这些公式中的 C_1 与 C_2 经常可以这样选取，使得函数 $x(t)$ 满足任何初始条件

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x'_0.$$

由公式(20)可以由方程组

$$x_0=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t_0},$$
$$x'_0=\lambda_1C_1e^{\lambda_1 t_0}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2 t_0}$$